北京师范大学

科学論文选集

（自然科学）

北京师范大学

科学論文选集

（自然科学）

1959年10月1日

北京师范大学
科学論文选集
（自然科学）

編輯者：北京师范大学学报編輯委員会
出版者：北京师范大学
印刷者：北京崇文印刷厂

1959年10月1日出版　1960年3月第二次印刷
定价：白报紙本：0.80元　道林紙本：1.20元

編 者 的 話

中华人民共和国成立以后，尤其是从去年以来，北京师范大学的科学研究工作有了极大的发展。在全国人民热烈庆祝建国十周年的时候，我們从师生已发表的科学論文中选出若干篇編輯成“科学論文选集”三册，計社会科学两册，自然科学一册，向国庆献礼。选入本集的这些文章有的是目前在学术界頗有爭論的問題，有的作者还在进一步探索；輯一家之言或一个阶段的研究成果广为交流，也許会有益于学术发展，会鼓舞我們更加前进！由于水平和时間所限，編选和校印工作都可能存在不少缺点，希望讀者同志們指正。

北京师范大学学报編輯委員会

1959年9月28日

北京师范大学

科学論文选集

（自然科学）

目录

周期可微函数的三角多项式最佳近迫

数学系　　孙禾生

連續的周期函数 f (x) 属于类 $W^{(r)}(\alpha)$，当且仅当 f (x) 表示为下列形式时

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)dt \tag{1}$$

此处

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right),\quad r>0,\ 0\leqslant\alpha<2,$$ （由于周期期性，限制 $0\leqslant\alpha<2$ 并不妨碍一般性），而 $\varphi(t)$ 是滿足 $\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0$, $\underset{0\leqslant t\leqslant 2\pi}{\text{ess sup}}|\varphi(t)|\leqslant 1$ 的可測函数。

（以 $T_{n-1}(x)$ 表示次数不高于n－1的三角多項式，$E_n(f)_c=\min\limits_{T_{n-1}}\max\limits_{x}|f(x)-T_{n-1}(x)|$ 表示函数 $f(x)$ 以不高于n－1次的三角多項式近迫时之最佳近迫（切貝含夫意义下的）。关于确定下列量

$$\sup E_n(f)_c \qquad f\in W^{(r)}(\alpha) \tag{2}$$

的确值的問題，自1935年以来，在对r，α的各种不同的限制下曾为 J. Favard [1,2]，Н. И. Ахцезер 和 М. Г. Крейн[3]，B. Nagy[4]，С. М. Никольский[5]，В. К Дзядык[6] 以及 С. Б. Стечкин等人研究过，然而迄今为止，一个最重要的情形，即 r>1 （r 取任何实数），并沒有得到解决，当 r≥6时，我們証明了下列定理成立：

定理一　設r≥6，α是任意实数，并且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)dt$$

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

$\varphi(t)$ 是适合条件 $\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0$，$\underset{0\leqslant t\leqslant 2\pi}{\text{ess sup}}|\varphi(t)|\leqslant 1$ 的可測函数，則

$$\sup E_n(f)_c=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int_0^{2\pi}|K(t)-T_{n-1}(t)|dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad n=1,2,3\cdots\cdots \tag{3}$$

这里的β，适合条件$0\leqslant\beta<1$，$H(\beta\pi)=0$，而

$$H(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)t-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}}。\tag{4}$$

我們指出定理一的两个重要推論。

若$\alpha=r$，則$W^{(r)}(r)$表示一个函数类，其中任何一个函数$f(x)$具有在Weyl意义下的r級导数$f^{(r)}(x)$，它适合$\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f^{(r)}(x)|\leqslant 1$，由此，我們得

推論一　設$r\geqslant 6$，而$f(x)\in W^{(r)}$，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_r(t-x)f^{(r)}(t)dt,\tag{5}$$

此处

$$K_r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi r}{2}\right),\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f^{(r)}(x)|\leqslant 1。$$

則

$$\sup_{f\in W^{(r)}(r)}E_n(f)_c=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int_0^{2\pi}|K_r(t)-T_{n-1}(t)|dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{n^{r}}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots\tag{6}$$

$0\leqslant\beta<1$，而$\beta\pi$适合下列条件，

$$H_r(\beta\pi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}}=0.\tag{7}$$

其次，如果$\alpha=(r+1)$，則$W^{(r)}(r+1)$代表滿足下列条件之函数类：$f(x)\in W^{(r)}$当且仅当$f(x)$的共軛函数$\tilde{f}(x)$具有Weyl意义下的r級导数$\tilde{f}^{(r)}(x)$，它适合于

$\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|\tilde{f}^{(r)}(x)|\leqslant 1$，

推論二　設$r\geqslant 6$，而$f(x)\in\tilde{W}^{(r)}$，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{K}_r(t-x)\tilde{f}^{(r)}(t)dt,\tag{8}$$

此处

$$\tilde{K}_r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\sin\left(kt+\frac{\pi r}{2}\right),$$

$\widetilde{f}^{(r)}(t)$是$\widetilde{f}(t)$在 Weyl 意义下的 r 級导数，滿足条件 $\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq 2\pi}|\widetilde{f}^{(r)}(t)|\leq 1$，

則：

$$\sup_{f\in\widetilde{W}^{(r)}} E_n(f)_c=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int_0^{2\pi}|\widetilde{K}_r(t)-T_{n-1}(t)|\,dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad n=1,2,\cdots\cdots \tag{9}$$

$0\leq\widetilde{\beta}<1$，$\widetilde{\beta}\pi$是方程

$$\widetilde{H}_r(\widetilde{\beta}\pi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}=0 \text{ 的根.} \tag{10}$$

定理二 設以 2π 为周期的連續函数 $f(x)$ 具有 r 級 Weyl 意义下的連續导函数 $f^{(r)}(x)$ $(r\geq 6)$；那么

$$E_n(f)_c\leq\frac{4}{\pi}\frac{K_r}{n_r}E_n(f^{(r)})_c,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{11}$$

此处

$$K_r=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad 0\leq\beta<1,\ H_r(\beta\pi)=0.$$

如果 $f(x)$的共軛函数$\widetilde{f}(x)$具有 r 級Weyl意义下的連續导函数$\widetilde{f}^{(r)}(x)$，那么

$$E_n(f)_c\leq\frac{4}{\pi}\frac{\widetilde{K}_r}{n_r}E_n(\widetilde{f}^{(r)})_c,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{12}$$

此处

$$\widetilde{K}_r=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad 0\leq\widetilde{\beta}<1,\quad \widetilde{H}_r(\widetilde{\beta}\pi)=0,$$

不等式(11)，(12)右端的常数不能再改进。

（关于 r 取自然数的情形，見[8]）。

現在对定理一的証明作一簡要的說明。

1°利用[8]中的一般公式，对于任何 $r>1$，我們立即可以得到

$$\sup_{f\in W^{(r)}(x)}E_n(f)_c\geq\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n_r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|. \tag{13}$$

2°为了得到(2)的从上面的估計，利用 B.Nagy 的插值公式[4]，取函数

$$H(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)t-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}},\tag{14}$$

$r>1$，$0\leqslant\alpha<2$．甚易証明$\operatorname{sgn}H(t)=\varepsilon_{0}\operatorname{sgn}\sin(t-\beta\pi)$，这里$\varepsilon_{0}=\pm1$，而$0\leqslant\beta<1$，$H(\beta\pi)=0$（$\beta$与r，$\alpha$有关）。

在〔$0,2\pi$〕上取2n个点

$$\frac{\beta\pi}{n},\ \left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\right)\pi,\ \cdots,\ \left(\frac{\beta}{n}+\frac{2n-1}{n}\right)\pi.\tag{15}$$

可以証明(9)，存在次数不高于$n-1$的三角多项式$U_{n-1}^{*}(t)$，滿足

$$K\left[\left(\frac{\beta}{n}+\frac{i-1}{n}\right)\pi\right]-U_{n-1}^{*}\left[\left(\frac{\beta}{n}+\frac{i-1}{n}\right)\pi\right]=0,\ i=1,2,\cdots,2n.$$

由此可以得到

$K(t)-U_{n-1}^{*}(t)=-2\sin(nt-\beta\pi)W_{n}(t)$，此处的

$$\begin{aligned}W_{n}(t)=&\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}n^{r}}+\\&+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^{r}}\cos jt+\\&+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^{r}}\sin jt.\end{aligned}\tag{16}$$

3°問題归結为証明$\{W_{n}(t)\}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$这一串函数在間隔$0\leqslant t\leqslant2\pi$上都沒有零点，我們深信，这一事实对于任何$r>1$都会成立，但是我們只証明了$r\geqslant6$的情形，至于$1<r<6$的情形，間題还未解决。

在〔$0,2\pi$〕的中央部份，有

引理一 对于任何$r\geqslant5$，$0\leqslant\alpha<2$，有正数$n_{0}(r,\alpha)>0$存在，使当$n>n_{0}(r,\alpha)$时

$$\varepsilon W_{n}(t)>0\text{ 在 }\frac{3r}{n}\leqslant t\leqslant2\pi-\frac{3r}{n}\tag{17}$$

上成立，$\varepsilon=\operatorname{sgn}\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi$.

为了討論$W_{n}(t)$在〔$0,2\pi$〕两端点的邻近的情况，我們需要下面两个引理，

引理二 若$r>2$，$|k|\leqslant K_{0}$，K_{0}是任何取定了的正数，则

$$\lim_{n\to\infty}N^{r-1}W_{n}\left(\frac{k}{n}\right)=W(k)=\int_{0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+kn\right]}{(2\nu+1+n)^{r}}dn\tag{18}$$

在$|k|\leqslant K_{0}$上均匀地成立。

引理三 若 $r\geqslant6$，則 $\varepsilon W(k)>0$于 $|k|\leqslant3r$ 时成立。

由此，立即得到，对于任何 $r\geqslant6$，$0\leqslant\alpha<2$，存在数 $n_1(r,\alpha)>0$，使于 $n>n_1(r,\alpha)$ 时，$\varepsilon W_n(t)>0$ 在 $0\leqslant t\leqslant2\pi$ 上成立。

下面一个引理的一个特殊情形最初由 В.К.Дзядык 所証明[6]，利用这一引理，我們得到 $\varepsilon W_n(t)>0$ 对一切成立。

引理四 設 $r>1$，$0\leqslant\alpha<2$，N,m 是任何自然数，則

$$W_m(t)=\left(2N\right)^{r-1}\sum_{\nu=0}^{2N-1}W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)$$

在 $0\leqslant t\leqslant2\pi$ 上处处成立。

上述引理以及定理一、二的証明見〔10〕，此处不再詳細叙述。

参 考 文 献

〔1〕J. Favard, Sur L'approximation des fouctions periodiques per des polynomes trigonometriques, compt. Rend. Acad. Sci. (paris) 203, (1936), 1122—1124.

〔2〕J. Favard, Sur les meilleurs procedes d'approximation des certains classes de fonctions per des polynomes trigonometriques, Bull· de Sci Math. I. (1937), 209—2224.

〔3〕Н.И.Ахиезер и М.Г.Крейн, О Наилучшем приближении тригонометрически ми полиномами дифференцируемых функций, ДАН 15 (1937), 107—112.

〔4〕B. Nagy, Uber gewisse extremafragen dei tranformeirten trigonometrischen entwicklungen, Berichte, Leipzig 90 (1938), 103—134.

〔5〕С. М. Накольский, 函数之三角多項式平均近迫, Изв. АН. СССР. 10 (1946).

〔6〕В. К. Дзядык, 論具有界的 S 級(0<S<1)导函数的周期函数类的最佳近迫, Изв. АН СССР 14 (1953), 115—162.

〔7〕С. Б. Стечкин, 論某些周期函数类之三角多項式最佳近迫, Изв. АН СССР 20(1956) 643—648.

〔8〕Сунь, Юн-шен, О наилучшем приближений функций, представимых в виде свертки, ДАН СССР 118, №2 (1958).

〔9〕М. Г. Крейн, 关于周期函数的最佳近迫理論, ДАН СССР, 18 (1938).

〔10〕Сунь юн-шен, О наилучшем приближднии дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, Изв. АН СССР, 23, №1, (1959).

〔11〕И. П. Натансон, 函数构造理論, (119頁).

（原载"北京师范大学学报"，自然科学版，1959年第1期。）

周期可微函数的三角多項式最佳近迫(續)

数学系　孙永生

I．在[1,2]中、我們研究了屬于类$W^{(r)}(\alpha)(r>0,-\infty<\alpha<\infty)$的周期連續函数用次数不高于$n-1$的三角多項式（$n\geqslant 1$）近迫时最佳近迫的上确界（对类$W^{(r)}(\alpha)$而言）的确定問題，在那里証明了：

定理　設$r\geqslant 6$，α是任意实数，并且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)dt, \tag{1.1}$$

此处

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{1.2}$$

而$\varphi(t)$是适合条件$\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0$，ess sup $|\varphi(t)|\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$的可测函数，

則

$$\sup E_n(f)_c=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int_0^{2\pi}|K(t)-T_{n-1}(t)|dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{1}{\pi^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\quad n=1,2,3\cdots \tag{1.3}$$

这里$0\leqslant\beta<1$，并且$\beta\pi$是下面方程的根：

$$H(\beta\pi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}=0. \tag{1.4}$$

我們在[2]中指出，証明这一定理的关鍵在于研究函数串$\{W_n(t)\}$（見[1,2]）在閉区間$[0,2\pi]$上的符号，在研究函数$W_n(t)$在$[0,2\pi]$两端点邻近的符号时遇到很大困难，为了克服这一困难，在$r>2$的条件下，我們引入了下列函数：

$$W(k)=\int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}du, \tag{1.5}$$

并且証明了在$r\geqslant 6$时，$W(k)$在$|k|\leqslant 3r$这一間隔上沒有零点，这一事实是上述定理証明的基础。

在这篇短文中，我們証明于 $r>2$ 时函数 $W(k)$ 在整个实軸上沒有零点，根据这一事实立刻可以証明上述定理在 $r>2$ 的条件下成立，此外，对于一个十分重要的特殊情形，即 $\alpha=-r$ 的情形（此时 $f(x)$ 具有 r 級的在 Weyl 意义下的导函数 $f^{(r)}(x)$，并且 $\operatorname{ess\,sup}|f^{(r)}(x)|\leqslant 1$），我們証明

定理 設 $f(x)\in W^{(r)}$，亦即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_r(t-x)f^{(r)}(t)\,dt, \tag{1.6}$$

这里

$$K_r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt+\frac{\pi r}{2}\right),\quad r\geqslant 1, \tag{1.7}$$

而 $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|f^{(r)}(t)|\leqslant 1$，則

$$\sup_{f\in W^{(r)}}E_n(f)_c=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int_0^{2\pi}\left|K_r(t)-T_{n-1}(t)\right|dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|,\qquad n=1,2,\cdots\cdots \tag{1.8}$$

此处 $0\leqslant\beta<1$， 而 $\beta\pi$ 是下列方程的根：

$$H_r(\beta\pi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}=0. \tag{1.9}$$

在上面两个定理的証明中，我們将完全引用作者在[1]中所用过的各种符号和定义，为了节省篇幅起見，此处不再加解释。另外，此处还需要特别指出的是，工作[1]中§§3、4两节的結果，虽然是在 $r>2$ 的限制下得出的，事实上，完全可以用同法在 $r>1$ 的限制得到，一点不发生特殊的困难，（見[3]）在本文中，以下将在 $1<r$ 的条件下直接引用这些結果。

Ⅱ. 几个引理

令

$$W_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r n^r}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}\cos jt+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}\sin jt. \tag{2.1}$$

$r>1$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

（关于級数的收斂，見[1]，第77頁），

引理一. 設 $r>1$，$0\leqslant\alpha<2$ **，并且

$$W(k)=\int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\beta\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du,\tag{2.2}$$

此处 $0\leqslant\beta<1$，$\beta\pi$ 是下列方程的根：

$$H(\beta\pi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}=0.$$

K_0 是任意的正数，則当 $n\to\infty$ 时，函数串

$\left\{n^{r-1}W_n\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$ 在間隔 $|k|\leqslant K_0$ 上均匀地收斂于 $W(k)$。

証明 首先注意

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\right|,\qquad\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\right|$$

是 u 的单調减函数 $(u\geqslant 0)$。設 $|k|\leqslant K_0$. 我們有

$$n^{r-1}W_n\left(\frac{k}{n}\right)-W(k)=$$

$$=n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-W(k)+$$

$$+n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}+\frac{n^{r-1}}{2}d_0^{(n)},$$

此处 N 是任意自然数，而

$$d_0^{(n)}=\frac{1}{n^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}.$$

注意，[4] 当 $0\leqslant\beta<1$ 时，

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\geqslant 0,$$

而

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\begin{cases}\geqslant 0, & \text{当 } 0\leqslant\beta\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时},\\ <0, & \text{当 } \frac{1}{2}<\beta<1\text{ 时},\end{cases}$$

** 由于周期性，$0\leqslant\alpha<2$ 不妨碍一般性。

对于一切自然数 n，j 成立，所以

$$\left|\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\cos k\left(\frac{j}{n}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|\leqslant\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}.$$

应用 $Abel$ 变换，得（只討論 $\beta\neq 0$ 的情形*）

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{\sin\beta\pi}\left(\Delta\nu\frac{1}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r}{\sin\beta\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^{r+1}}.$$

所以

$$\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\leqslant\frac{r}{\sin\beta\pi}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^{r+1}}$$

$$=O\left(\frac{1}{n^r(1+N)^{r-1}}\right). \tag{2.3}$$

又

$$\left|\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\cos k\left(\frac{j}{n}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|\leqslant\left|\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}=\frac{1}{2\sin\beta\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sin2(\nu+1)\beta\pi\left(\Delta\nu\frac{1}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right)=$$

$$\frac{r}{2\sin\beta\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin2(\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^{r+1}}+O\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{[(2\nu+1)n+j]^{r+2}}\right).$$

由此得

$$\left|\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|+O\left(\frac{1}{n^r(1+N)^{r-1}}\right). \tag{2.4}$$

故由（2，3），（2，4）得

$$n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\cos k\left(\frac{j}{n}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=O\left(\frac{1}{n(1+N)^{r-1}}\right) \tag{2.5}$$

同理可証

$$n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sin k\left(\frac{j}{n}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=O\left(\frac{1}{n(1+N)^{r-1}}\right). \tag{2.6}$$

至此，我們得到

$$n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(\frac{j}{n})]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=O\left(\frac{1}{n(1+N)^{r-1}}\right). \tag{2.7}$$

---

* 当 α 不取整数时，总有，$\beta\neq 0$，但 α 取整数的情形早已解决 [1]。

并且所得到的估計对于 k 是均匀的。因此，对于給定的正数$\delta>0$，可以选择相当大的正数N_0，n_0，于$N_0>N_0$，$n>N_0$时，有

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(\frac{j}{n})]}{[(2\nu+1)n+j]^r}+\frac{n^{r-1}d_0^{(n)}}{2}\right|<\frac{\delta}{2} \tag{2.8}$$

对于 k 均匀地成立。

另一方面，有

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin[2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(\frac{j}{n})]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-W(k)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_N^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku]}{[(2\nu+1)+u]^r}du\right|+$$

$$+\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(\frac{j}{n})]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-\right.$$

$$\left.-\int_0^N\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku]}{(2\nu+1+u)^r}du\right|.$$

积分

$$\int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}du,\quad \int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}du$$

存在，并且有

$$\left|\int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\cos ku\,du\right|\leqslant\int_0^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}du$$

等等，所以，对于$\delta>0$，，我們可以选择一个$N>N_0$使

$$\left|\int_N^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du\right|<\frac{\delta}{4} \tag{2.9}$$

对 k 均匀地成立，固定这个N，既然$|k|\leqslant K_0$，則有界变差函数（对自变量 u）

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi u}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}$$

在区間 $0\leqslant u\leqslant N$ 上的全变量当 $|k|\leqslant K_0$ 时均匀有界，即是說，存在一个正数 $C(K_0,N)$，于 $|k|\leqslant K_0$ 时，有

$$\bigvee_0^N\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\right\}\leqslant C(K_0,N)<\infty.$$

此时，根据 Polya 与 Szegö 定理[11]，得

$$\left|n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)u+j]^r}-\int_0^N\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du\right|\leqslant\frac{C(K_0,K)}{n}. \tag{2.10}$$

故綜合（2.8），（2.9），（2.10），得到对于 $\delta>0$，有适当大的正数 n_1，于 $n>n_1$ 时，有

$$\left|n^{r-1}W_n\left(\frac{k}{n}\right)-W(k)\right|<\delta$$

在 $|k|\leqslant K_0$ 上均匀成立（n_1 仅与 K_0,α,r 有关）。

至于 $\beta=0$ 的时候，（此时相应地有 $\alpha=1$）引理仍然成立，不过由于这一情形問題早已解决[7]，所以我們不再加以討論。

引理二 設 $r>1$，$0\leqslant\alpha<2$，則

1° 若 $k>0$，則

$$W(k)=k^{r-1}\int_0^{2\pi}\widetilde{H}_{r-1}(\beta\pi+u)\Phi(u)du, \tag{2.11}$$

2° 若 $k<0$，則

$$W(k)=|k|^{r-1}\int_0^{2\pi}\widetilde{H}_{r-1}(\beta\pi-u)\Phi(u)du, \tag{2,12}$$

此处

$$\widetilde{H}_{r-1}(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)u-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-1}}, \tag{2,13}$$

$$\Phi(u)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(u+2s\pi+|k|)^r}, \tag{2.14}$$

証明：

$$W(k)=\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=$$

$$=\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^{N}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du+$$

$$+\int_0^\infty \sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{N}\int_0^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du+$$

$$+\int_0^\infty \sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du.$$

注意，应用 Abel 变换于积分号下的級数，容易証明

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \sum_{N+1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=0$$

对于 k 均匀地成立，所以得到

$$W(k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(2\nu+1)u\right]}{(2\nu+1)^{r-1}(1+u)^r}du=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k(2\nu+1)u\right]}{(1+u)^r}du.$$

故若 $k>0$，则

$$W(k)=k^{r-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)(\beta\pi+u)-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(u+k)^r}du=$$

$$=k^{r-1}\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)(\beta\pi+u)-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-1}}\cdot\frac{1}{(u+k)^r}du.$$