

高考会考指津丛书

数学

高考会考指津

主编：何维安

GAOKAO HUIKAO ZHIJIN CONGSHU

人民日报出版社

高考会考指津丛书

数学高考会考指津

主 编 何维安

人民日报出版社

(京) 新登字103号

责任编辑: 余 珉

封面设计: 钟海宏

高考会考指津丛书

数学高考会考指津

主编: 何维安

丛书特约编辑: 高应品

*

人民日报出版社出版发行

北京科技印刷厂印刷

新华书店经销

787×1092毫米 32开本 印张: 5.5 字数: 142千字

1992年8月北京第一次印刷 印数: 14300 定价: 2.50元

ISBN 7 - 80002 - 375 - 3 / G · 65

目 录

第一编 概 述

一、近年来高考试题与会考试题评析	1
(一)近年来高考试题评析	1
(二)近年来会考试题评析	5
二、会考试卷与高考试卷的比较	6

第二编 题型汇析

一、近年来高考试题题型分析	7
(一)选择题	7
1. 直接法	7
2. 图解法	10
3. 筛选法	14
4. 特殊值法	17
5. 验证法	21
6. 分析综合法	25
7. 解法的“选择”与“综合”	28
(二)填空题	31
1. 直接法	32
2. 图解法	35

3. 特殊值法	39
(三)简答题	42
(四)综合题	61
二、近年来会考试题题型分析	112
(一)选择题(参见“近年来高考试题题型分析· 选择题”)	112
(二)填空题(参见“近年来高考试题题型分析· 填空题”)	112
(三)简答题	112
(四)综合题	124

第三编 试题汇编

一、高考、会考试题	152
(一)1991 年全国高考试卷(理工农医类)	152
(二)1991 年全国高考试卷(供海南等三省使用)	155
(三)1991 年上海高考试卷	158
(四)1991 年上海会考试卷	163
二、学生能力评估自测	166
(一)学生能力评估自测题(供参加高考训练用)	166
(二)学生能力评估自测题(供参加会考训练用)	168
后 记	172

第一编 概 述

一、近年来高考试题与会考试题评析

(一)近年来高考试题评析

通过 88 年以来考试改革的实践,近几年的高考数学试卷已渐趋定型,具有许多共同的特点。91 年全国高考数学试卷和上海高考数学试卷也完全体现了这些特点。

(1)试卷的内容效度相对稳定。

①试卷的结构稳定。试卷均由两大部分组成,即客观性试题与主观性试题。客观性试题的比例有所提高,全国卷和上海卷都有 20 个小题,(全国卷中选择题 15 题,填空题 5 题;上海卷选择和填空各 10 题),客观题所占分值,全国卷占 50%,上海卷占 40%。主观题全国卷稳定在六道题目,分值占 50%;上海卷稳定在七道题目,分值占 60%,而且又从中分出三道题目作为简答题,它是主客观题的过渡。两份试卷的题型、题数、计分对比见下表:

全 国 卷					上 海 卷				
大题序	小题序	题 型	试题数	分值	大题序	小题序	题 序	试题数	分值
一	1—15	选择题	15	45	一	1—10	填空题	10	30
二	16—20	填空题	5	15	二	11—20	选择题	10	30
三	21—26	解答题	6	60	三	21—23	简答题(含作图题)	3	30
					四	24—27	计算或证明题	4	60
合计			26	120	合计			27	150

②各分科考查内容的比例相对稳定并与各分科所占的教学总课时的比例大体相当,下面是近几年高考数学卷各分科所占分值及占总分的比

例。

		代 数	三 角	立 几	解 几
全 国 卷	89 年	62 分 (51.6%)	18 分 (15%)	20 分 (16.7%)	20 分 (16.7%)
	90 年	58 分 (48.3%)	23 分 (19.2%)	17 分 (14.2%)	22 分 (18.3%)
	91 年	54 分 (45%)	20 分 (16.7%)	22 分 (18.3%)	24 分 (20%)
上 海 卷	88 年	62 分 (41.3%)	27 分 (18%)	27 分 (18%)	34 分 (22.7%)
	89 年	62 分 (41.3%)	27 分 (18%)	24 分 (16%)	37 分 (24.7%)
	90 年	59 分 (39.3%)	25 分 (16.7%)	28 分 (18.7%)	38 分 (25.3%)
	91 年	66 分 (44%)	20 分 (13.4%)	26 分 (17.3%)	38 分 (25.3%)

代数一般占 45% 左右,解几占 20%~25% 左右,立几、三角各占 17% 左右。

就考查的知识点来看,重点内容近几年也是稳定的。如代数中的集合概念,函数的图象与性质,充要条件,排列组合和二项式定理的应用,方程与不等式的字母讨论,复数等,解几中的直线方程,圆锥曲线,参数方程和极坐标方程,点的轨迹等;三角中三角函数的性质,三角公式的应用,反三角函数和三角方程等;立几中空间点、线、面的位置关系,特别是二面角的概念及计算,三垂线定理及其逆定理的应用,简单几何体的体积与侧面积的计算等,考试重点内容稳定,有利于教学秩序的正常化。

③ 试卷难度基本相对稳定。

全国卷 89 年、90 年、91 年的试题,总体难度基本稳定,保持在 0.5~0.6 之间,与考生的整体水平是相适应的。

上海卷在最近的几年中,试卷的难度也是基本稳定的。(见下表,表内数据均抽样统计)

	题号	一	二	三 (21~23)	四 (24)	五 (25)	六 (26)	七 (27)
88 年	得分率(%)	69.23	69.88	81.80	43.93	45.86	35.87	21.19
89 年	得分率(%)	70.20	67.93	75.50	57.85	44.53	30.48	15.23
90 年	得分率(%)	70.63	77.66	73.49	53.83	46.13	40.52	15.18

(2) 强调基础, 突出重点是近几年高考数学试卷的另一个特点。

近几年高考数学试卷注意全面考查基础知识, 考查知识点的覆盖率均超过 70%。这些基础知识都是以《大纲修订稿》或《大纲调整意见》和教材为依据, 有些题目就直接出自教材或根据教材稍加改造而成的。如 91 年全国卷的第 1 题: “已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 并且 α 是第二象限角, 那么 $\tan \alpha$ 的值等于 _____”, 这道题目是原封不动的出自高中代数(乙种本)上册, 第 97 页例 1:

“已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 并且 α 是第二象限的角, 求 α 的其它三角函数值。”又如 91

年全国卷第 16 题: “ $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2}$ 的值是 _____”, 这道题是高中代数(乙种本)下册, 第 162 页例 4 用另一种形式的表示, 例 4 题为: “如图, 已知平面内并列的三个相等的正

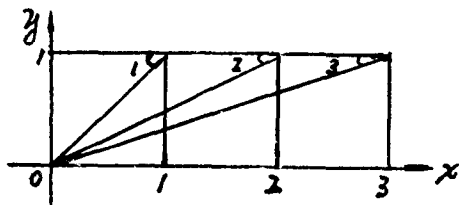
方形, 利用复数证明

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{\pi}{2}$$

考生如果注意到 $\angle 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\angle 2 = \arctg \frac{1}{2}, \angle 3 = \arctg$$

$\frac{1}{3}$, 那么所求结果不用计算



就能得出正确的结果。再如全国卷第 24 题: “根据函数单调性的定义, 证明函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。”这道题是高中代数(乙种本)上册第 42 页习题三的第 7 题: “证明函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数。”的引伸。其它一些题目也是在挖掘教材的基础上, 经过加工编制而成的。近年来对象递推数列和复数等容易膨胀延伸的内容, 也做到

了“回到教材去”。另一方面的试题不回避重点知识,重要知识几乎年年要考查。这些做法将会影响中学数学教学重视基础、重视教材、突出重点,对进一步贯彻落实教学大纲精神无疑将会起到积极的促进作用。

(3)注重考查数学能力与数学思想方法,这也是近几年高考数学卷的共同特点。

考查数学能力和数学思想方法而又不脱离基础知识,相反,通过挖掘基础知识的内在联系而萌发出能力与方法。例如 91 年全国卷第 16 题,就是通过反三角函数的意义,正切函数值的几何直观与复数运算有机结合起来,综合运用这些基础知识才得以解决,它又可以通过求正切函数的值,运用和角的正切公式来求得。又如 91 年上海卷的第 11 题,它是解不等式、解对数方程和集合知识的综合运用,后面几个大题目更是综合运用代数、几何、三角等的能力才能解决的。

下面这些数学思想和方法在试卷中也都很突出。

①数形结合的方法,91 年全国卷中至少有 10 个题目,上海卷中至少有 11 个题目涉及到数形结合的问题,例如上海卷第 9 题,由 $y = x^2 + 1$ 的图象顶点是 $(0, 1)$,关于 $x = 1$ 对称可得其对称点为 $(2, 1)$,开口方向与大小又完全一样,因此它的图象所对应的函数即 $y = (x - 2)^2 + 1 (x > 1)$,又如全国卷的第 5 题,只要画出 $y = \sin(2x + \frac{5\pi}{2}) = \cos 2x$ 的草图,很容易发现 $x = k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 都是对称轴,当 $k = -1$ 时即为选项 (A) $x = -\frac{\pi}{2}$ 。

②分类讨论的思想。这种思想方法的考查在近几年的高考试卷中尤其突出。91 年的全国卷和上海卷也都把其放在突出的位置,如全国卷的第 24 题证明函数的单调性,要分 $x_1 \cdot x_2 < 0$ 和 $x_1 \cdot x_2 > 0$ 两种情况证明 $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0$ 。第 25 题解对数不等式时,也要分 n 为奇数和偶数两种情况解不等式 $\frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a x > \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a (x^2 - a)$ 。又如上海卷的第 22 题直线与抛物线对称轴的夹角为 30° ,也要分两种情况来解,尤其是第 23 题解含有未知字母的绝对值不等式,可以说是为专门考查分类讨论思想而设计的。

③函数变换思想。函数的图象与性质,是 91 年考查的重点内容之一,在全国卷中有 6 个题目,上海卷中也有 5 个题目,考查几乎涉及到函数的所有性质。例如全国卷中第 25 题是利用函数性质解不等式,上海卷第 27

题是要构成一个新函数,然后讨论函数的定义域、单调性和最大值问题,函数是中学数学中的重要内容,也是高等数学中主要研究的对象,因此函数思想成为“热点”也完全是在情理之中。

还有其它一些数学基本思想和方法,如待定系数法、换元法、配方法、数学归纳法、反证法等等也是历年高考经常考查的内容。

(二)近年来会考试题评析

91年上海市普通高中会考试题是上海实行会考制度以来的第四年,会考试卷也愈显成熟,完全能体现水平考查的特点。

(1)试卷题目都源于教材,题目的叙述和要求基本与课本一致,而不是标新立异。

(2)起点低坡度缓。虽然数学会考题与数学高考题的题型要求完全一样,会考只比高考少了一个题目,但会考的起点比高考还要低,坡度还要平缓。如91年会考的填空题和选择题,大多以考查单一的知识点为主,解题只需一、二个步骤就能解决问题。

(3)能力要求层次清楚,第1—23题考查识记和理解水平,大部分题目是基础知识的直接再现,综合度要求不高,运算步骤也少。例如第7题只要

了解离心率 $e = \frac{c}{a}$,再根据图形就能得到 $e = \frac{\frac{1}{2}|F_1F_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{2}$,又如第13题

只要了解圆锥曲线统一方程 $\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$,由 e 的大小与曲线形状的关系,也马上可以得出结论,不需要化成直角坐标系后再判断形状,即使要运算的题目,也是简单运算,步骤少,数据简单,不会由于数据繁的原因造成错误,如第23题:“已知 $\alpha = |\sqrt{2} + i|$, $Z = \alpha + i$,求 Z^5 。”主要考查求复数的模,复数的代数式化为三角形式,和棣莫佛定理的运用。这里给出的数据很简单,化成三角形式后的辐角又是特殊角,所以只要掌握概念计算一般不会成为障碍。

第24—25题是属于第二层次的要求。它有一定的综合要求,运算步骤也要多一些,如第25题考查到点的坐标、定比分点公式、两条直线垂直的条件,解该题时在能力上还要有分类讨论的思想,要有观察图形变化的能

力,以及作图的能力。

第 26 题是第三层次要求,它要有较高的分析、推理和运算的能力才能完成。

从 91 年会考实践的结果看,会考的合格率和区分度都达到较理想的要求,说明 91 年会考试卷是一份成功的试卷。

二、会考试卷与高考试卷的比较

1、考查的性质不同。

会考属于水平考试,它的功能是鉴别学生对数学学科的学习是否已经达到大纲和现行教材规定的基本要求;鉴别学生在中学数学基础知识、基本技能、基本方法上是否已达到合格水平。因此会考应该有较高的合格率。

高考属于选拔性考试,其主要目的是为高等学校招生提供能区分各类人材的成绩分布,以便对考生德智体全面考核,择优录取。因此,高考试卷要有较强的区分度。

不管是会考试卷还是高考试卷,都有一个指导原则,即通过考试要有利于普通高中的数学教学改革,这是它们的共性,因此,高考虽然是选拔考,但不能为了追求区分度,而脱离目前的教学实际和学生实际,否则就会导致中学数学教学走向歧路。

2、试卷的容量不同。

数学的会考与高考试卷在题型上虽然一样,都分四大部分,即填空、选择、简答与综合题,但总的题量不同,会考是 26 题,高考是 27 题,分值也不同,会考满分为 100 分,上海高考满分为 150 分,另外题目的组织也不同,会考中考查单项性的题目多一些,而高考考查综合性的题目多一些。

3、试卷的深广度不同。

会考是水平考试,所以要求考查的面要广一些,考查的起点要低一些,而高考是在会考的基础上进行的选拔考试,它不以合格率为主要目标,所以高考的起点应比会考高一些。由于基本内容和重点部分两者基本一样,所以高考试题就必须在挖掘基本概念的深度和知识之间联系的综合度上下功夫,这样才能产生较好的区分度。

第二编 题型汇析

一、近年来高考试题题型分析

(一) 选择题

数学选择题是一种重要的命题形式,它以短小精悍,信息丰富,寓意深刻,形式新颖而著称。选择题所提供的答案有似是而非的错误答案,有似非而是的正确答案。数学选择题一般采用四个选择支,其中只有一个正确选择支。数学选择题的错误答案的似真性及正确答案的似伪性就形成了数学选择题的独特性质——数学选择题的迷惑性。因此数学选择题这种题型具有概念性强,灵活性大,知识覆盖面广的鲜明特征。这些特征有利于全面考查学生的“双基”的掌握状况及分析、判断能力、解决问题能力结构状况。由于选择题是一种客观题型,便于电脑阅卷评分、统计成绩,提高考核评审的效率。

目前,数学选择题已成为高考数学试卷中的重要题型之一(也是高中会考题卷中的重要题型之一)。一般在20多题的试卷中有10—15题。如全国高考数学试卷中有26题,其中选择题有15题,占57.7%;上海高考数学卷中有27题,其中选择题有10题,占37%。从选择题的占分比重看,全国高考数学卷满分120分,其中选择题45分,占37.5%;上海高考数学卷满分150分,其中选择题30分,占20%。由此可见,解好解对数学选择题在高考中有着极其重要的毋须回避的现实意义。

解好、解对数学选择题的关键,是掌握数学选择题的几种基本解法,并能根据不同的题目特点采用不同的解法,做到运用自如,取得大题量中省时省力的良好效果。

数学选择题的解法通常有:1. 直接法;2. 图解法;3. 筛选法;4. 特殊值法;5. 验证法;6. 分析综合法;7. 解法的“选择”与“综合”等等。

1. 直接法

这种解法是直接从题设的条件出发,根据有关的定义、定理、公式、法则,通过正确的运算或严密的推理得出正确的结果,从而选择正确答案。

例一 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列,且 $a_n > 0, a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 25$,那么 $a_3 + a_5$ 的值等于

(A)5 (B)10 (C)15 (D)20 [] (91年全国高考卷)

【检测目标】(1)灵活运用等比数列的性质、公式;(2)掌握完全平方公式。

【分析】本题要求的是 $a_3 + a_5$,而在条件 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 25$ 中,除了 a_3a_5 外还有 a_2a_4, a_4a_6 ,若能把 a_2a_4, a_4a_6 转化成 a_3, a_5 的表达式也许是解本题的钥匙。

【解】 $\because \{a_n\}$ 是等比数列, $\therefore a_2a_4 = a_3^2, a_4a_6 = a_5^2$ 。

$$\therefore a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = 25, \therefore a_3^2 + 2a_3a_5 + a_5^2 = 25,$$

即 $(a_3 + a_5)^2 = 25. \because a_n > 0, \therefore a_3 + a_5 > 0,$

$$\therefore a_3 + a_5 = 5 \quad \text{故应选择(A).}$$

【易错原因】学生可能一时不能立即想到 $a_2a_4 = a_3^2, a_4a_6 = a_5^2$ (等比数列 $\{a_n\}$ 有 $a_{i-1}a_{i+1} = a_i^2$),也有的学生会呆板地把 a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 都转化成 a_1 与 g (首项与公比)来解,增加了麻烦,容易出错。

例二 设直线 a 在平面 M 内,则平面 M 平行于平面 N 是直线 a 平行于平面 N 的

(A)充分条件但非必要条件;(B)必要条件但非充分条件;

(C)充分必要条件;(D)非充分条件也非必要条件。

(91年上海高考卷)

【检测目标】(1)理解充要条件的概念;(2)直线与平面平行、平面与平面平行关系的性质与判定。

【分析】本题的关键是对(A)、(B)、(C)、(D)四种选择支所反映的概念的理解。设事件 A 与事件 B 。 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,则 A 是 B 的“充分条件但非必要条件”; $B \Rightarrow A, A \Rightarrow B$,则 A 是 B 的“必要条件但非充分条件”; $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,则 A 是 B 的“充分必要条件”; $A \Rightarrow B, B \not\Rightarrow A$,则 A 是 B 的“非充分条件也非必要条件”。

【解】 $\because$ 直线 $a \subseteq$ 平面 M ,平面 $M \parallel$ 平面 $N \Rightarrow a \parallel$ 平面 N ;

反之直线 $a \parallel$ 平面 $N, a \subseteq$ 平面 $M \Rightarrow$ 平面 $M \parallel$ 平面 N 。

$\therefore a \subseteq$ 平面 M , 平面 $M \parallel$ 平面 N 是 $a \parallel$ 平面 N 的充分条件但非必要条件。故应选择(A)。

【易错原因】学生易错的原因有：(1)对什么是“充分条件”“必要条件”“非充分条件”“非必要条件”的概念不理解或不甚理解；(2)对上述的各种“条件”的符号模式未理解或混淆；(3)对直线平行平面、平面平行平面的性质与判定未掌握；(4)空间想象能力薄弱，头脑中缺乏直线与平面平行、平面与平面平行的“模型”。

【思考与训练】

(1)直接法是选择题中最常用、最基本的方法。它主要应用于需从已知条件出发，经过直接的计算或直接的推理而导出正确结论的那种类型的选择题，特征是运用综合法。

(2)“充要条件”是选择题中“热点”内容之一。

练习一

①点 $(-2, 3)$ 到直线 $3x - 4y = 2$ 的距离 $d =$

(A) $\frac{16}{5}$; (B) $\frac{18}{5}$; (C) 4; (D) 20. []

②设 $2^a = 3, 2^b = 6, 2^c = 12$, 则数列 a, b, c

(A) 是等差数列但不是等比数列; (B) 是等比数列但不是等差数列;

(C) 既是等差数列又是等比数列;

(D) 既不是等差数列又不是等比数列。 []

③从 4 个蔬菜品种选出 3 个，分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验，不同的种植方法有

(A) 4 种; (B) 12 种; (C) 24 种; (D) 72 种。 []

④直线 a 在平面 α 外，直线 b 在平面 α 内，则 $a \parallel \alpha$ 是 $a \parallel b$ 的

(A) 充分条件但非必要条件; (B) 必要条件但非充分条件;

(C) 充分必要条件; (D) 非充分也非必要条件。 []

⑤函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 R , “ $f(x), g(x)$ 都是奇函数”是“ $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积是偶函数”的

(A) 必要条件但非充分条件; (B) 充分条件但非必要条件;

(C)充分必要条件;(D)非充分条件也非必要条件。

[]

⑥设 Z_1, Z_2 为复数,那么 $Z_1^2 + Z_2^2 = 0$ 是 Z_1, Z_2 同时为零的

(A)充分不必要条件;(B)必要不充分条件;

(C)充分必要条件;(D)既不充分又不必要条件。

[]

2. 图解法

在解答某些代数(主要是函数、不等式等)、三角、解析几何的选择题时,根据所给条件作出图形、图象、曲线(有时作出它们的大致草图),然后依据它们的作法和有关的性质,经过必要计算或推理,选择正确的答案。这种解法就是图解法。

例一 圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有

(A)1个; (B)2个; (C)3个; (D)4个。 []

(91年全国高考卷)

【检测目标】(1)熟练地把圆的一般方程化为圆的标准方程,从而确定圆心坐标与半径;(2)点到直线的距离公式;(3)能用图形解决问题的能力。

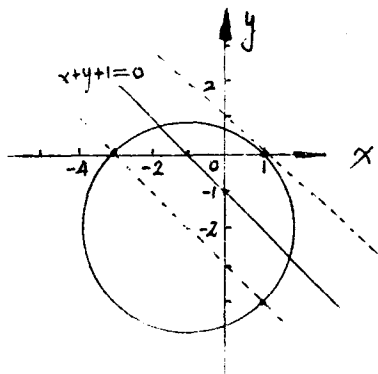
【分析】由于本题并没有要求求出圆到直线距离为 $\sqrt{2}$ 的点的坐标,而只要求求出满足此条件的点的个数,因此我们可用图解法,这样比较简便。为此,我们化圆的一般方程为标准方程后,在直角坐标平面上作出

圆和直线,然后观察圆上到直线距离为 $\sqrt{2}$ 的点的个数。

也可利用点到直线的距离公式,列出一个含未知数的等式,然后求出这方程的解,有几个解,就有几个点对应。

【解法一】圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 可化为 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$

在直角坐标系内作出圆 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$



及直线 $x+y+1=0$. (见上图)

我们通过观察,作出与直线 $x+y+1=0$ 平行且距离为 $\sqrt{2}$ 的两条直线与圆相交或相切的情况,可以得到满足条件的点有三个. 故应选择(C).

【解法二】设 (x_0, y_0) 为圆上的点, 则有

$$x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 + 4y_0 - 3 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \quad (2)$$

将②式两边平方,整理得 $x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 + 2y_0 - 3 + 2x_0y_0 = 0$ ③

③-①,得 $2x_0y_0 - 2y_0 = 0$, $\therefore y_0 = 0, x_0 = 1$.

将 $y_0 = 0$ 代入①,得 $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$, 得 $x_0 = 1$, 或 $x_0 = -3$.

将 $x_0 = 1$ 代入①,得 $y_0^2 + 4y_0 = 0$, 得 $y_0 = 0$, 或 $y_0 = -4$.

综上所述, (x_0, y_0) 有三点: $(1, 0), (1, -4), (-3, 0)$.

故应选(C).

【易错原因】(1)配方错误是常见错误之一,造成圆心坐标及半径的错误,它直接关系到圆的图形的正确性,以至影响到直线与圆公共点的个数及圆上到直接距离为 $\sqrt{2}$ 的点的个数.(2)思考不周到.有的学生往往只从直线的一侧来寻找圆上到直线距离为 $\sqrt{2}$ 的点,不是从直线的两侧来找.(3)草图画得不太准确,造成错误.这是解法一中易犯的错误.(4)三项和的完全平方公式记错或算错,造成方程解错,甚至解不出.(5)解方程过程中的运算错误.

例二 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x+1\}$, 那么 $\overline{M} \cap N$ 等于

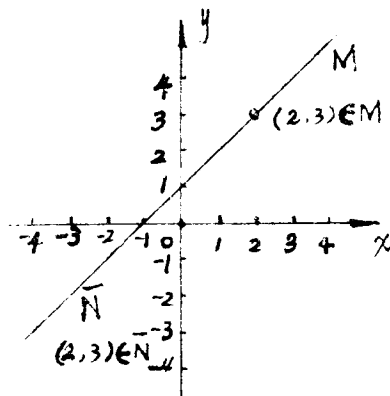
(A) $\emptyset$; (B) $\{(2, 3)\}$; (C) $(2, 3)$;

(D) $\{(x, y) | y = x+1\}$ [] (90年全国高考卷)

【检测目标】(1)理解集合、元素、交集、补集、全集的概念;(2)掌握交集、补集的运算;(3)把实数对(坐标)集合转化为平面上点集的能力.

【分析】把 (x, y) 看作直角坐标平面中的点,全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$ 就是平面上点的全体.然后在平面上作出集合 M, N 所表示的点集或它们的补集 $\overline{M}, \overline{N}$ 所表示的点集,再观察它们的交集.

也可把 (x, y) 仅看作实数对或坐标,然后仅从数、式的观点处理 $M, \bar{M}, N, \bar{N}$ 及 $M \cap N$ 。



【解法一】在等式 $\frac{y-3}{x-2}=1$ 中, $x \neq 2; y \neq 3$. ($y=3$ 时分子为零,分式值为零)所以等式 $\frac{y-3}{x-2}=1 \Leftrightarrow y-3=x-2; (x \neq 2, y \neq 3) \Leftrightarrow y=x+1 (x \neq 2, y \neq 3)$. 即 $M = \{(x, y) | y=x+1, x \neq 2, y \neq 3\}$. 而 $N = \{(x, y) | y=x+1\}$.

作出图形:集合 $\bar{N}$ 即直线 $y=x+1$;集合 M 即直线 $y=x+1$,但 $(2, 3)$ 除外. 可知集合 $\bar{M}$ 即点

$(2, 3)$ 及直线 $y=x+1$ 外的一切点,因此,

$M \cap N$ 中元素就是点 $(2, 3)$ 即 $M \cap N = \{(2, 3)\}$,故应选(B).

【解法二】同解法一,可得 $M = \{(x, y) | y=x+1, x \neq 2, y \neq 3\}$, $\bar{M} = \{(x, y) | y \neq x+1, \text{或 } x=2, y=3\}$ 即 $\bar{M} = \{(x, y) | y \neq x+1\} \cup \{(2, 3)\}$, $N = \{(x, y) | y=x+1\}$.

$\therefore \bar{M} \cap N = \{(2, 3)\}$,故应选(B).

【解法三】同解法一,可得 $M = \{(x, y) | y=x+1, x \neq 2, y \neq 3\}$.

$$\therefore M \cup N = \{(x, y) | y=x+1,$$

$$x \neq 2, y \neq 3\}$$

$$\cup \{(x, y) | y \neq x+1\}$$

$$= \{(x, y) | x, y \in R, \text{但 } x \neq 2, y \neq 3\}$$

$$\therefore \bar{M} \cap N = \overline{M \cup N} = \{(x, y) | x, y \in R, \text{但 } x \neq 2, y \neq 3\}$$

$$= \{(2, 3)\} \text{ 故应选(B).}$$

【易错原因】(1)概念理解上的错误,如对元素与集合的区别与联系上,没有深刻理解两个集合的运算结果应是集合,而不是元素.本题的结果应是一个集合,是一个单元素的集合,故答案应该是 $\{(2, 3)\}$,而 $(2, 3)$ 只是表示 $\{(x, y) | x, y \in R\}$ 中的一个元素.(2)交集、补集运算上的错误如 $M =$