普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学
——随机数学

吉林大学数学学院

高文森　潘　伟　主　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学
——随机数学

吉林大学数学学院

高文森　潘　伟　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学．随机数学/高文森，潘伟主编．—北京：高等教育出版社，2004.7
普通高等教育"十五"国家级规划教材
ISBN 7-04-014397-6

Ⅰ．大… Ⅱ．①高… ②潘… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 ②随机过程－高等学校－教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062079 号

策划编辑 李艳馥　　责任编辑 胡乃炯　　封面设计 于　涛
责任绘图 尹　莉　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800—810—0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010—82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	文字六〇三厂

开　　本	787 × 960　1/16	版　　次	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	23.25	印　　次	2004 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	430 000	定　　价	24.40 元

《大学数学》系列教材编委会

前　　言

《大学数学》系列教材是普通高等教育"十五"国家级规划教材. 本系列教材共四册:《微积分》(上、下)、《线性代数》和《随机数学》.

本系列教材的编写体现了时代的特点. 本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合.

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华,借鉴近几年我国出版的一批"面向21世纪课程教材"成功经验结合在吉林大学公共数学教学教研的具体实践,针对非数学类理工科大学生的特点编写的.

本系列教材内容充实,可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书. 在教材体系与内容的编排上,认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求. 对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容,其他专业可以在不带"*"号的内容中,根据实际需要选择适当的章节讲授. 每章后面所配备的习题分成两类,其中(A)是体现教学基本要求的习题;(B)是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题. 较难的题在题号前用"△"号做了标注. 与教材中"*"号内容相应的习题用"*"号做了标注. 本书的最后给出了习题参考答案或提示,供读者参考.

本册《随机数学》的一、六至十三章由高文森编写,二至五章由潘伟编写.

在《大学数学》系列教材的编写过程中,得到了吉林大学教务处的大力支持. 数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导;公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作,研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作,在此一并致谢. 作者要特别感谢高等教育出版社高等理工分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持.

由于我们水平所限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正,以期不断完善.

《大学数学》系列教材编委会

2004年7月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

随机数学是研究随机现象统计规律性的数学学科，它的理论和方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济、管理等诸多领域中得到了广泛的应用.

概率论是随机数学的理论基础，它给出描述随机现象规律性的数学模型.随机事件及随机事件的概率是概率论中最基本的概念.早在 17 世纪，人们就开始用古典概型来研究人口统计、天文、产品检查等各个方面的问题，促进了概率论的发展.但直到 20 世纪 30 年代概率论才有了建立在公理化体系上的严密的理论基础.

本章介绍随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的频率和概率、条件概率以及随机事件的独立性等基本概念，介绍古典概型和几何概型，介绍加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes) 公式以及二项概率公式等计算概率的基本公式.

§1　随机试验　随机事件

1.1　必然现象和随机现象

在自然界和人类社会中出现的各种现象大致可以分为两类：必然现象和随机现象.

在一定条件下必然出现的现象叫做**必然现象**.例如，每天早晨太阳从东方升起，人从地面向上抛起的石块经过一段时间必然落到地面，同性电荷互相排斥等，都是必然现象.

在相同的条件下可能出现也可能不出现的现象叫做**随机现象**.例如，抛掷一枚骰子出现的点数，抽样检查某产品的检验结果，某城市某日的交通事故发生的次数等，都是随机现象.许多随机现象在相同的条件下可以重复出现.如果我们对这种随机现象进行大量重复地观测，则在每次观测之前不能预先确定其结果，这就是这种现象的随机性；但在进行了大量重复地观测之后，其结果往往会表现出某种规律性，这就是统计规律性.例如，抽样检查一大批电子元件，每次抽查的一件可能是合格品，也可能是次品，检验之前无法预先确定是哪一个结果，这就是随机性；但在多次抽查之后，次品出现的比率(即在抽查中出现的次品件数与抽查总件数的比值) 将在整批电子元件的次品率附近摆动，这就是统计规律性.

1.2　随机试验和随机事件

为了研究和揭示随机现象的统计规律性，我们需要对随机现象进行大量重复地观察、测量或试验. 为了方便，将它们统称为试验. 如果试验具有以下特点：

1. 可重复性　试验可以在相同条件下重复进行多次，甚至进行无限多次；
2. 可观测性　每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的，并且试验的可能结果有两个或两个以上；
3. 随机性　每次试验出现的结果是不确定的，在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果，

则称之为**随机试验**，简称为**试验**.

我们用字母 E 表示一个随机试验，用 ω 表示随机试验 E 的最基本的结果，称为**样本点**，用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示随机试验 E 的最基本结果的集合，称为**样本空间**.

例 1.1　抛掷一枚硬币，观察正面和背面出现的情况（将这两个基本结果依次记为 ω_1 和 ω_2），则该试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 1.2　抛掷一枚骰子，观察出现的点数，则基本结果是"出现 i 点"，记为 $\omega_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则该试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

例 1.3　在一只罐子中装有大小和形状完全一样的2个白球和3个黑球，依次在2个白球上标以数字1和2，在3个黑球上标以数字3,4和5，从罐子中任取一个球，用 ω_i 表示"取出的是标有数字 i 的球"$(i=1,2,3,4,5)$，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}.$$

例 1.4　在一个箱子中装有10个同型号的某种零件，其中有3件次品和7件合格品，从此箱子中任取3个零件，其中的次品个数可能是0,1,2,3，试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,3\}.$$

例 1.5　某机场问讯电话在一天内收到的电话次数可能是0,1,2,…，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.6　考察某一大批同型号电子元件的使用寿命（单位：h），则试验的样本空间为

$$\Omega=[0,+\infty).$$

为了研究随机现象的统计规律性，需要合理地安排随机试验，分析试验的样

本空间.在许多实际问题中,人们不仅关心试验最基本的结果,还关心某些特定的结果在重复试验中是否会出现,出现的比率(即该结果出现的次数与试验总次数的比值)有多大.例如,在例1.6中,如果规定该型号电子元件优质品的标准是使用寿命超过1000h,则"任取1个元件是优质品"这一结果可以用样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$ 的一个子集 $A=(1000,+\infty)$ 来表示.这一结果在重复试验中有时出现,有时不出现.如果这一结果在重复试验中出现的比率较高,则表明这批元件的优质品率较高.

我们把随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 的子集(进一步还要要求这些子集满足一些特定的性质,在此不做讨论)称为随机试验 E 的**随机事件**,简称为**事件**,用大写字母 A,B,C 等表示.设 $A\subseteq\Omega$,如果试验结果 $\omega\in A$,则称在这次试验中事件 A 发生;如果 $\omega\notin A$,则称事件 A 不发生.

在上面的例子中,$A=(1000,+\infty)\subset\Omega=[0,+\infty)$,$A$ 是一个随机事件.如果取出一个元件的使用寿命 $\omega=1500\text{h}$,则 $\omega\in A$,表明事件 A 发生;如果取出另一个元件的使用寿命 $\omega=920\text{h}$,则 $\omega\notin A$,表明事件 A 没有发生.

由一个样本点 ω 组成的事件,称为**基本事件**.样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集,它包含 Ω 的所有样本点,在每次试验中 Ω 必然发生,称为**必然事件**.空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集,它不包含任何样本点,在每次试验中都不可能发生,称为**不可能事件**.

例 1.7 在例1.3中,子集 $A=\{\omega_1,\omega_2\}$ 表示事件"从罐子中任取一球是白球",子集 $B=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ 表示事件"从罐子中任取一球是黑球".事件"取出2号球"可表示为 $C=\{\omega_2\}$,事件"取出的是白球或黑球"为必然事件,事件"取出的是黄球"为不可能事件.

在一个样本空间中,如果只有有限多个样本点,则称它为**有限样本空间**;如果有无限多个样本点,则称它为**无限样本空间**.在例1.1～例1.4中的样本空间都是有限样本空间,在例1.5和例1.6中的样本空间都是无限样本空间.

1.3 随机事件的关系及运算

在一个试验 E 的样本空间 Ω 中可能有很多随机事件,每一事件具有各自的特性,在一些事件之间可能存在着某种联系.为了考察一个比较复杂的事件,往往是把它与一些较为简单的事件联系起来,通过对这些较为简单事件的研究去掌握比较复杂事件的特性,因此我们需要研究事件的关系及事件的运算.由于事件是样本空间的子集,因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是互相对应的.这里要注意的是理解事件的关系及运算的概率含义.

在以下的讨论中,假定 Ω 是试验 E 的样本空间,所论及的事件都是同一试验 E 的事件.

1. 随机事件的关系

(1) 事件的包含　如果当事件 A 发生时事件 B 一定发生,则称事件 B **包含**事件 A,记作 $A \subseteq B$.

在例 1.7 中,有 $C \subseteq A$.

设试验 E 是将一个点随机地投入图 1.1 ~ 图 1.6 中的矩形区域 Ω 内,事件 A 表示点落在圆形区域 A 内,事件 B 表示点落在区域 B 内,用 Ω 表示试验 E 的样本空间,用 Ω 的子集 A 和 B 分别表示事件 A 和事件 B,则在图 1.1 中,有 $A \subseteq B$.

对于任意事件 A,有 $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

(2) 事件的相等　如果事件 A 和事件 B 相互包含,即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记作 $A = B$.

事件 A 与事件 B 相等,表明 A 和 B 是样本空间 Ω 的同一子集,实际上是同一事件.

(3) 事件的互不相容　如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的,或称事件 A 与事件 B 是**互斥**的.

在例 1.7 中,事件 A 与事件 B 是互不相容的,事件 C 与事件 B 也是互不相容的.这表明,事件 B 和事件 C 在同一次试验中是不能同时发生的,但也可能同时都不发生.

在图 1.2 中,随机点不能同时落在圆形区域 A 和 B 内,因此事件 A 与事件 B 是互不相容的. A 和 B 作为样本空间 Ω 的子集,它们的交集是空集 $\varnothing$.

(4) 事件的互逆　如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 都有一个且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 是**互逆**的或**对立**的,称其中的一个事件是另一个事件的**逆事件**,记作 $\overline{A} = B$,或 $\overline{B} = A$.显然 $\overline{\overline{A}} = A$.

在例 1.7 中,事件 A 与事件 B 是互逆的.

在图 1.3 中,事件 A 与事件 B(阴影区域)是互逆的.作为样本空间 Ω 的子集,$\overline{A} = B$ 是 A 在全集 Ω 中的补集(或称余集).

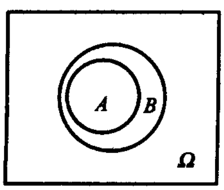

图 1.1

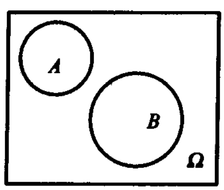

图 1.2

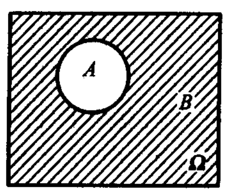

图 1.3

2. 随机事件的运算

(1) 事件的并　如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生,则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**并事件或和事件**,记作 $A\cup B$,即并事件

$$A\cup B=\{\text{事件 } A \text{ 发生或事件 } B \text{ 发生}\}=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}.$$

在例 1.7 中,并事件 $B\cup C=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$.

在图 1.4 中,并事件 $A\cup B$ 表示随机点落在圆形区域 A 或 B 内,用阴影区域表示.事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集,并事件 $A\cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集.

对于任何事件 A 与 B,有

$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A,$$
$$A\cup\bar{A}=\Omega,A\subseteq A\cup B,B\subseteq A\cup B.$$

如果 $A\subseteq B$,则有 $A\cup B=B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形:并事件

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 中至少有一个发生}\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{ 中至少有一个发生}\}.$$

例如,某人做一项试验,以 A 表示事件"该项试验成功",以 A_i 表示事件"该项试验做到第 i 次才成功"($i=1,2,\cdots$),则有

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

(2) 事件的交　如果事件 A 和事件 B 同时发生,则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件或积事件**,记作 $A\cap B$ 或 AB,即交事件

$$A\cap B=\{\text{事件 } A \text{ 发生且事件 } B \text{ 发生}\}=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}.$$

在例 1.7 中,交事件 $A\cap C=\{\omega_2\}$.

在图 1.5 中,交事件 $A\cap B$ 表示随机点落在圆形区域 A 和 B 的公共区域内,用阴影区域表示.事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集,交事件 $A\cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集.

对于任何事件 A 与 B,有

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B=B\cap A,$$
$$A\cap\bar{A}=\varnothing,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B.$$

如果 $A\subseteq B$,则有 $A\cap B=A$.如果 A 与 B 互不相容,则有 $A\cap B=\varnothing$.

事件的交可以推广到多个事件的情形:交事件

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 同时发生}\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{事件\ A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\ 同时发生\}.$$

(3) 事件的差　如果事件 A 发生而事件 B 不发生,则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记作 $A-B$,即差事件

$$A-B=\{事件\ A\ 发生但事件\ B\ 不发生\}=\{\omega \mid \omega \in A\ 且\ \omega \notin B\}.$$

在例 1.7 中,差事件 $A-C=\{\omega_1\}$.

在图 1.6 中,差事件 $A-B$ 表示随机点落在圆形区域 A 内且不落在 B 内,用阴影区域表示.

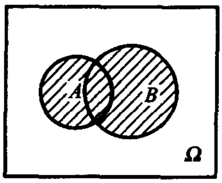

图 1.4

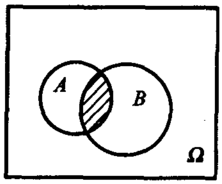

图 1.5

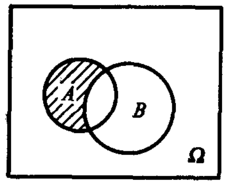

图 1.6

对于任何事件 A 与 B,有

$$A-A=\varnothing, A-\varnothing=A, A-B=A-AB=A\overline{B},$$
$$\Omega-A=\overline{A}, A-\Omega=\varnothing, (A-B)\cup B=A\cup B.$$

类似于集合的运算,事件的运算有如下的运算规律:

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA.$

2° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC).$

3° 分配律　$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C).$

4° 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

对于多个随机事件,以上的运算规律也是成立的.

例 1.8　某工人加工了 3 个零件,以 A_i 表示事件"加工的第 i 个零件是合格品"$(i=1,2,3)$,试用 A_1, A_2 和 A_3 这 3 个事件表示下列事件:

(1) 只有第 1 个零件是合格品;

(2) 只有 1 个零件是合格品;

(3) 至少有 1 个零件是合格品;

(4) 最多有 1 个零件是合格品;

(5) 3 个零件全是合格品;

(6) 至少有 1 个零件是不合格品.

解　用 A, B, C, D, F 和 G 分别表示(1) ~ (6) 中的事件.

(1) 事件 A 发生,意味着第 1 个零件是合格品,并且第 2 个和第 3 个零件都是不合格品,即事件 A_1 发生且事件 A_2, A_3 都不发生,因此

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3.$$

(2) 事件 B 发生,就是在 3 个零件中有 1 个是合格品,并且另外 2 个是不合格品,因此

$$B = (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_2A_3).$$

(3) 事件 C 发生,即在 3 个零件中至少有 1 个是合格品,也就是在 3 个零件中恰有 1 个是合格品,或者恰有 2 个是合格品,或者 3 个都是合格品,因此

$$C = (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \cup (A_1A_2\bar{A}_3) \cup (A_1\bar{A}_2A_3) \cup (\bar{A}_1A_2A_3) \cup (A_1A_2A_3).$$

事件 C 也就是或者第 1 个零件是合格品,或者第 2 个零件是合格品,或者第 3 个零件是合格品,因此 C 也可以表示成

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

事件 C 发生,意味着 3 个零件不能都是不合格品,而 3 个零件都是不合格品可表示成 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$,因此

$$C = \overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}.$$

根据对偶律可得

$$\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3} = \bar{\bar{A}}_1 \cup \bar{\bar{A}}_2 \cup \bar{\bar{A}}_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

此题表明,同一个事件可以用不同的方式来表示,这些方式是彼此相同的.我们应该选用比较简单的表示形式,以使问题的解答得以简化.

(4) 事件 D 发生,就是 3 个零件都不是合格品,或者其中有 2 个是不合格品而另外 1 个是合格品,因此

$$D = (\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \cup (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_2A_3).$$

事件 D 发生,也就是在 3 个零件中任意 2 个都不能同时为合格品,因此事件 D 也可以表示为

$$D = (\bar{A}_1\bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_2\bar{A}_3).$$

(5) 事件 F 发生,就是在 3 个零件中每一个都是合格品,因此

$$F = A_1A_2A_3.$$

(6) 事件 G 发生,就是在 3 个零件中有 1 个是不合格品而另外 2 个是合格品,或者有 2 个是不合格品而另外 1 个是合格品,或者 3 个零件都是不合格品,因此

$$G = (\bar{A}_1A_2A_3) \cup (A_1\bar{A}_2A_3) \cup (A_1A_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \cup (\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) \cup (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3).$$

事件 G 就是“3 个零件都是合格品”这一事件的逆事件,因此 G 也可以表示为

$$G = \overline{A_1A_2A_3}.$$

事件 G 也就是或者第 1 个零件是不合格品,或者第 2 个零件是不合格品,或者第

3个零件是不合格品,因此 G 还可以表示为

$$G=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3.$$

根据对偶律可知

$$\overline{A_1A_2A_3}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3.$$

例 1.9 设 A,B,C 是同一试验 E 的三个事件,试化简下列各式:

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$.

解 根据事件的运算规律,可得

(1)

$$\begin{aligned}&(A\cup B)(B\cup C)\\=&[(A\cup B)B]\cup[(A\cup B)C]\\=&[(AB)\cup B]\cup[(AC)\cup(BC)]\\=&B\cup(AC)\cup(BC)\\=&B\cup(AC).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)\\=&\{[A(A\cup\bar{B})]\cup[B(A\cup\bar{B})]\}(\bar{A}\cup B)\\=&[A\cup(A\bar{B})\cup(AB)\cup\varnothing](\bar{A}\cup B)\\=&(A\cup\varnothing)(\bar{A}\cup B)\\=&(A\bar{A})\cup(AB)\\=&\varnothing\cup(AB)\\=&AB.\end{aligned}$$

§2 随机事件的概率

在一个随机试验的样本空间中,可能有许多随机事件.一个事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,具有随机性.如果在大量重复试验中观测这些事件,则有的事件发生的可能性大些,有的事件发生的可能性小些,有些事件发生的可能性大小近似相等,这些事件发生的可能性大小呈现出一定的规律性.为了刻画随机事件发生的可能性大小,人们引进了随机事件的概率这一概念.

2.1 频率

例 2.1 在有120人参加的某次考试中,得80分的有40人,占总人数的 $\frac{40}{120}$;得90分的有15人,占总人数的 $\frac{15}{120}$.由此可知,得80分或90分的共有55人,