WUTP 普通高等学校计算机科学与技术专业新编系列教材

Numerical Analysis

数值分析

金　聪　熊盛武　主编

```
#include <stdio.h>
void main()
{
  void swap(int *ptr1,int *ptr2);
  int x,y, *ptr1, *ptr2;
  printf("input x,y:");scanf("%d,%d",&x
  printf("%d\t%d\n",x,y);ptr1=&x;ptr2=
  if(x<y)
  swap(ptr1,ptr2);
  printf("%d\t%d\n",x,y);
}
void swap(int *ptr1,int *ptr2)
```

武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

普通高等学校计算机科学与技术专业新编系列教材

Numerical Analysis
数 值 分 析

主　编　金　聪　熊盛武

武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

【内容提要】

本书较全面地讲述了计算机常用的数值分析方法及有关的基础理论知识。全书共分为6章，包括了引论、方程求根的数值解法、插值方法、数值微分与数值积分、线性代数方程组的数值解法以及常微分方程初值问题的数值解法等数值分析的基础知识和基本理论。每章都有计算实习内容，用于指导学生自学以及上机实验。全书讲述力求由浅入深，通俗易懂，理论上具有完整性和系统性，强调基本原理和基本方法，配以大量的实例、图表，易于教学，便于自学。在附录部分列出了部分算法的C语言程序。

本书可作为高等学校计算机专业学生的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值分析/金聪，熊盛武主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2003.8

普通高等学校计算机科学与技术专业(本科)新编系列教材

ISBN 7-5629-1956-9

Ⅰ.数… Ⅱ.金… Ⅲ.电子计算机-计算方法-高等学校-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 106886 号

出版发行：武汉理工大学出版社(武汉市珞狮路 122 号　邮政编码：430070)

HTTP：//www.whut.edu.cn/chubanl

E-mail：wutp @ public.wh.hb.cn

经 销 者：各地新华书店

印 刷 者：武汉理工大印刷厂

开　　本：787×960　1/16

印　　张：12.5

字　　数：240 千字

版　　次：2003 年 8 月第 1 版

印　　次：2003 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：1～5000 册

定　　价：17.00 元

普　通　高　等　学　校
计算机科学与技术专业新编系列教材
编审委员会

出版说明

当今世界已经跨人了信息时代，计算机科学与技术正在迅猛发展。尤其是以计算机为核心的信息技术正在改变整个社会的生产方式、生活方式和学习方式，推动整个人类社会进入信息化社会。为了顺应时代潮流，适应计算机专业调整及深化教学改革的要求，充分考虑到不同层次高校的教学现状，满足广大高校的教学需求，武汉理工大学出版社经过广泛调研，与国内近 30 所高等院校的计算机专家进行探讨，决定组织编写“普通高等学校计算机科学与技术专业新编系列教材”。

我们在组织编写新编本套系列教材时，**以培养现代化高级人才为重任，以提高学生综合素质、培养学生应用能力和创新能力为目的，以面向现代化、面向世界、面向未来为准绳，注重系列教材的特色和实用性，反映最新的教学与科研成果，体现本专业的时代特征。**同时，面对教育改革的需要、人才的需要和社会的需要，在编写本教材时，借鉴、学习国外一流大学的先进教学体系，结合国内的实际需要，吸取具有先进性、实用性和权威性的国外教材的精华，以更好地促进国内教材改革顺利进行。从时代和国际竞争要求的高度来思考，为打造一套高起点、高水平、高质量的系列教材而努力。

本套教材具有以下特色：

与时俱进，内容科学先进——充分体现计算机学科知识更新快的特点，及时更新知识，确保教材处于学科前沿，以拓宽学生知识面，培养学生的创新能力。

紧跟教学改革步伐，体现教学改革的阶段性成果——符合全国高校计算机专业教学指导委员会、中国计算机学会教育委员会制订的“计算机学科教学计划2000”的内容要求。

实现立体化出版，适应教育方式的变革——本套教材努力使用和推广现代化的教学手段，凡有条件的课程都准备组织编写、制作和出版配合教材使用的实验、习题、课件、电子教案及相应的程序设计素材库。

本套教材首批 25 种预定在 2003 年秋季全部出齐。我们的编审者、出版者决不敢稍有懈怠，一定高度重视，兢兢业业，按最高的质量标准工作。教材建设是我们共同的事业和追求，也是我们共同的责任和义务，我们诚恳地希望大家积极选用本套教材，并在使用过程中给我们多提意见和建议，以便我们不断修订、完善全套教材。

武汉理工大学出版社

2002 年 10 月

前　言

当今计算机科学技术发展迅速，应用日益普及，各个学科在科研教学与工程实践中越来越普遍地遇到量化需求问题，于是很自然地涉及到数值分析领域。许多理工类高校相关专业也开设了数值分析（原称计算方法）课程，越来越多的高校师生也深感这门课程内容重要。而目前这门课程所使用的教材虽有不少，但多是上世纪 90 年代中前期编著，内容体例也不尽统一。因此，结合现今计算机技术不断推陈出新的形式，编撰更有时代特色的数值分析新教材，就显得极为迫切和必要。

本书的编写主要面向理工类专业的本科生、专科生，也可作为研究生和在职工程技术人员的参考读物。经过教学与调查研究，编著者认为绝大多数专业的学生在将来工作实践中主要是运用计算机解决数值分析的演绎方法问题，同时考虑到理工类各专业学生的知识结构，没有必要在内容繁杂的数值分析理论上花费太多时间，因此凡涉及数值分析深层理论的有关内容，尽量简略介绍，而适当增加实践性内容，强调上机演算的重要性和必要性。书中每章都设有相应内容的上机练习题，这些题目一般都经过上机验证，具有可操作性的特点。也有少数超出教材内容或有相当难度的题目，可供深入研究者学习演练。

对常用算法都归纳出了较详细的基本计算步骤，也有并不专对一种算法语言的算法描述。书中列举了大量的算法过程，融汇了编制数值计算的计算机算法语言程序的一些处理方法和技巧。学习者按此即可顺利编制出所用算法语言程序。

我们赞成“少而精”，不希望使用题海战术。因此读者没有必要逐一地完成所列出的练习题，只要精心地完成一部分足矣。此外，本书没有给出“标准答案”，那样也许会限制甚至误导读者的思维，甚至纵容一些懒人。当然，这样做自然增加了一些难度，但是“书山万仞勤为路，学海无涯苦作舟”，不付出足够的勤奋是不可能有收获的！

本书作为本科生教材，参考学时为 54 学时，各校不同专业可根据

实际学时安排删选相关内容。

参加本书编写人员(按章节顺序)有佘名高(武汉理工大学,第1章、附录)、胡清峰(湖北大学,第2、3章)、汪荣贵(合肥工业大学,第4章)、金聪(湖北大学,第5章)、熊盛武(武汉理工大学,第6章),最后由金聪审阅全部书稿。

由于编写者水平所限,加上时间紧张,难免存有疏漏,欢迎读者不吝指正。

编著者

2003年5月

目　录

1 引论

本章提要

数值分析最基本的立足点是容许误差。在误差容许的范围内对某一数学问题进行近似计算,得到能满足要求的近似结果。因而研究数值方法,必须注重误差分析,分析误差的来源,误差的传播情况以及对计算结果给出合理的误差估计。

本章将具体介绍以下一些基本内容:

(1) 误差、误差限和有效数字的基本概念;

(2) 相对误差及其与有效数字的联系;

(3) 算术运算的误差和相对误差;

(4) 近似计算中应注意的一些原则问题。

随着现代科学技术的发展,大量复杂的科学计算问题呈现在人们面前,要完成这些由人自身所不能及的工作,必须借助于电子计算机这一现代化工具,而使电子计算机有效地解决科学计算问题的关键技术是数值计算方法。数值计算是电子计算机处理实际问题的一种关键手段,从宏观的天体运动学到微观的分子细胞学,从工程系统到非工程系统,无一能离开数值计算。数值分析这门学科的诞生,使科学发展产生了巨大的飞跃,它使各个科学领域从定性分析阶段走向定量分析阶段,从粗糙走向精密。由此可见,数值计算方法是我们从事科学研究与应用不可缺少的知识。本章主要介绍数值算法的基本思想及预备知识。

1.1 数值分析的研究对象

科学与工程领域中的问题求解一般需要经历如图 1.1 所示的过程。某个领域的专家首先提出实际问题,然后辨析其中的主要矛盾和次要矛盾,并在合理假

设的条件下，运用有关科学知识和各种数学理论、工具和方法，建立起问题中不同量之间的联系，进而得到完备的数学模型。根据数学模型，提出求解的数值计算方法，再编写程序并上机计算得出结果。

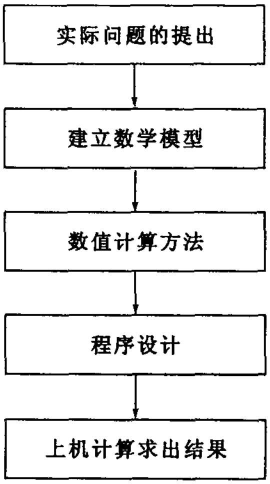

图 1.1　实际问题求解步骤

数值分析是一种研究并解决数学问题的数值近似解方法，是在计算机上使用的解数学问题的方法之一，亦称计算方法。它的计算对象是那些在理论上有解，而求解无法表示成公式或虽有公式却难以用手工计算来完成的数学问题。例如，解含有 1000 个未知量的线性方程组；计算 8 阶矩阵的全部特征值。

在科学研究和工程技术中都要用到各种计算方法。例如，在地质勘探、汽车制造、桥梁设计、天气预报和汉字字样设计中都有数值计算方法的踪影。数值分析是一门理论性和实践性都很强的学科，它既有数学类课程中理论上的抽象性和严谨性，又有实用性和实验性的技术特征。数值分析的前提课程是微积分、线性代数、常微分方程及一门计算机语言。

从数值计算方法的计算公式到计算机上实际运行，两者之间还有距离，这是数学能力与计算机应用技术能力之间的距离，也与计算机的运行环境和编程工具有关。

在生产和科学研究中遇到的大量计算问题，并不是人工手算及一些简单的计算工具（如算盘、计算器）所能胜任的。计算机的出现，并随着计算机性能的不断提高，极大地促进了数值计算方法这门学科在理论上、应用上的快速发展。

数值分析是以数学问题为研究对象，它是数学的一个分支，而它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，它着重研究求解的数值计算方法以及与此相关的理论，包括方法的收敛性、稳定性及误差分析，还要根据计算机的特点，研究计算时间最短的计算方法。概括起来有四个特点：

第一，要面向计算机。要根据计算机的特点，提供实际可行的有效算法。

第二，要有可靠的理论分析。能任意逼近并达到精度要求，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性，还要对误差进行分析。

第三，要有好的计算复杂性。时间复杂性好是指节省计算时间，空间复杂性是指节省计算机存储空间。这也是建立算法要研究的问题，它关系到算法能否在计算机上实现。

第四，要有数值实验。即任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值实验证明是行之有效的。

1.2 误差及有关概念

1.2.1 误差的来源

利用数值计算方法求得的数值解是一个近似值,它总给人们一个不严格的感觉。在现实世界的各种求解过程中,误差产生是绝对的,而精确存在是相对的。当然,数值解的近似程度必须是原问题所容许的、合理的,否则,其计算结果将毫无意义。

用数学工具来解决实际问题在哪些地方会产生误差呢?首先是用数学模型来描述具体的物理现象要作许多简化,即数学模型本身就包含着误差,因而数学模型是对实际问题的一种近似表达,这种数学模型与实际问题的差异叫做"模型误差"。在数学模型中通常总要包含一些观测数据,这种观测结果不会是绝对准确的,因此还有"观测误差"。

【例 1.1】 设一根铝棒在温度 t 时的实际长度为 L_t,在 $t=0$ 时的实际长度为 L_0,用 l_t 来表示铝棒在温度 t 时的长度计算值,并建立一个数学模型:

$$l_t = L_0(1+\alpha t)$$

其中 α 是由实验观测到的常数:

$$\alpha = (0.0000238 \pm 0.0000001)/℃$$

则称 $L_t - l_t$ 为"模型误差",0.0000001/℃为 α 的"观测误差"。

在解实际问题时,数学模型往往很复杂,因而不易获得分析解,这就需要建立一套行之有效的近似方法或数值方法。模型的准确解与用数值方法求得的准确解之差称为"截断误差"。

【例 1.2】 指数函数 e^x 的幂级数展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

在实际计算时,我们只能取前面有限项(如前 n 项)

$$s_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

来代替,就抛弃了幂级数的后半段,因而出现了误差,这种误差就是一种"截断误差"。对这个问题来说,截断误差是

$$e^x - s_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

最后,还有一类误差是因为在计算时总是只能取有限位数字进行运算而引起的,这种误差称为"舍入误差"。

【例 1.3】 $\pi=3.1415926\cdots,\sqrt{2}=1.41421356\cdots,\frac{1}{3}=0.3333\cdots$等等。在计算机上运算时只能用有限位小数，如我们取小数点后四位数字，则

$$\varepsilon_1 = 3.1416-\pi=+0.0000074\cdots$$

$$\varepsilon_2 = 1.4142-\sqrt{2}=-0.000013\cdots$$

$$\varepsilon_3 = 0.3333-\frac{1}{3}=-0.000033\cdots$$

就是“舍入误差”。

总括起来，误差一般有：模型误差；观测误差；截断误差；舍入误差。但在本课程的学习中主要讨论的是截断误差和舍入误差。

1.2.2 误差、误差限和有效数字

【定义 1.1】 设 x 是某量的准确值，x^* 是 x 的一个近似值，则近似值 x^* 和准确值 x 的差称为误差，或称绝对误差，用 e^* 来表示：

$$e^* = x^* - x$$

由于在一般情况下准确值 x 不知道，所以误差 e^* 的准确值也不可能求出，但根据具体测量或计算的情况，可事先估计出误差的绝对值不能超过某个正数 ε^*，我们把 ε^* 叫做误差绝对值的“上界”，或称“误差限”。

【定义 1.2】 如果

$$|e^*| = |x^*-x| \leqslant \varepsilon^*$$

ε^* 就叫做近似值 x^* 的误差限。

因为在任何情况下都有

$$|x^*-x| \leqslant \varepsilon^*$$

即

$$x^*-\varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^*+\varepsilon^*$$

这就表明 x 在$[x^*-\varepsilon^*,x^*+\varepsilon^*]$这个区间内，我们用

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

来表示近似值 x^* 的精确度，或准确值所在的范围。

【例 1.4】 用一把有毫米刻度的米尺，来测量桌子的长度，读出的长度 $x^*=435\text{mm}$，是桌子实际长度 x 的一个近似值，由米尺的精度我们知道，这个近似值的误差不会超过半个毫米，则有

$$|x^*-x| = |435-x| \leqslant \frac{1}{2}\text{mm}$$

即

$$434.5 \leqslant x \leqslant 435.5$$

这表明 x 在[434.5,435.5]这个区间内,写成

$$x = 435 \pm 0.5\text{mm}$$

【例 1.5】 $x=\pi=3.14159265\cdots$按四舍五人的原则

取一位:$x_1^* = 3, e_1^* \approx -0.14, |e_1^*| \leqslant 0.2$

取三位:$x_3^* = 3.14, e_3^* \approx -0.0016, |e_3^*| \leqslant 0.002$

取五位:$x_5^* = 3.1416, e_5^* \approx +0.000007, |e_5^*| \leqslant 0.000008$

如果近似值 x^* 的误差限是某一位上的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,我们就说 x^* 有"n 位有效数字",或者说 x^* 准确到该位。用四舍五入法取准确值的前 n 位作为近似值 x^*,则 x^* 有 n 位有效数字。上面例子中的 $x_3^*=3.14$ 是以三位有效数字来表示 π,它的误差限为

$$|x^* - \pi| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$x_5^*=3.1416$ 是以五位有效数字来表示 π,它的误差限为

$$|x^* - \pi| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

下面我们再来说明有效数字位和误差限之间的关系。

【定义 1.3】 设 x 的近似值 x^* 有如下标准形式:

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_k \times 10^p$$

若其误差限:

$$|e^*| = |x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

则称近似值 x^* 具有 n 位有效数字,这里 p 是一个整数,$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 0~9 中的数字之一,而且假定 $a_1 \neq 0$。

从这里可以看出误差限和有效数字之间的关系,并可通过有效数字来刻画误差限。

【例 1.6】 若 $x^*=3587.64$ 是 x 的具有六位有效数字的近似值,则误差限是:

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{4-6} = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

若 $x^*=0.0023156$ 是 x 的具有五位有效数字的近似值,则误差限是:

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2-5} = \frac{1}{2} \times 10^{-7}$$

1.2.3 相对误差和相对误差限

前面引入的误差和误差限的概念,不能说明近似的好坏程度。例如,工人甲平均生产一百个零件有一个次品,而工人乙则平均生产五百个零件有一个次品。