运筹学教程

邱菀华　冯允成　魏法杰　周　泓　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

运筹学教程

邱菀华　冯允成　魏法杰　周　泓　编著

机械工业出版社

本书主要介绍运筹学的基本概念、数学规划、图论及网络分析、决策分析和随机运筹模型等。它可作为管理科学与工程、技术经济、项目管理和管理信息系统等专业大学生相关课程的教材，也可作为广大科技工作者、企业领导和管理人员、政府机关干部的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学教程/邱菀华等编著．—北京：机械工业出版社，2004.5
ISBN 7-111-14226-8

Ⅰ.运… Ⅱ.邱… Ⅲ.运筹学－高等学校－教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 023067 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：周　娟　版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
封面设计：姚　毅　责任印制：李　妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5 · 12.125 印张 · 469 千字
定价：32.00 元

前　言

运筹学是近半个世纪以来发展起来的一门新兴学科，它在生产管理、工程技术管理、经济以及社会科学管理中都有着广泛的应用，随着我国市场经济体系的建立，管理将越来越成为国力强盛、企业生存的关键所在。有效的管理必须建立在科学决策的基础上，运筹学正是一门这样的学科，它为人们提供了一系列数学方法，管理人员可以利用这些方法在企业组织管理中制定目标选优的最佳方案，从而为他们做出最终决策提供科学依据。

本书的主要特点在于：对企业组织管理进行定量研究；数学模型与案例并重。注重案例分析，力求通过理论与案例的结合使读者学会对于实际问题的分析、研究和建立数学模型，掌握解决问题所需要的数学概念和解题技巧。参加编写本书的人员都有多年的教学经验，都是在本领域的知名教授，目前正在从事运筹学的前沿工作，了解学生学习的特点和需求，在本书内容安排上前后衔接紧密，文字叙述语言简练，深入浅出，通俗易懂。

油印版不计算在内，本书的正式付梓大约在1985年间。也就是说，本书经由航空部教材（1979年）、国防工业出版社、北京航空航天大学出版社，到今天的机械工业出版社出版，写书的教授传带了三代人，大改了三次，学生用了近20年。这对一部书来说，实可谓生命力旺盛了。

我的导师，已故著名学者顾昌耀教授是前三版教材的主编和作者。据不完全统计，写过本书的还有王振烈、刘龄德、杜端甫、杨华东、李宏余和石永恒等同志。我们首先向他们表示最崇高的敬意和诚挚的感谢。

本书共20章，由邱菀华担任主编，第1～5章和14～18章由邱菀华编写；第6～10章由魏法杰编写；第11～13章由周泓编写；第19～20章由冯允成编写。全书由邱菀华教授统筹和删减，刘美芳副教授为本书的付梓和文字润色付出了许多艰辛的劳动。

还要衷心感谢我们参考和引用过的文献的著作者和所有版本的读者，并期盼着更多的批评和指教。

祝读书愉快。

邱菀华

于北航紫远斋

目　录

第 1 部分　运筹学导论

第 1 章　运筹学简史

“运筹学”是运用科学方法，求解国防、工农业、商业、政府和交通等部门中，诸如人力、财力、物资和生产等的最佳配置、安排、规划和管理问题。我国大陆的学者，根据《史纪．高祖本纪》论张良的名言：“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，将“Operational Research”翻译成“运筹学”。它比港台等地区的译名“操作研究”要高明得多。

最早将运筹学介绍到中国的人是年方 23 岁的钱昌祚。当时他已获美国麻省理工学院的机械工程学士和航空工程硕士学位，于 1924 年回国，不久便成为清华大学教授。他的“军事集中之算学解说”一文，刊登于《科学》月刊 1925 年的第 10 卷第 12 期上。该文从用微分方法求解作战双方的死亡率入手，介绍了数学方法用于作战、射击得出的一系列奇妙的结果，并以古今中外的战例作验证。最后认为：“以上各例，皆足证明军事家知军力集中之利益。兹篇依算学解释其理，更可明显也。各行各业的管理者，难道不能从这里悟出集中人力、财力、物力的道理吗?”

钱昌祚教授不愧为中国军事运筹学的先驱者。

“Operational Research”诞生于军事作战研究。真正成功地运用现代数学方法于作战的当属第一次世界大战期间，用古典概率计算炮弹的命中率——兰彻斯特（F.W.Lanchester，1916 年）战斗动态理论。

1938 年，英国空军在一次空防大演习中发现，由其空军的飞机定位控制系统和雷达站发送来的信息常常是相互矛盾的，需要作关联、协调处理，以改进作战效能。为此，英国空军成立了作战研究运筹学小组，从事警报和控制系统的研究。在 1939 年和 1940 年，这个小组的任务扩大到包含防卫战斗机的布置，并对某些未来的战斗结果进行预测，以供决策之用。运筹学工作者在第二次世界大战中研究并解决了许多战争的课题。例如，通过适当配备航舰队减少了船只受到潜艇攻击的损失；通过改进深水炸弹投放的深度，使德国潜艇的死亡率提高；以及根据飞机出动架次作出维修安排，提高了飞机的作战效率等等。在战争结束时，估计英国、美国和加拿大等三国的军队中，运筹学工作者已超过

700 人。战后，一些原在军队从事运筹学的工作者，在英国成立了一个民间组织“运筹学俱乐部”，定期讨论如何将运筹学转入民用工业，并取得了一些进展。第一份运筹学杂志和英国的运筹学会分别于 1950 年和 1953 年出现了。世界上第一个运筹学会“美国运筹学会”于 1952 年成立。1959 年成立了国际运筹学会联盟，到 1986 年已有 35 个会员国和 6 个兄弟学会，会员 3 万余人，大多数会员国都办有自己的杂志。中国的运筹学会“中国数学会运筹学会”于 1980 年成立，于 1982 年加入国际运筹学会联盟并创刊《运筹学杂志》。

1939 年前苏联学者康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时，提出了准线性规划模型，同时给出了“解乘数法”。1947 年，美国工程师丹捷格(G.B.Dantzig)正式提出“线性规划”这个名词，发明了求解线性规划的单纯形算法，成为运筹学的一大重要突破，并在有了电子计算机后，使该法的实际应用成为可能。1984 年美籍印度人 Karmarkar 提出了一个新的多项式算法求解线性规划模型，是快速计算大型线性规划问题的一种方法。Dantziq 教授对它有如下评论：“我们有了一个来自实践的理论。毫无疑问，这属运筹学的非凡成就之一，尽管它尚存不足之处。”

在 20 世纪 50 年代，钱学森、许国志等教授将运筹学引入我国。华罗庚教授带领了一大批数学家深入实际，取得统筹法一系列成果，使我国运筹学研究上了新台阶。

第 2 章　运筹学的主要研究内容

从目前发展情况来看，运筹学的主要研究内容可概括为以下几个分支：

1. 规划论

规划论是运筹学的一个主要分支。它主要研究在满足一定的约束条件下，按一个或若干个衡量指标（也称指标函数）来寻求最优方案的问题。如果目标函数和描述约束条件的数学方程式都是线性的，则称为“线性规划”；否则称为“非线性规划”。如果所考虑的规划问题与时间或决策阶段有关，则称为“动态规划”问题。

2. 排队论

排队论是一种用来研究公用服务系统工作过程的数学理论和方法。在这种系统中，服务对象的到达过程和服务过程一般都是随机性的，是一种随机聚散过程。它通过对随机服务对象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而提高服务系统的工作能力和工作效率。

3. 决策论

决策论是运筹学最新发展的一个分支，广泛应用于经营管理工作中。它根据系统的状态信息、可能选取的策略以及采取这些策略对系统状态所产生的后果进行综合研究，以便按照某种衡量准则选择一组最优策略。

4. 图论及网络分析

图论是从构成“图”的基本要素出发，研究有向图或无向图在机构上的基本特征，并对有“图论”要素组成的网络，进行优化计算，以确定其最短路、最大流等。同时结合工程和管理问题进行实际应用。

网络分析的主要方法之一，网络计划法又称为计划评审技术（PERT），是一种新的科学管理方法。它以数理统计为基础，运用网络分析的方法，将构成计划目标的所有任务，按其相互之间的逻辑关系和时间参数组成统一的网络形式，通过计算确定其进度和关键路线，并通过网络进行资源和费用的优化。

5. 对策论

对策论也称博弈论，它是一种研究对抗性竞争局势的数学模型，寻求最优的对抗策略。在这种竞争局势中，各方具有相互矛盾的利益。若仅有两个竞争对手参与，则称为两人对策。若一个所得即为对方之所失，则称为二人零和对策。二个零和对策与线性规划有密切关系。对策论在军事上应用较多，现在应用范围也日趋广泛。

6. 库存论

库存论是研究确定经营管理工作中保证系统有效运转的物资储备量，即系统需要在什么时间、以什么数量和供应来源补充这些储备，使得保持库存和补充采购的总费用最小。

7. 随机运筹模型

随机运筹模型是20世纪中叶发展起来的运筹学的一个主要分支。它研究随机时间推进的随机现象，主要方法分为数值和非数值模型两大类，也称为概率方法和分析方法。目前随机过程理论已被广泛地运用到统计物理、放射性问题、原子反应、天体物理、遗传、传染病、信息论和自动控制等领域中。

十分明显的是，运筹学的发展与电子计算机密切相关。无论是在运筹学理论的研究上，还是在方法上，计算机对运筹学的发展都起了必不可少的重要作用。

第2部分 数学规划

第3章 线性规划

数学规划是运筹学的主要分支。它包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划等。20 世纪 30 年代初出现的线性规划，到 1947 年丹茨基（George B.Dantzig）发明单纯形法之后，理论上才得到完善，应用上也得到了迅速的发展和推广。随着电子计算机的发展，成千上万个约束条件和变量的大型线性规划问题都可以求解。因此，无论从理论的成熟性看，还是从应用的广泛性看，线性规划都是运筹学的一个重要分支，它在工业、农业、交通运输、军事和计划管理等各方面都得到越来越广泛的应用。

3.1 线性规划的基本概念

在生产过程中，要想提高工作效率和经济效益，一般有两条途径：一条是进行技术改造，改进生产手段和条件。比如增添设备、改进工艺、挖掘潜力等等。另一条是在生产手段和条件都不变的情况下，改善生产的组织和计划管理，作出最优安排，使生产手段和条件得到充分的利用。线性规划方法就是解决后一类问题的工具。

后一类问题又分两个方面：一是在一定限制条件下，使得工作成果尽可能大；二是为完成既定任务，使资源消耗尽可能小。

例 3-1 设一个工厂可以生产 A、B 和 C 三种产品，而其中每种产品又有 1 型和 2 型之分。今共有原料 100 单位用于生产这些产品，并且要求产品 A 的投料数量不得少于 40 单位，其余两产品的投料均不得超过 35 单位。每种产品的单位投料所获利润由表 3-1 给出。试问应如何投料才能使所获总利润最大?

表 3-1 产品利润分配表

产　品	A		B		C	
产品类型	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
单位投料利润/万元	3	2.5	3.5	4	5	4.5

这个问题可用数学表达式表示如下：

设 x_1 和 x_2 分别表示产品 A_1 和 A_2 所用的投料数量，由 y_1 和 y_2、z_1 和 z_2 分别表示 B_1 和 B_2、C_1 和 C_2 所用投料数量。根据已知条件，它们应满足以下关系式

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 100 \\ x_1 + x_2 \geqslant 40 \\ y_1 + y_2 \leqslant 35 \\ z_1 + z_2 \leqslant 35 \end{array}\right\} \tag{3-1}$$

又由于实际问题中投料为负时无意义，故所有变量都必须满足非负要求

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0$$

最后按题目要求，应使下列总利润表达式

$$p = 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5y_1 + 4y_2 + 5z_1 + 4.5z_2 \tag{3-2}$$

取最大值。

把式（3-1）、式（3-2）称为给上述生产安排问题建立的线性规划模型。利用该数学模型求一组变量 x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2 的值，满足式（3-1）和非负条件，使式（3-2）达到极大值的这一数学问题，称为线性规划问题。

可以等价地把不等式（3-1）改写成等式

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 100 \\ x_1 + x_2 - t_1 = 40 \\ y_1 + y_2 + t_2 = 35 \\ z_1 + z_2 + t_3 = 35 \\ t_i \geqslant 0(i = 1,2,3) \end{array}\right\} \tag{3-3}$$

式（3-1）、式（3-3）和非负要求称为线性规划的约束条件，求极值的表达式（3-2）称为目标函数。它是衡量规划方案优劣的标准。

满足约束条件的一组变量值（x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，t_1，t_2，t_3）称作线性规划问题的可行解，使目标函数达到极值的可行解称为线性规划的最优解。例如，在上例中，$x_1=40$，$y_1=35$，$z_1=25$，$t_3=10$，$x_2=y_2=z_2=t_1=t_2=0$，均满足非负条件和式（3-3），则该组变量值（40，0，35，0，25，0，0，0，10）称为线性规划问题的可行解。将这些值代入式（3-2）就得到相应的目标函数值为 $p=367.5$ 万元。但这不是最大利润，因为另取一组变量值（40，0，25，0，35，0，0，10，0）也是可行解，其相应的目标函数 $p=395$ 万元为最大利润（理由以后就会明白）。所以，后者为线性规划的最优解。

综上所述，得到线性规划的数学模型为：

求一组变量 x_1，x_2，…，x_n 的值，使之满足线性约束条件

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\{\leqslant,=,\geqslant\}^{\ominus}b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\{\leqslant,=,\geqslant\}b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\{\leqslant,=,\geqslant\}b_m\\x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\ \cdots,\ x_n\geqslant0\end{array}\right\}\tag{3-4}$$

并使线性目标函数

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\tag{3-5}$$

达到极值（最大或最小）。其中 a_{ij}，b_i，c_j（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）为已知常数。

这个线性规划可缩写成

$$\left.\begin{array}{ll}\min(\text{或}\max) & z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\\\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\{\leqslant,=,\geqslant\}b_j(j=1,2,\cdots,m)\\ & x_j\geqslant0\ (j=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\}\tag{3-6}$$

也可以用矩阵形式

$$\left.\begin{array}{l}\min(\text{或}\max)\quad z=\boldsymbol{cx}\\\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax}\{\leqslant,=,\geqslant\}\boldsymbol{b}\\\qquad\quad \boldsymbol{x}\geqslant0\end{array}\right\}\tag{3-7}$$

式中

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}\geqslant0$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量非负“min”、“max”分别表示 $\boldsymbol{cx}$ 的极小、极大值。“s.t”为英文“subject to”的缩写形式，即约束条件，或称限制条件。

在经济和生产活动中，线性规划是在有限资源（人力、物力、财力）限制条件下，寻求获得最大收益或支付最低成本的可行方案的一种数学方法。其中收益、成本和限制条件均为变量的线性表达式。线性规划问题，简记为 LP (Linear Programming) 问题。

⊖ 这里的每个约束条件只用到≤、=或≥中的一个符号。

3.2 线性规划的图解法

当线性规划问题的变量个数少于 4 时，可用图解法求解。本节的目的是介绍两个变量线性规划的图解法。它既能为线性规划的基本性质提供几何上的直观认识，又有助于对一些抽象概念的理解。

1. 线性不等式的图像表示

(1) 单个不等式的图像

1) $x \leqslant 3$ 的图像如图 3-1 所示，它是一个半平面，用直线 l_0（作为边界）和一个箭头来表示这个半平面。

2) $x+2y \leqslant 8$ 的图像如图 3-2 所示，它是一个以直线 $x+2y=8$ 为其边界的半平面。

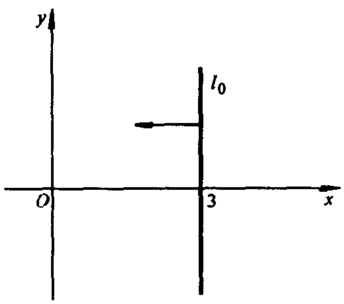

图 3-1　$x \leqslant 3$ 的图像

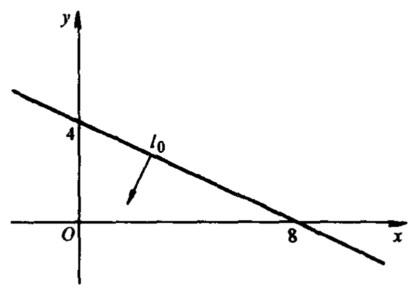

图 3-2　$x+2y \leqslant 8$ 的图像

3) $2x+y \geqslant 4$ 的图像如图 3-3 所示，它是以直线 $2x+y=4$ 为边界的一个半平面。

对于一般情况，令

$$f(x,y) = ax + by + c$$

式中，a、b、c 为实常数。若

1) $f(x, y) = 0$，则其图像为一条直线，记为 l_0。

2) $f(x, y) \geqslant 0$，则其图像是以 l_0 为边界的一个半平面。

3) $f(x, y) \leqslant 0$，则其图像是以 l_0 为边界的另一个半平面。

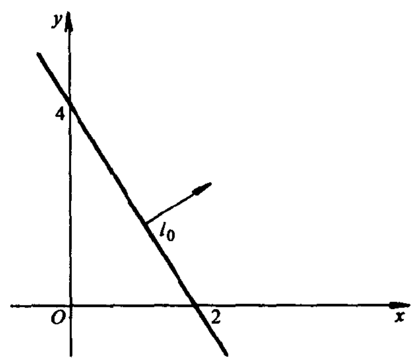

图 3-3　$2x+y \geqslant 4$ 的图像

当 $f(x, y)$ 为非线性函数时，也有类似情况，不同之处在于它们的边界是曲线 $f(x, y)=0$，而不是直线。