北京教育丛书

Beijing jiaoyu congshu

数学解题过程与解题教学

张国栋

北京教育出版社

北京教育丛书

数学解题过程与解题教学

张国栋　著

北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学解题过程与解题数学／张国栋著.－北京：北京教育出版社，1996.12

(北京教育丛书)

ISBN 7－5303－0995－1

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课－中学－解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22721 号

数学解题过程与解题教学

SHUXUE JIETI GUOCHENG YU JIETI JIAOXUE

张国栋

*

北京教育出版社出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

北京出版社总发行

新华书店经销

北京科技印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 7.625 印张 160000 字

1996 年 11 月第 1 版　1996 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—5000

ISBN 7－5303－0995－1／G · 970

定价：10.70 元

序

徐惟诚

教育事业的重要，已经日益被愈来愈多的人认识了。

中国要振兴，归根到底要靠我们中国人自己努力奋斗，要靠我们的全体劳动者创造出数十倍于今日的劳动生产率。这是一个全体国民素质提高的过程。人们自然要寄希望于教育。

要搞好教育，需要做许多事情，其中最根本的还是要靠人，靠教师。尤其是担负着国民基础教育任务的中小学教师。

教师的重担，关系着祖国未来的命运，也关系着每一个教育对象未来的命运。他们所教的学生在未来的社会条件下，究竟怎样做人，怎样立身处世，能不能用自己的双手为社会做出贡献，从而也创造自己的幸福生活，在相当大的程度上取决于在青少年时代所受到的教育。

我们知道，人，是世上已知物质发展的最高形态。关于人的意识、观念、智力的形成和发展的规律，我们离知道得很清楚还有很大的距离。社会主义的教育科学需要有一个大发展，这是毫无疑义的。

在教书育人第一线工作的广大中小学教师，对社会主义教育科学的发展应当有特殊的贡献。他们当中的许多人把一辈子的心血都用来为祖国培育后代，造就人才，积累了丰富的经验。这些经验理当成为整个教育战线的共同财富。可是由于种种原

因，这件总结和传播经验的工作过去做得还很不够。为此，中共北京市委和北京市人民政府决定，拨出专款，指定专人组成编委会，编辑出版一套《北京教育丛书》。这个决定受到广大中小幼教师的欢迎和支持。在短短一年多时间内，已经报来几百部书稿。又有一批热心而有经验的同志担任编审工作，看来任务是可以完成的。

我们相信，《北京教育丛书》的编辑出版，对于鼓励广大教师钻研业务，积累经验，对于传播和交流这些经验，对于推动教育科学研究，对于提高普通教育的水平，都是有积极作用的。同时，这套丛书的出版，也将有助于人们认识教师所作的艰苦的、创造性的劳动。

改革和建设的大潮在祖国大地上汹涌澎湃，每天都有许多新问题提到我们面前来，也把许多新问题提到我们的教育工作者面前。这是一个需要有许多新创造的时代。教育战线上的同志们为祖国的振兴所建立的功绩，是不会被人们忘记的。

前　言

数学解题研究一直是一个十分活跃的领域。八十年代，数学教育中“问题解决”的提出，对于“问题”和“解题”都赋予了更为宽泛的含义，对数学教育的发展产生了很大影响。

近年来，由于许多研究领域，特别是处于数学教育和解题研究“元科学”地位的一些学科，如认识论、数学哲学、认知心理学、人工智能及思维科学等学科都有长足发展，一些新观点、新理论相继出现，相关的研究成果已开始渗入数学教育领域。与此同时，我国的解题研究和解题教学已经发生了变化，人们不再局限于解题方法和解题技巧的总结，开始对数学活动、思维过程的关注。如提出“要重视知识的发生过程”、教师“要暴露自己的思维过程”注意个性品质的培养等教学原则，更加重视思维能力、数学的应用和数学方法论等的研究，标志着教改的深入。

研究领域的变化带来了研究方法的变更，人们不再满足于把解题活动只看作“黑箱”而停留在对外在行为进行描述，开始着力于对思维过程和机制的探索。因此认知心理学、思维学及人工智能研究的成果日益受到重视，相关的术语已被广泛引用，相应的研究方法如个案分析、出声想(思维)、谈话法及跟踪调查等技术开始被采用，实验已进入课堂。进而，对于数学教育在人的发展和提高学生素质等方面的作用也已纳入视野，并开始进一步的研究。

这种发展势必对解题理论提出要求，因为深入下去需要一定的理论框架的指导和支持，所以吸收相关成果，进一步对解题

过程作概括性分析和对解题活动中的内在机制作深入的探索，企望从中发现一些规律，对这一领域有更多的了解。

如所周知，解题是一个极为复杂的智力活动，目前有许多问题还不清楚。本书只是进行一些初步思考，以期引起讨论使认识深入。

本书的重点是对解题活动作一初步分析(第三章)，对解题过程进行描述。并且围绕这一课题对相关问题进行思考(第二、四章)，以求澄清一些认识。并提供一种深化认识问题实质的具体作法(第五章)。这属于一种启发性建议，供老师们在教学中参考运用。

本书中的许多想法是在学习大量文献中形成的，还曾得到好友王长沛、罗小伟、倪楚棠等人的帮助。特别是得到了我的老师钟善基、丁尔陞、曹才翰和欧阳绛等先生的鼓励与支持，在此一并致谢！

写这样的书，还是一个尝试，况且是一个急就篇，限于个人的水平，不妥之处恐所难免，诚恳希望同行及专家们的批评指正。

张国栋

1996年10月

目　录

第一章　解题在数学教学中的地位和作用

第一节　问题和数学问题的特点

一、什么是问题

数学学习过程中，给我们留下深刻印象的是不断地提出问题、研究问题、求解问题，衡量我们学习数学的成效也主要通过解决数学问题的水平来评价。数学活动中离不开问题解决。

一般地，问题是指某个给定过程，对对象认识的当前状态与智能主体（包括人与机器）所要求的目标状态之间差距或矛盾的主观反映。问题是认知领域的一个范畴。问题的作用是认识活动的启动器、动力源。问题的本质是认识主体从未知到已知的过渡形式或中介环节，是已知与未知的统一体。问题的形式是语言上的各种疑问句。

问题解决是认识主体寻求从初始状态到目标状态的合理途径、方法的活动，这是一个主动的过程。

问题和解题都不能脱离解题者而独立存在。这是因为不同的人已具有的知识和经验及掌握知识的水平有所不同，对于甲，R 构成一个问题，可能对于乙 R 就不成问题；甚至当甲没有解决 R 的意向和要求时，R 也无法构成甲的问题。问题是由解题主体 S 与题 R 构成的一个系统$\{S,R\}$。

这里启发我们，在教学中提出问题时应从学生的实际出发，创设良好的情境。问题要具有启发性，形成一种智力挑战激发

学习者求知的欲望。促使将问题化为学习者自身的问题并产生求解的强烈需求。相反，如果问题仅带有强制性就难免扼制兴趣，对问题进而对数学仅留有敬畏之情。

二、数学问题的特征

在什么是问题的讨论中，把问题概念移置到数学背景中，即所指某个给定过程及研究对象均指数学内容就构成了数学问题。

数学问题有哪些特征呢?

第一，提出问题的原始素材几乎可以来自任何领域，数学问题重要的不是背景的实际内容而是形式。由于数学所关心的是客观世界反映出的数与形及其关系，数学问题也就是从量的侧面来探寻客观世界及有关的规律。

第二，数学问题要求明确清晰以避免产生歧义。问题一旦析出，意味着它与现实世界的暂时分离，以便于进行形式的运作。由于每个历史时期对于问题解决(如计算的精确性，证明的标准)都有共同的明确标准，因此问题须得到社会(数学家共同体)的认可。

第三，数学问题是取之不尽的。一方面其来源背景广泛，而且数学问题自身具有生成性，特殊问题被解决后可能生发出更具普遍性的新问题，抽象与推广是现代数学的主要特征。重要问题的解决也就丰富了数学武器的宝库，它为解决其他相关问题创造了条件，同时还孕育着新问题的提出，数学问题生生不息。既使原问题无解(一个典型的例子是伽罗华证明了高于四次的多项式方程不存在一般的根式解)，也启发了人们的思考，可以反思以往认识的片面性或局限性，引发出进一步的合理解释。同时其附带的成果可能刺激新的理论诞生，如伽罗华有关对称性的一般理论为群论的发展奠定了基础，群的概念是数学概念中最深刻、影响最深远的概念之一。数学问题带动数学的

发展。

第四，数学中一些重大问题的提出和解决，往往导致发现数学中不同分支之间的联系或结构，从而引起对以往问题表达的变更，甚至可能引起数学理论的重组，并要求人们彻底改变已有的数学观念(如哥德尔定理的发现)。反映时代特征的一些重大问题的提出，本身即是一个动员计划，激励一代甚至几代人迎接挑战、追求真理。如希尔伯特在1900年巴黎数学家大会上的讲演，影响了半个多世纪的数学发展，至今仍发挥着作用。

第五，在问题的选择上有很大的自由。美籍匈牙利数学家、被称作计算机之父的冯·诺以曼在《论数学》一文中曾将数学与最相近的学科——理论物理学作了比较。理论物理的目标主要来自“外界”，其中的难题常源于实验。实验的结果需要理论的解释和理论的预见，实验提供了必须加以解决的矛盾或冲突。当然有时也要解决理论本身各部分之间的不协调之处。而数学家在选题时基本上是自由的，有广泛的领域可供他们转换课题，选题的标准和成功的标准主要是美学的，即符合一种“内在的”标准。

不少数学家认为数学是一项长期投资，或者说数学是长程的，数学问题的价值不能以短期的时效来衡量。一个典型的例子是关于质数的研究，以往人们认为这属于纯数学领域，无须考虑它的应用，最近十几年由于一些数学家的工作，根据质数因子分解而建立起的编码系统(有公开秘钥的编码)已取得有效的应用，可谓始料不及。

在初步勾画数学问题的一些特征之后，我们再重温美国数学家哈尔莫斯的一句名言:“问题是数学的心脏”时就会有一些新的感受。数学究竟是由什么组成的？是公理？定理？证明？概念？定义？理论？公式？方式？当然，它们都是数学的组成部分。但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏。数学活动

主要是提出问题和解题，问题和解题是数学的核心，它们对数学的发生与成长起着基本的作用。

三、增强问题意识

基础教育中，学生所面临的问题绝大多数都是由别人提出的，这是一种必须按时完成的任务。由于学习负担甚重，解题过程中的探究活动受到制约，个人很少有自由生发出新问题的机会和条件，因此他们提出的问题多停留在不理解或不会做的水平上。尽管数学知识系统的展开确曾是不断提出问题、讨论或研究这些基本问题，通过例题展示基本知识的应用，等等。但由于知识体系是按照一定的逻辑关系而展开和发展的，似乎问题的提出和解决都带有某种必然性。长此以往，在学生的心目中，数学是一种先天预成的、理当如此的身外之物，个人对它只有顺从和依赖。这种观念的影响是深远的，认识活动中的主体性日渐削弱，个性特征被磨灭，似乎只有在作业中才有机会提出与众不同的新解法，才是施展个人的才能的领地，往往也只有在个人解题时表现出新颖的想法或巧妙的设计时才受到重视。学生们认为，只有练习、作业和考试中出现的才是问题，问题解决被限制在一个很小的范围中。

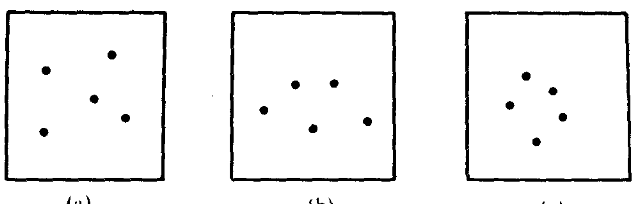

图 1-1

多年来，我们在中学生、大学理科低年级学生和中小学数学教师中进行实验，考察他们的自主意识和独立创见。如给出三张图，每个图中各画出五个点（图 1-1），问哪张图中的五个点从

整体上看散度最小，为什么?

多数人完全凭借直观给出答案是(C)。恰好是那些数学学习较好或头脑清楚的人认为无法回答。有人小声询问散度是什么，也有人在问卷上写道：什么是散度？他们在提出这种疑问后便没有了下文。非常遗憾，他们并不理会问卷中“为什么?”即要求说明理由这一暗示，几乎没有人能自作主张先给散度下一个定义，然后依据自己所规定的散度概念来进行判断。其实他们并非不能独立地为散度下定义，在启发和追问下他们确曾按照自己的标准“建立”起了五花八门的“散度”概念。例如，依次联结各点构成的多边形周长或以此多边形的面积来规定五个点的散度；从其中一个点出发向其余各点作连线，用这些线段长度之和来描述五个点的散度；用能覆盖所有点的最小圆的半径作为散度的定义；建立直角坐标系，统一规定适当的、较小的单位长，顺次联接五个点，由多边形及其“内部”所占有的方格总数(用一张透明的方格坐标纸依次覆盖在三张图上)便于迅速计算出相应的散度；任意过两点作直线，使其余各点在直线的同侧，取直线上一个点作角的顶点，以射线作为始边旋转一角度，作出包容各个点的扇形，其面积值即为散度；等等。“五点问题”在中学生里讨论最为热烈，往往一个方案的提出总会有人提出置疑，并由之引起相继方案的提出，他们力图回避漏洞或不足。如利用多边形或扇形面积来计算散度时，五点共线怎么办？从不同点出发求出的计算各点连线长度之和或计算扇形面积值不唯一时选取那个值才合理(取最小还是最大)？有趣的是还引申出一些新的问题及想法。如，怎样做出覆盖所有点的半径最小的圆？用透明方格坐标纸来计算散度的办法虽简洁实用，但怎样确定坐标单位的长度才合理？甚至有人将问题推广至 n 个点的情形，并大胆提出当 n 很大时不妨舍弃若干远离群体的“个别”的点再计算覆盖圆的最小半径。接着有人便问：怎样决定哪些是“个

别”的点？……这个活动中出现了日常教学中罕见的活跃场面，很难判断出学生们原有的数学成绩或水平。他们各有自己的见解，多数人坚持自己的原则和标准，生动地体现出在数学发展的进程中也充满矛盾，也存在分歧和争议，有时也需要比较、抉择、筛选、剔除。值得思考的是为什么学生们不把建立数学概念也作为问题来解决？为什么会认为这一常见的工作仅是他人（数学家）的专属权力？为什么学生们心目中的“问题”被限制在一个窄小的区域内？事实表明，他们并非不能而是不为！在他们心里，数学总是与某种难以摆脱的“约束”联系在一起。在长期的训练中不知不觉接受一种规范，数学中的奇思异想最容易受到诘责，很少有人敢于越雷池一步，这就导致他们在数学中独立的创见、自主意识被压抑，从而问题意识日趋淡漠。前已述及，问题的产生不能离开认识主体和主体的自主意识。否则，问题终归是别人的一种命令而无法真正成为自己迫切需要解决的问题，两者虽仅一步之遥，跨越它却需要观念的变化。

应当承认，在学习数学的过程中，存在着一些规范和约束，但是这些约束和规范是从哪里来的，究竟影响数学发展或者说对数学的支配者是谁？这些制约与规定属于什么性质，它们是先验存在的还是人们的一种合理选择？我们曾设问：为什么四则运算要“先乘除，后加减”？即使在被考问的众多教师中也很少有人能给出圆满的回答。说明在数学教育中，我们老师中很少有人意识到这类涉及“目的论”性质的问题（其实这不过是约定俗成，不一定非如此不可）。这就难怪不少教师认为数学的本质是逻辑，他们对数学巨擘康托儿：“数学的精髓（本质）在于自由”的名言困惑不解。看来，需要多问一些为什么，或者说提出需要增强问题意识的确不是无的放矢。

有不少人提出应在数学教学中适当引入一些开放性问题，这是增强问题意识的举措之一。如所知，这里所说的“问题”比

通常理解的数学题更为宽泛，它们提供了让学生自己发现问题的更多机会。所说的开放性问题有如下特征：①允许问题有多种答案，甚至不一定非要有终极的最后结果；②问题有趣味、能吸引人，能让不同水平的解题者都有收益，人人都能有某种成功感；③问题的解决需要一定的策略，利于让学生展示各自有个性特征的解题思想；④问题本身能引发出新问题或有较大的推广潜力；⑤问题允许只给出一种情境，允许解题者增补条件，发挥其想象力等。

例如，考察下列关系式：

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=25$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=121$$
$$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=361$$
$$4\cdot5\cdot6\cdot7+1=841$$

…………………………

请对你的发现进行研究。

我们请初中数学教师讨论并解决此问题。实验中，被试态度积极。普遍对式子进行概括

$$f(n)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \qquad (n\in N)$$

并分别有如下发现：

①式子 $f(n)$ 是某个整数 a_n 的平方；

② a_n 是一个奇数；

③ a_n 是一个质数；

④ a_n 是第一、四两数之积加 1；

⑤ a_n 是第二、三两数之积减 1；

⑥数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$ 构成一个 2 阶等差数列，等等。

为了证明上述的结果，普遍发现了

$$\begin{aligned}f(n)&=n(n+3)(n+1)(n+2)+1\\&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\end{aligned}$$