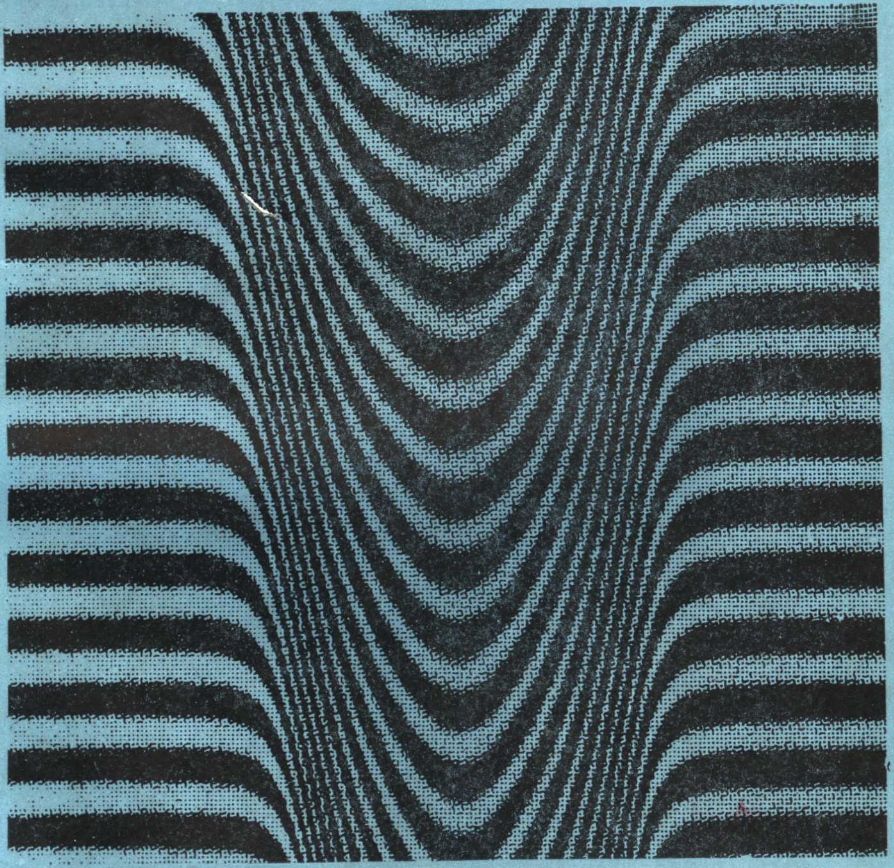
干部自学高考辅导读物

高等数学自学问答

——多元微积分部分

翟连林　赵家骅　编著



地质出版社

干部自学高考辅导读物

柯普　主编

高等数学自学问答

地质出版社

干部自学高考辅导读物

柯普　主编

高等数学自学问答

——多元微积分部分

翟连林　赵家骅　编著

责任编辑：赵薇

地质出版社出版发行

（北京和平里）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168 1/32　印张：15　字数：398000

1991年6月北京第一版·1991年6月北京第一次印刷

印数：1—3000册　　国内定价：10.00元

ISBN 7-116-00755-5/G·063

前　言

为了帮助广大干部、职工和青年运用自学的方法掌握高等数学内容，通过自学高等教育考试和各类职称学历考试，我们根据自学高考指定教材《高等数学讲义》（下册，樊映川等编）的内容，针对自学读者的实际需要和学习特点，将多元微积分的自学重点和常见疑难问题，分成一个一个的题目，给予简明扼要的分析和解答。书中突出多元微积分部分的基本概念、重要定理、公式和法则；着重介绍常用的解题方法和技巧；通过大量实例分析自学者易犯的错误及纠正方法。各章之后均配有思考练习题，书末还安排了三组自我检查题（附答案），读者可以通过这些题目，检查自学效果。

本书是在我们编写的《高等数学教学参考资料》（北京广播电视大学内部印刷）的基础上，通过教学实践并吸收了自学读者的意见，修订、补充而成的。

在本书编写过程中，邢富冲副教授以及梁琴、阮光南同志给予了大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，恳求读者批评指正。

编　者

1987年9月

目　　录

第一章　预备知识

平面解析几何研究的对象是平面上的点及平面上的点的轨迹——平面曲线．研究的方法是坐标法，即通过建立坐标系，使平面上的点与一对有序实数（点的坐标）建立一一对应的关系，进而建立平面曲线（包括直线）与二元方程间的对应关系，通过研究方程达到研究平面曲线的目的．

空间解析几何研究的对象是空间的点及空间点的轨迹——空间曲线和曲面．研究的方法除了坐标法外，还有向量法．这两种方法的应用和相互转换，为我们通过研究方程达到研究空间的曲线和曲面的目的带来很大的方便．

学习本章的要求：

1．理解空间直角坐标系的概念，掌握两点间的距离公式．

2．掌握向量、向量的模、向量的投影式、单位向量等概念和有关的计算公式．

3．熟记向量的数量积与向量积、两向量平行、垂直的充分必要条件．

4．掌握平面的点法式与直线的标准方程，了解其它类型的方程，会作简单的平面图形．

5．掌握几种特殊二次曲面（圆球面、椭球面、柱面、椭圆抛物面、圆锥面）的方程，并会画它们的图形．

一、空间直角坐标系

问：怎样建立空间直角坐标系？

答： 过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，这就建立了空间直角坐标系．其中 O 称为原点，Ox、Oy、

Oz分别称为x轴、y轴、z轴（如图1—1）。

空间直角坐标系又可分为右手系和左手系。若一坐标系，用右手四指由x轴正向到y轴正向的方向握住z轴，姆指恰好指向z轴正向（如图1—2），则称为右手系。反之称为左手系。我们通常采用右手系。

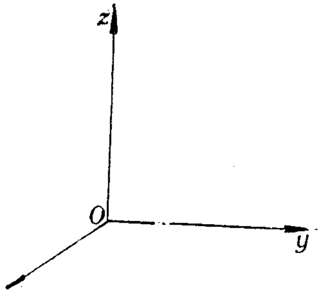


图 1—1

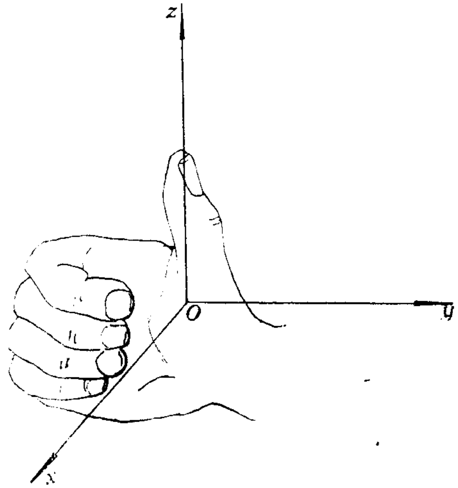


图 1—2

问：空间直角坐标系的八个卦限是怎样规定的？

答： 空间直角坐标系中的x轴和y轴、y轴和z轴、x轴和z轴所决定的平面分别称为xy平面、yz平面、xz平面，这三个平面统称坐标平面。

三个坐标平面把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限。

如图1—3，以正的x、y、z轴为棱的卦限为第Ⅰ卦限，它的后面以负x轴、正y轴、正z轴为棱的卦限为第Ⅱ卦限，第Ⅱ卦限的左边以负x轴、负y轴、正z轴为棱的卦限是第Ⅲ卦限，第Ⅲ卦限的前面以正x轴、负y轴、正z轴为棱的卦限是第Ⅳ卦限，第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限的下面依次为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

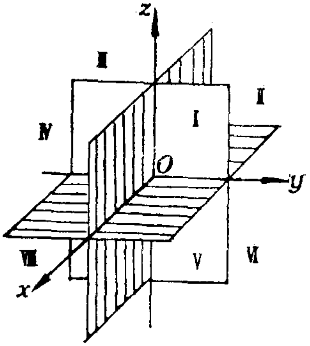


图 1—3

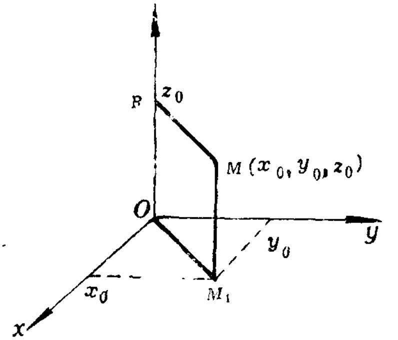


图 1—4

问：在每一卦限中，坐标的符号是怎样的？

答：由图1—3易知，八个卦限中坐标的符号依次为：

Ⅰ（+，+，+）、Ⅱ（－，+，+）、

Ⅲ（－，－，+）、Ⅳ（+，－，+）、

Ⅴ（+，+，－）、Ⅵ（－，+，－）、

Ⅶ（－，－，－）、Ⅷ（+，－，－）。

问：在空间直角坐标系中，任意一点与它的坐标之间的关系如何？

答：过空间任一点M作xy平面的垂线，与xy平面交于M_1（如图1—4），即M_1是M在xy平面上的投影。设M_1点在xy平面上的坐标为（x_0, y_0），再过M点作与OM_1平行的直线，与z轴交于R点，R点在z轴上的坐标为z_0，则空间任一点M的位置可用三个有序实数（x_0, y_0, z_0）来表示，这一组有序实数（x_0, y_0, z_0）就称为点M在空间直角坐标系$Oxyz$中的空间直角坐标。

反过来，任给一组有序实数（x_0, y_0, z_0），在空间直角坐标系中都可以确定一个以这三个有序实数为坐标的点M。确定M点的方法是：先以（x_0, y_0）为平面直角坐标在xy平面上确定一点M_1；再以z_0为数轴上的坐标确定z轴上的一点R；过M_1作

xy平面的垂线，过R作与OM_1平行的直线，两直线的交点M就是以（x_0, y_0, z_0）为空间直角坐标的点。

总之，建立空间直角坐标系之后，空间中任一点M都可以确定一组有序实数（x_0, y_0, z_0）为它的空间直角坐标；反过来，任给一组有序实数（x_0, y_0, z_0），又可以确定空间中一点M以（x_0, y_0, z_0）为其空间直角坐标。这样，空间中的点就与三个实数组成的有序数组建立了一一对应关系。

问：坐标原点以及x轴、y轴、z轴上任一点的坐标各是什么？

答：坐标原点的坐标为（0，0，0），x轴上任一点的坐标为（x, 0，0），y轴上任一点的坐标为（0, y, 0），z轴上任一点的坐标为（0, 0, z）。

问：在空间直角坐标系中，如何根据下列各点的坐标画出各点？

M（2，4，3），N（1，2，-3），P（-1，-2，-3），Q（0，1，2），R（-1，-1，0）。

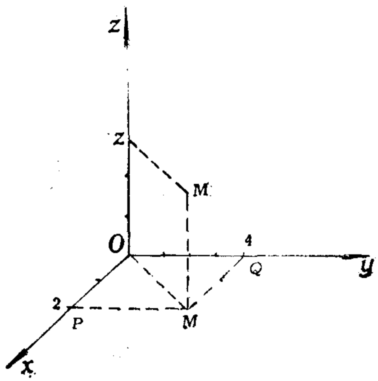


图 1—5

答：M点在第Ⅰ卦限，按照图1—5所示的画法，即可确定点M（先在xy平面上画出点M_1(2，4)，注意：M_1Q // x轴，PM_1 // y轴。再过M_1作z轴的平行线，在其上取$M_1M=3$，则M点即为所求）。

点N在第Ⅴ卦限，按照图1—6所示的画法，即可确定点N。点P在第Ⅶ卦限，按照图1—7所示的画法即可确定点P。

由于$x=0$，所以Q点在yz平面上（如图1—8）。由于$z=0$，所以R点在xy平面上（如图1—9）。

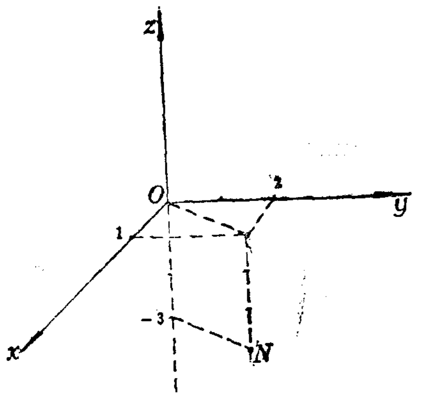


图 1—6

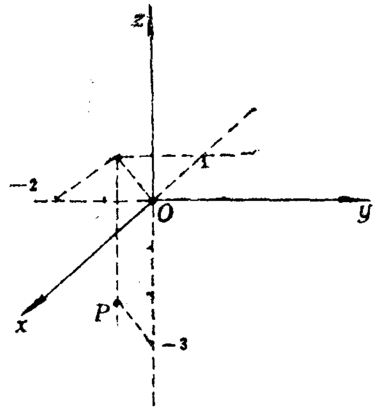


图 1—7

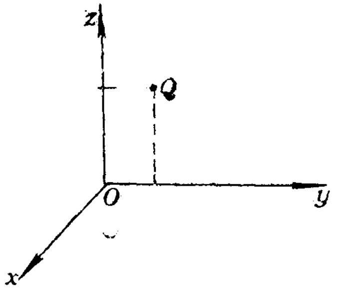


图 1—8

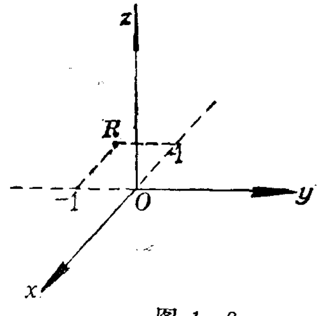


图 1—9

问：若点$P(x, y, z)$在第Ⅰ卦限，则关于三个坐标面与P点对称的点的坐标是什么？

答：关于坐标面xy与P点对称的点的坐标是（$x, y, -z$）；关于坐标面yz与P点对称的点的坐标是（$-x, y, z$）；关于坐标面xz与P点对称的点的坐标是（$x, -y, z$）。

问：在空间直角坐标系的第Ⅰ卦限有两点M_1（x_1, y_1, z_1）和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，怎样求M_1和M_2之间的距离？

答：过M_1与M_2各作分别平行于坐标面的平面，这六个平面围成如图1—10所示的长方体，这个长方体的三条棱长$AC=x_2-$

x_1，$BA=y_2-y_1$，$AM_2=z_2-z_1$，因为$\angle M_1BA$和$\angle M_1AM_2$都是直角，由勾股定理，得

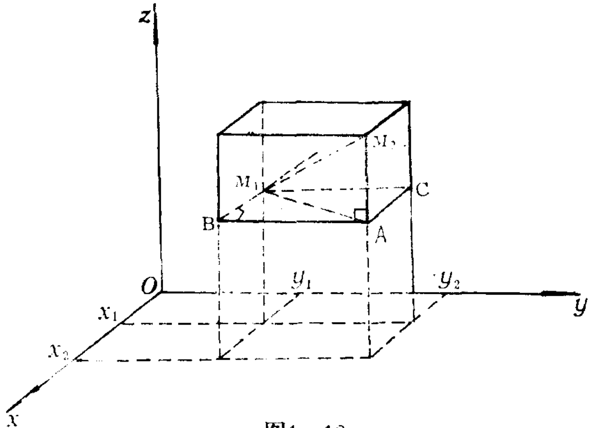


图1—10

$$
\begin{aligned}
|M_1M_2|^2 &= |M_1A|^2+|AM_2|^2\\
&= |BM_1|^2+|BA|^2+|AM_2|^2\\
&= |AC|^2+|BA|^2+|AM_2|^2\\
&= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad |M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是M_1和M_2之间的距离。

顺便指出，M_1和M_2无论在哪个卦限，这个求空间两点间的距离公式都是对的。

二、向　　量

问：什么是向量？在学习向量时应注意什么问题？

答：我们把既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）。例如，物理中的速度、加速度、力、…都是向量，几何中的有向线段也是向量。

在学习向量时，应注意向量具有两种属性，即：大小和方

向。例如，在研究速度时，不仅要考虑速度的大小，而且还要注意物体以这个速度向哪个方向运动。

问：在几何上如何表示向量？

答：在几何上向量通常用空间的一个有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示（如图1—11）。在取定单位之后，有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的大小，称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，箭头指示向量的方向。在图1—11中，A点称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点，B点称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点。向量除用起点 A 到终点 B 的字母上面加箭头表示以外，还表示为 $\overrightarrow{a}$ 或 $\overrightarrow{b}$ 等，在印刷体中还常用黑体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$等来表示。

图 1—11

长度等于零的向量称为零向量，用记号 $\overrightarrow{o}$ 来表示，零向量的方向可以看作是任意的。

向量的模用绝对值表示。例如，向量$\overrightarrow{AB}$的模表示为$|\overrightarrow{AB}|$；向量$\overrightarrow{a}$的模表示为$|\overrightarrow{a}|$。

问：$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$与$\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$是同一个向量吗？

答：不是。向量$\overrightarrow{AB}$的起点为A，终点为B，其方向是由A指向B。而向量$\overrightarrow{BA}$的起点为B，终点为A，其方向是由B指向A。所以，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是两个模相等而方向相反的向量。

问：$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}|$吗？

答：相等。这是因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$的方向虽然不同，但它们的长度$|\overrightarrow{AB}|$与$|\overrightarrow{BA}|$是相等的。

问：什么是自由向量？

答：只考虑向量的大小与方向，而不管向量的起点在什么地方。即能平移到任意始点的向量称为自由向量。

如果两个向量的方向相同，模也相等，则称这两个向量是相等的。显然，一个向量经过平行移动后仍与原向量相等。如图1—12所示。向量$\overrightarrow{CD}$是由$\overrightarrow{AB}$平移得到的，于是$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。

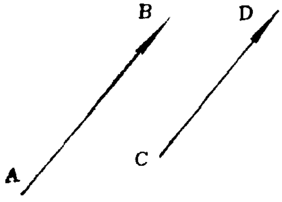


图 1—12

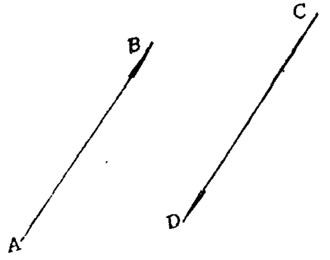


图 1—13

问：若$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$，则$\vec{AB}=\vec{CD}$吗？

答：不一定．当$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$，但$\vec{AB}$与$\vec{CD}$的方向不相同时，$\vec{AB}\neq\vec{CD}$。只有当$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$，且$\vec{AB}$与$\vec{CD}$的方向相同时，才有$\vec{AB}=\vec{CD}$．

问：若$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$，且$\vec{AB}\parallel\vec{CD}$，则$\vec{AB}=\vec{CD}$吗？

答：不一定．因为$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$与$\vec{AB}\parallel\vec{CD}$都不能保证$\vec{AB}$与$\vec{CD}$的方向相同．如图1—13所示，虽然有$|\vec{AB}|=|\vec{CD}|$，且$\vec{AB}\parallel\vec{CD}$，但$\vec{AB}\neq\vec{CD}$．

问：将$\vec{AB}$以起点A为中心，转动角度θ后得$\vec{AB'}$，是否$\vec{AB}$一定不等于$\vec{AB'}$？

答：不一定．当转动的角度$\theta=2k\pi$（k为整数）时，$\vec{AB}$与$\vec{AB}$重合，此时，$\vec{AB}=\vec{AB'}$．若$\theta\neq2k\pi$，则$\vec{AB}\neq\vec{AB'}$（图1—14）．

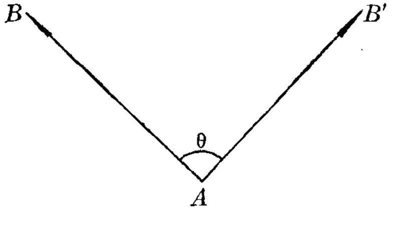


图 1—14

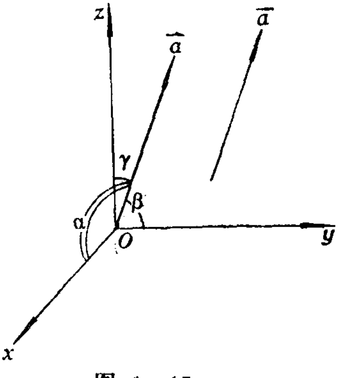


图 1—15

问：如何在空间直角坐标系中表示向量的方向？

答： 我们知道，向量经过平移后，其大小与方向都不变，为了在确定的空间直角坐标系中表示任意一个向量$\vec{a}$的方向，可将$\vec{a}$平移，使$\vec{a}$的起点与原点O重合，这样$\vec{a}$的方向就可以用$\vec{a}$的正方向与x轴、y轴、z轴的正方向的夹角α、β、γ表示（图1—15），并称α、β、γ为$\vec{a}$的方向角。

为了方向角的唯一性，我们规定：

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

显然，若$\vec{a}$确定，则$\vec{a}$的三个方向角就唯一地确定了。反之，若$\vec{a}$的三个方向角确定了，则$\vec{a}$的方向也就唯一地确定了。

问：什么是向量在坐标轴上的投影？

答： 如果向量$\overrightarrow{OM}$的起点在坐标原点，终点M的坐标为（x, y, z），则称三个坐标轴上的有向线段Ox、Oy、Oz的数量x、y、z为向量$\overrightarrow{OM}$分别在x轴、y轴、z轴上的投影（图1—16）。

显然，向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影不是向量而是数量，且分别等于点M的坐标x, y, z。

从图1—16可以看出，如果$\overrightarrow{OM}$的三个方向角为α, β, γ，则有

$$x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$y=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,$$
$$z=|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\gamma.$$

我们称$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$为向量$\overrightarrow{OM}$的方向余弦。向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影x、y、z的正负由方向角（或方向余弦）决定。

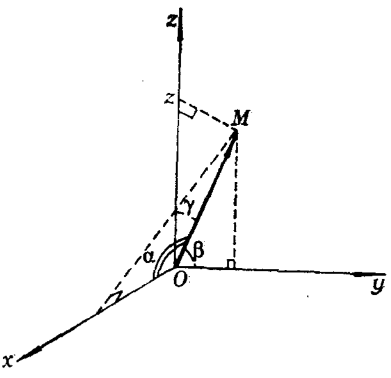


图 1—16

如果向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点不在坐标原点，设起点M_1的坐标为（x_1, y_1, z_1），终点M_2的坐标为（x_2, y_2, z_2），则

$\overrightarrow{M_1M_2}$在三个坐标轴上的投影分别为：

$$a_1=x_2-x_1,\ a_2=y_2-y_1,\ a_3=z_2-z_1.$$

如果$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角为α、β、γ，则

$$a_1=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha,\ a_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta,$$

$$a_3=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma.$$

问：在空间直角坐标系中，向量如何用它在坐标轴上的投影来表示？

答：在空间直角坐标系中，对于起点在坐标原点，终点坐标为(x, y, z)的向量$\overrightarrow{OM}$（如图1—17），有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M},$$

而$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}$，$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OR}$，

$$\therefore\quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

若在x轴、y轴、z轴上分别沿正方向取三个模数为1的单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，则

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k}.$$

所以，起点在坐标原点的向量$\overrightarrow{OM}$表示为：

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

这就是向量$\overrightarrow{OM}$的投影表达式，其中x、y、z为$\overrightarrow{OM}$在x轴、y轴、z轴上的投影。

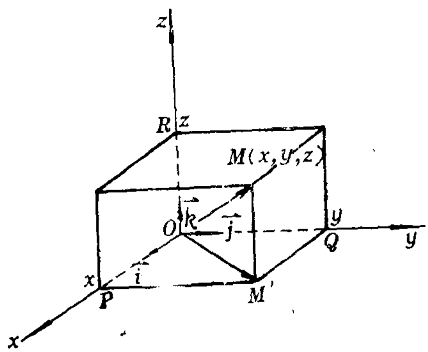


图 1—17

类似地，起点不在坐标原点的向量$\overrightarrow{M_1M_2}$（设M_1，$(x_1$，