

杨策平
编著

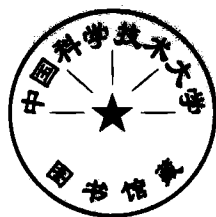
经济数学 模型分析



中国地质大学出版社

经济数学模型分析

杨策平 编著



中国地质大学出版社

内 容 提 要

本书从建立数学模型入手,分析、研究和揭示了客观经济运行过程中的数学规律性。主要内容包括数学模型的概念,建立经济数学模型的过程、理论和方法,详细讲述了几种经济函数模型,最后还介绍了几个应用经济模型。

本书起点低、跨度大,基本概念与基本理论阐述清晰透彻,密切联系实际,各种模型推导详细,适用于作为各类高等学校数学、经济、管理学科本科生、研究生的教材或教学参考书,也可供具有一定数学、经济学和经济统计学基础的广大管理人员和研究人員阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学模型分析/杨策平编著. —武汉:中国地质大学出版社,2003.8
ISBN 7-5625-1772-X

I. 经…

II. 杨…

III. 分析-经济-数学模型

IV. F22

经济数学模型分析

杨策平编著

责任编辑:张晓红

责任校对:胡义珍

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路31号) 邮编:430074
电话:(027)87483101 传真:87481537 E-mail: cbo@cug.edu.cn
经 销:全国新华书店

开本:850毫米×1168毫米 1/32
版次:2003年8月第1版
印刷:湖北省农业科学院印刷厂

字数:270千字 印张:10.375
印次:2003年8月第1次印刷
印数:1000册

ISBN 7-5625-1772-X/F·150

定价:28.00元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前 言

中国经济的快速发展,靠的是其稳健的经济政策。而这稳健的经济政策,主要是借鉴西方经济发达国家的经济策略,仿效西方国家经济发展的路子,再结合中国的具体实际而发展起来的。可以说,西方经济学是中国经济发展的理论基础。

人们知道,西方经济学界历来学派林立,但一般而言,西方经济学指的是经济学的主流学派,即以马歇尔为起点,经由萨缪尔森·德布鲁和队罗等人在 20 世纪最终完成的一个以数学化为特征的经济学主流学派。

读过马歇尔集大成的《经济学原理》的人容易发现,也算数学高手的马氏并没有使用多少数学语言,让人惊奇的是马歇尔总是强调数学并不是必须的,非要“较真”时才使用局限性很大的图形加以说明;更让人惊奇的是,反对主流学派众多,而百余年后,主流学派与马歇尔的思想仍有相当大的重合。

当代主流学派的领头人物萨缪尔森在忙于综合其综合理论的同时,承认其理论存在重大问题。我们不禁要问,不一定对的主流学派为什么能“薪火传人”般代代相传呢?这就引出了一个真理之外的“客观标准”——共同的知识主体。因为一个理论经数人数代相转后,得到的东西与原意可能就“谬以千里”了。而以数学为基础的命题,则可以大大避免这种“以讹传讹”。马歇尔对数学的吝啬,在于实出无奈地迎合当时学生对数学的恐惧与反感,然而他贡献了一个需求供给分析的数学框架。在此严格定义的框架下,后人找到了共同操练的相同基点,虽争论不休,但发扬光大。

要把这个故事扯回中国,不得不过一座桥:我们如何“运用西

方经济学”和如何发展自己的经济学。理论界对这一基本问题的争论大体有两种看法。一种看法认为“西方经济学”的基本内容不足取,但可借鉴与运用那些具体的分析工具与一些对实际问题的政策主张。另一种观点认为,要学习的是那些基本的内容和方法(人类共同财富的基础理论),而分析某些国家、某种特殊历史发展阶段、某种特定文化背景,而得出的某些具体的结论、政策和方法,不必给予过多的强调。如果考虑到经济学主流学派以数学为基础的共同的知识主体,那么正如人们认同美国数学与中国数学没有什么区别一样,从偏好导出的效用函数在消费者与厂商那里分别被极大化,作为人类共同财富的理论框架,就能够得到共识。

在界定了主流经济学及其共同的基点特征后,可以考察经济学数学化在中国的发展。事实上,理论上的论战归论战,20世纪80年代中后期,西方经济学已悄然成为各高校经济类学生的核心基础课。萨缪尔森先生的风行全球的通俗教材《经济学》在中国也同样畅销,广为传阅。各校老中青教师亦不甘示弱,以国外流行教科书为蓝本,连年包装新书上市,为普及经济学ABC各尽绵薄之力。有条件的学校也像模像样地开设中级和高级版本的课程。但必须客观地指出,对于微观经济学,学生能学 Varian 的《微观经济分析》(Microeconomic Analysis)的已是少数,宏观经济学能学 Blanchard 和 Fischer 的《宏观经济学》(Lectures on Macroeconomics)的学生则更是凤毛麟角。

经济学界流传着这样一个笑话,说经济学家和物理学家在向数学家请教时互相都大吃一惊,经济学家吃惊物理学家用数学居然如此简单,物理学家吃惊经济学家用数学居然那么难。这也充分说明了数学在经济中应用的深度和广度。

当人类进入21世纪,随着科学技术对研究对象的日益精确化、定量化和数学化,随着电子计算技术的广泛应用,数学模型已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具,并在自然科学、工

程技术科学与社会科学的各个领域中得到广泛应用。利用数学模型解决客观经济现象中的经济问题尤其得心应手。

《经济数学模型分析》一书旨在使读者理解经济模型化思想以及运用数学模型化的方法和技巧,解决经济问题。数学模型化(Mathematical Modelling)是指提出、设计、建立、求解、论证及使用数学模型的整个过程。其目的在于研究开发数学模型在经济领域中分析问题、逻辑思维和辅助决策的作用和功能。

“经济数学模型化”在其他很多高等院校作为本科生或研究生的选修课程,随着社会的进步和发展,大学生非常有必要学习这门课程。杨策平老师所著《经济数学模型分析》是这门课程的一本很好的教材,它的出版,可以为我们推广数学模型在经济中的应用和掌握建立数学模型的方法,提供有益的帮助和有用的参考。

蔡光兴

2003年5月

目 录

第 1 章 数学模型	1
§ 1 数学模型的基本概念	1
§ 2 建立数学模型的逻辑思维方法	7
§ 3 数学模型的性质及其在经济中的应用	20
§ 4 经济问题数学模型化过程	26
第 2 章 经济数学模型化过程分析	36
§ 1 经济指标统计分析方法	36
§ 2 销售机理模型化过程分析	50
§ 3 导出模型及模型的派生方式	70
第 3 章 建立经济数学模型的基本理论与方法	78
§ 1 线性回归模型概述	78
§ 2 一元线性回归模型	83
§ 3 多元线性回归模型	95
§ 4 经济模型分析中的几个问题	119
§ 5 经济数学模型综合实例分析	149
第 4 章 扩展经济数学模型的理论与方法	167
§ 1 变参数经济数学模型	168
§ 2 非线性经济数学模型	174
§ 3 非因果关系的数学模型	182
§ 4 协整理论与误差修正模型	197

第 5 章 经济函数应用模型分析·····	205
§ 1 生产函数模型 ·····	205
§ 2 需求函数模型 ·····	238
§ 3 消费函数模型 ·····	257
§ 4 其他常用函数的应用模型 ·····	268
第 6 章 经济数学应用模型实例分析·····	281
§ 1 卡莱斯基商业循环模型 ·····	281
§ 2 马克思扩大再生产图式与增长模型 ·····	289
§ 3 无形资产的一种分割评估模型 ·····	296
§ 4 一个宏观经济系统的有效控制模型 ·····	305
§ 5 经济发展中的一个最优预测模型 ·····	313
参考文献·····	323

第 1 章 数学模型

随着科学技术对研究对象的日益精确化、定量化和数学化,随着电子计算技术的广泛应用,数学模型已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具,并在自然科学、工程技术科学与社会科学的各个领域中得到广泛应用,诸如经济、管理、工农业,甚至社会学等,什么是“数学模型”,如何建立数学模型,是科技工作者极感兴趣的问题.

§ 1 数学模型的基本概念

数学模型,就是针对或参照某种问题(事件或系统)的特征和数量相依关系采用形式化语言,概括或近似地表达出来的一种数学结构.

数学模型因问题不同而异,建立数学模型也没有固定的格式和标准,甚至对同一个问题,从不同角度、不同要求出发,可以建立起不同的数学模型,因此与其说数学建模是一门技术,不如说是一门艺术,它需要熟练的数学技巧、丰富的想象力和敏锐的洞察力,需要大量阅读、思考别人做的模型,尤其要自己动手,亲身体验.

建立数学模型一般有如下要求:

(1) 足够的精度,即要求把本质的关系和规律反映进去,把非本质的去掉.

(2) 简单,便于处理.

(3) 依据要充分,即要依据科学规律、经济规律来建立公式和图表,进而建立模型.

(4) 尽量借鉴标准形式.

(5) 模型所表示的系统要能操纵和控制,便于检验和修改.

用数学方式研究实际问题,需要对这些问题进行识别和考虑最适合的或比较好的提法,这不仅需要相应领域的数学理论和方法,也需要相应领域的专业知识,因此建立模型的工作,常常是由数学家与有关专家共同完成的.

建立数学模型的一般步骤是:

第一步:对问题(事件或系统)进行观察,想象其运动变化情况,用非形式语言(自然语言)进行描述,初步确定描述问题的变量及相互关系.

第二步:确定问题的所属系统(力学系统、生态系统、金融系统、管理系统等)、模型大概的类型(离散模型、连续模型、随机模型等)以及描述这类系统所用的数学工具(运筹学方法、图论方法、常微分方程等),提出假说.

第三步:将假说进行扩充和形式化,选择具有关键性作用的变量及其相互关系(主要矛盾),进行简化和抽象,将问题的内在规律用数学、图表、公式、符号表示出来,经过数学上的推导和分析,得到定量(或定性)关系,初步形成数学模型.

第四步:根据现场试验和对试验数据的统计分析估计模型参数.

第五步:检验修改模型.这是在反映问题的真实性与便于数学处理之间的折衷过程.模型只有在被检验、评价、确认基本符合要求后,才能被接受;否则需要修改模型,这种修改有时是局部的,有时甚至要推倒重来.

模型的修改与化简,是建模过程中技巧性较强的环节,由于实际情况是复杂多变的,往往不能简单套用现有模型.例如,有的参数在某个场合容易得到,而在另一场合却得不到,这就迫使人们改用其他形式的模型;有时在构造模型的过程中,发现必须拥有这样

或那样的数据,或指出模型应朝哪一个方向修正;有时,虽然复杂的模型已经构出,但做试验或求解却十分困难,这也迫使人们采用较简单的近似模型。

常用简化模型的方法有:

1. 去掉一些变量

在机理分析中,在一定条件下,常将描述分布参数系统的偏微分方程,简化为集中参数的常微分方程。

在统计分析中,则采用主成分分析法、向后回归法(淘汰法)和逐步回归方法,以减少变量个数。或在建模之前,采用正交试验方法,在众多因素(变量)中找出对指标有显著影响的少量因素再进行优选试验,进而建立模型。

2. 合并一些变量

在构造模型时,把一些性质相同或相似的变量合并成少数有代表性的变量,尽管这样做降低了模型的精度,但只要能满足建模的基本要求,则是可行的,例如在经济系统建模中,经过多年研究探索,将国民经济上千个部门合并成 61 个变量。

3. 改变变量的性质

常用的方法是,把某些非主要的或暂时的变量看作常量,把连续变量看作离散变量,或把离散变量看作连续变量。

4. 改变变量之间的函数关系

当处理非线性问题遇到困难时,或建模精度要求不高时,常将非线性函数在某一点处展开(Taylor 展开),取前两项作为近似表达式,即用线性关系逼近非线性关系式。这一线性化方法在工程技术上被广泛采用。也可以采用二次函数或其他研究比较透彻的函数逼近,而使模型简化。

在随机性模型中,常采用一些熟悉的概率分布函数,如正态分布、指数分布等去代替不太好处理的概率分布函数。

5. 改变约束关系

为简化模型,有时还可以对变量的约束条件加以改变,如增加一些约束,或去掉一些约束,对约束进行一些修改等等.例如在求解数学规划问题时,若要求目标函数的极大值,而真正解不一定能找到时,则增加约束后求得的可行解一般是偏低的,称之为保守解或悲观解;去掉一些约束求得的解往往偏高,称之为冒进解或乐观解.虽然它们都不是问题的真正解,但可以通过它们来了解真正解的范围,这对问题进行初步评价是有用的.

6. 模型结构的转换

若某种模型在理论上很漂亮,但求解很困难,甚至无法求解,或者某种模型要求具备某种数据,而这种数据不具备或不易得到,我们只有改用其他形式的模型,即改变模型的结构.

模型结构的转换,需要在对问题透彻理解和想象的基础上,实现视角的转换,即从不同的角度观察问题,进而采用不同的数学工具来描述同一问题.

此外,建立数学模型,可能会涉及到许多数学分支.一个问题,往往可以利用不同方法建立不同的模型.因此,对数学模型进行绝对分类,对于建立数学模型是不利的.但是大致的分类,对初学者,在确立原型所属系统和采用数学工具时,会有一定的帮助.数学模型有以下几种分类方法.

1. 按模型的数学性质分类

按数学模型的性质大致可分为三类.其一为确定性模型,其原型具有相对的确定性或必然性,原型的各种关系相对稳定明确,模型的数学结构多为各种方程式、点集映射关系式和图式;其二为随机性模型,其原型具有随机性或偶然性,原型的某些关系是波动的和不肯定的.模型的数学背景理论是概率论、随机过程、数理统计、多元分析和鞅论等;其三为模糊性模型,其原型及其关系具有模糊性或不分明,其处理方式是 Fuzzy 子集理论、信度理论、证据理论和 Fuzzy 逻辑等.

按数学模型的各种变量、参量和函数结构的变动情况,可以把模型分为连续性模型、非连续性模型和离散性模型.连续性模型对于任何量或关系的微小摄动是相对稳定的;非连续性模型对某些量或关系的变化是间断的、有跳跃的;离散性模型则多指其变量是可数点列构成的.

根据模型的参量可以分为固定参数(Fixed-Parameter)模型和自适应参数(Adaptive-Parameter)模型,前者在模型化过程中所涉及的参数只需给定一次;而后者则要随着原型的变化进行必要的调整,这时参数往往属于一个参数集合或空间.

2. 按模型与时间的关系分类

按模型与时间的关系亦可分为三类:①若模型的行为随时间而变化,且时间是独立的变量,则称为动态模型.其原型和时间关系密切(有时也称随阶段变化的模型为动态模型).②若模型的行为不随时间而变化(时间可以是参量),则称为稳态模型.其原型对时间的变化相对稳定.③若一非稳态的原型用一系列静态模型来表示,则称此系列模型为拟稳态模型.其原型是动态的,而这一系列模型中的每一模型都是稳态的.如果细分,动态模型还可分为瞬时(Instantaneous)模型和记忆(Memory)模型.前者在任意给定的瞬时的行为只取决于此刻的环境或因素;而后者在任意给定的瞬时的性态可能依赖此刻之前的一段时间的历史环境或因素.记忆模型还可以分为两种:其一,独立于此刻自身的行为,而此刻之前的一段固定的有限时间称为定时距(Time Invariant)模型;其二,在现在任一瞬间的记忆范围,直到过去的一个固定的瞬间称为变时距模型,这就引出了所谓因果性分类,即若模型在一瞬间的行为取决于过去和现在,则为因果模型,若是还取决于未来,则为非因果模型.此外,动态模型还可分为周期性模型和非周期性模型,随时间总是做有节奏、有规律变化的模型称为周期性模型,否则称为非周期性模型.应当指出,按步骤、阶段而变化(与时间长度无关)

的模型有时也称为动态模型. 在经济中动态模型是一类应用广泛的模型, 尤其是在宏观方面.

3. 按模型的经济背景分类

按原型背景分类可以分为宇观经济模型、宏观经济模型、中观经济模型和微观经济模型. 它们的原型背景分别是世界、国家、地区和企业(对这种分类尚有异议).

按学科分类大致有运筹学模型、经济控制论模型、计量经济学模型和数理经济学模型. 这些模型都有其独特的数学理论和方法, 而且可以再细分.

按模型化问题的类型分类, 可以分为模拟模型、统计模型、优化模型和结构模型. 模拟模型和统计模型重在科学地观察、预测; 优化模型重在配置、统筹和最佳控制; 结构模型重在对原型的逻辑化、分析、推理和解释假说.

4. 按模型的数学机理分类

按模型的数学机理大致可分为两类: 一是数学规划类模型, 包括线性规划模型、非线性规划模型和动态规划模型等; 二是统计回归类模型, 包括时间序列模型、多元分析模型等.

5. 按模型化目的分类

按模型化目的大致可分为: 观察和解释模型、计划和设计模型、计划和设计的优化模型、机理过程分析模型、控制模型和研究模型.

对于数学模型, 还有一些其他的分类方式, 而且分类不是绝对的. 但是, 识别模型的类别无论对构造模型还是使用模型都是十分必要的.

在建立数学模型时, 能否用数学工具描述某一问题的特征是建模的前提, 当根据观测数据对回归模型的参数或时序模型的参数进行估计时, 系统可辨识性问题也就同时提出来了. 当根据某物理场的信息估计相应偏微分方程中的某些系数时, 如场的存在范

围或边界条件,我们也遇到了数学物理问题的适定性问题……这些数学建模的理论问题留待在专门的问题中研究.这里仅围绕数学建模的方法展开讨论.

§ 2 建立数学模型的逻辑思维方法

从对数学模型的要求、建模的过程与步骤来看,要建立数学模型,应具备下述 5 个方面的能力:

- (1) 分析综合能力;
- (2) 抽象概括能力;
- (3) 想象洞察能力;
- (4) 运用数学工具的能力;
- (5) 通过实践验证数学模型的能力.

建立数学模型是一种积极的思维活动,从认识论角度看,是一种极为复杂且应变能力很强的心理现象,因此没有统一的模式,没有固定的方法,其中既有逻辑思维,又有非逻辑思维.建模过程大体都要经过分析与综合、抽象与概括、比较与类比、系统化与具体化的阶段,其中分析与综合是基础,抽象与概括是关键.从逻辑思维来说,抽象、归纳、演绎、类比等形式的逻辑思维方法大量被采用.熟悉这些基本方法,无疑对提高建模能力会有帮助.下面试图以一些实例说明这些方法的应用.当然这些实例本身是多种方法的结果,并不能绝然划分到某一类方法中.

一、抽象

科学研究就是要揭示事物的共性和联系的规律,因此就要忽略每个具体事物的特殊性,着眼于整体和一般规律.

例 1 人们在日常生活中,经常会遇到这样一个问题:有四条腿的家具,如椅子、桌子等,往往不能一次放稳,只能有三只脚着

地,需要旋转调整几次,方可以使四只脚着地、放稳.这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言表达,并用数学工具证实吗?

数学建模的关键是用数学语言把四只脚同时着地的条件和结论表示出来.

(1)椅子的位置和调整的表述.注意到椅子脚连线成正方形,以中心点为对称点,正方形绕中心的旋转表示了椅子位置的改变(可假设椅子位置调整中只有旋转而没有平移,因为在实际问题中只要旋转调整便可放稳).因此,可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置.在图 1-1 中, $ABCD$ 为椅子的初始位置, $A'B'C'D'$ 为椅子绕中心点 o 旋转 θ 角后的位置.

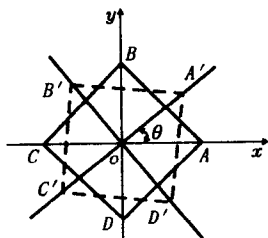


图1-1 椅子的放置

(2)椅脚着地的数学表示.显然若用变量表示椅脚与地面的距离,当此变量为零时,就表示椅脚着地.这样需引进 4 个变量,且均为 θ 的函数(因为椅子的位置不同时,椅脚与地面的距离不同).

现在考虑化简.由于正方形是中心对称的,只要假定两个距离函数即可.设 A, C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, B, D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$,显然 $f(\theta) \geq 0, g(\theta) \geq 0$.

对三只脚着地和四只脚着地的描述.由于椅子在任何位置至少有三只脚着地,所以对于任意的 θ , $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零,因此恒有 $f(\theta) \cdot g(\theta) = 0$ 时,不妨设 $g(\theta) = 0, f(\theta) > 0$. 若四只脚一样长,则旋转 90° 后,只是两对角线互换,因此当 $\theta = \pi/2$

时, $f(\theta) = 0, g(\theta) > 0$. 在 $\theta = \theta_0$, 四只脚着地时, $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

(3) 函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 的性质. 假设地面高度是连续变化的, 则 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 为 θ 的连续函数.

将上述分析中的假设和模型整理出来.

1. 模型假设

(1) 椅子四条腿一样长(这样椅子在绕中心旋转时, 仅与 θ 角有关, 而不会因四条腿不一样长, 而与椅腿有关), 椅腿与地面接触处可视为一个点(只考虑几何位置), 四腿的连线呈正方形.

(2) 地面高度是连续变化的, 即为连续曲面, 沿任何方向都不会出现间断(保证了 f, g 的连续性).

(3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言, 地面是相对平坦的, 椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

2. 模型的构成

将用自然语言描述的现象, 翻译成形式化的数学语言.

令 $f(\theta)$ 为 A, C 与地面距离之和, $g(\theta)$ 为 B, D 与地面距离之和. f, g 是 θ 的连续函数, 则问题表述为:

已知连续函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta), \theta \in [0, \pi/2]$, 满足

$$f(\theta) \cdot g(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi/2]$$

且 $f(0) \geq 0, g(0) = 0; \quad f(\pi/2) = 0, g(\pi/2) \geq 0$

求证: 存在 $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, 使 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

3. 模型求解

现在问题的数学求解也清楚了.

令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 则 $h(0) > 0$, 而 $h(\pi/2) < 0$, 由于 f, g 是连续的, 故 h 亦为连续. 根据连续函数的中值定理可知, 必存在 $\theta_0, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, 使 $h(\theta_0) = 0$, 即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$. 又因为 $f(\theta_0)$

$\cdot g(\theta_0) = 0$, 故