# 非线性系统的鲁棒控制

冯纯伯 张侃健 编著

科学出版社
www.sciencep.com

# 非线性系统的鲁棒控制

冯纯伯　张侃健　编著

科学出版社

北　京

# 内 容 简 介

本书在无源性分析和耗散性理论的基础上，介绍了非线性系统的主要问题、研究方向和新的结果．

本书共7章．第一章为绪论；第二章为预备知识；第三章讨论系统的耗散性、无源性和正实引理等；第四章讨论系统的稳定性，包括与鲁棒控制系统有关的摄动、串联系统的稳定性和输入-状态的稳定性；第五章讨论控制系统的优化，介绍无源性理论在系统镇定中的应用，重点介绍了近年来发展的递推设计方法；第六章基于无源性理论，介绍了系统具有未建模动态和外扰时的鲁棒控制设计；第七章讨论干扰抑制，对相当广泛的一类非线性系统介绍了抑制干扰实现镇定的问题．

本书可做系统与控制科学、应用数学、工程科学及与之相关的工程应用领域的研究生教材；也可供相关专业的科研人员参考．

**图书在版编目(CIP)数据**

非线性系统的鲁棒控制/冯纯伯，张侃健编著．—北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-013273-4

Ⅰ．非… Ⅱ．①冯…②张… Ⅲ．非线性系统(自动化)-鲁棒控制
Ⅳ．TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第038900号

责任编辑：马长芳 李淑兰 / 责任校对：包志虹
责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张：14
印数：1—2 500 字数：270 000

**定价：28.00元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

# 前　言

对实际动态系统，一般都不可能完全地精确建模，在其数学模型中都应考虑不确定性，这些不确定性包括参数不确定性、未建模动态和各种干扰等.因此，鲁棒控制成为既有实用价值又有理论意义的重要课题，人们对此一直十分重视.目前，对于线性定常系统鲁棒控制的理论和方法已达到较为完善的地步，但对于非线性系统情况则大不相同.非线性动态系统更难精确建模，一个重要原因是能用初等函数表示的非线性特性只是极少数，再加上要考虑各种不确定性的影响，就更为困难了.非线性系统的鲁棒控制是很具有挑战性的理论课题，同时又是具有重大实用价值的课题.严格说来，非线性特性无处不在，只是强弱不同而已.近年来国际文献中讨论非线性系统鲁棒控制的文章逐年增多，并且出版了几本有价值的专著.它们有一些共同性的讨论结果，但方法、理论各有不同，这说明对这一问题的研究尚属发展阶段，留待深入研究的课题还很多.

为了学习和研究这一课题，我们编写了本书.在编写过程中我们参考了有关的重要专著和相关的众多期刊文献，其中也包括了我们近年来得到的一些研究结果.不同的学者处理非线性系统的方法各有不同，我们不可能一一介绍.本书的讨论基本上建立在无源性分析和耗散理论的基础上，在此基础上有便于建立统一的体系.

本书可作为相关专业的研究生教材，也可供有关专业的科技人员参考.为了便于阅读，在本书的第二、三章中提供了必要的预备知识.读者最好先对非线性系统控制理论有所了解，为此可参阅冯纯伯、费树岷编著的《非线性控制系统分析与设计(第二版)》(电子工业出版社，1998年)，或参阅其他中外文教材.

多年来我们的工作一直得到国家自然科学基金的资助，为此向国家自然科学基金委员会表示衷心的感谢.

本书的出版得到中国科学院出版基金委员会的资助，对此表示诚挚的感谢.

限于水平，书中难免会有不少错误和不足，为此热忱地欢迎读者批评指正.

冯纯伯　　张侃健

2003年12月于东南大学

# 目　　录

# 第一章 绪 论

控制系统的设计都要以被控制对象的数学模型为依据，然而严格说来，对任一被控对象建模时都不可能做到完全精确，必然存在不确定性. 这种不确定性包括参数不确定性、结构不确定和各种干扰等，这些不确定性可能是建模之始就存在的，也可能是在系统运行过程中不断变化的. 由于存在不确定性，设计的反馈控制系统必须能够对付这些不确定性，使之对系统的动态性能不会有太大的影响，这就要求控制系统必须鲁棒(Robust). 因此鲁棒控制成为反馈控制理论中的一个重要研究课题. 为了对付系统中的参数不确定性，自适应控制被提了出来，有所谓的模型参考自适应(MRAC)和自校正(STR)控制等. 经过多年的努力，对于线性系统，这方面的理论成果已相当成熟. 自适应控制方法可以在一定条件下对付系统的参数不确定性，其办法是“在线”不断调节控制器的参数，以“适应”系统参数的未预知的改变. 这在原理上和我们要讨论的鲁棒控制有所不同. 我们要研究的鲁棒控制是指如何设计固定不变的控制器，使得当系统的数学模型中存在各类不确定性时仍然能够正常工作，例如仍保持系统稳定，动态性能尚能满足要求，外加干扰的影响仍有限，等等.

对于线性系统的鲁棒控制已有不少丰富的理论成果. Kharitonov 多项式稳定性理论[123]为开展系统参数不确定的分析和设计开辟了一条新路. 此外，为研究结构不确定性，Doyle 等人[47]提出了结构奇异值方法；为综合考虑系统综合不确定性和外加干扰的影响，Zames[247]提出了 $H_\infty$控制问题. 而线性系统的 $H_\infty$控制理论已取得了相当的成果. 对以上所列问题，文献[56]有较系统的介绍.

非线性系统和线性系统相比有本质的差别. 在参数空间中代表线性系统的只是一个点，而对于非线性系统，参数空间的概念已不能适用，影响系统动态特性的是一些非线性函数，这些函数千差万别，且一般说来很难整体确切描述. 因为在广泛的非线性函数中能用初等函数正确描述的非线性函数只是极少数，这给非线性控制系统的鲁棒分析与设计带来极大的困难，因此所取得的成果远没有线性系统鲁棒控制那样丰富和成熟. 但是，非线性系统的鲁棒控制是一个很有实用价值且有很强挑战性的课题，任何实际系统都是非线性的，人们无法回避这个困难. 因此，严格地说，任意系统的反馈控制都应具有一定的鲁棒性，否则在存在非线性时将难以正常工作.

非线性系统虽然在本质上和线性系统不同，但作为动态系统仍有某些相似特性，例如可有相同阶次的动态框架. 一个非线性系统中的非线性特性如果退化为不变的参数，那么原系统和线性情况一样，因此一个“弱”非线性系统的动态特性不至

于脱离其一次线性近似太远. 人们常常参照线性系统的概念来研究非线性系统. 例如,自从微分几何、微分代数等数学方法被引入非线性动态系统分析后,人们参照线性系统理论研究了可控可观性、系统的相对阶、非最小相位问题等取得了相对应的结果. 虽然这些结果并不都和线性系统的情况等价,但它们都是很有价值的具有基础意义的成果. 但也应看到各种数学工具都有其自身的局限性,举例来说,利用微分几何方法对反馈线性化方面取得了很好的成果. 然而实际非线性特征千差万别,能够实现反馈线性化的系统只能是极少数. 这正是非线性系统分析设计的难处所在. 另一方面也应看到,在工业控制中经常采用的 PID 控制在系统呈现弱非线性时仍然能工作得不错,这说明非线性和线性系统的控制并非都是泾渭分明,并非不可互相借鉴. 当然,非线性系统的鲁棒控制要充分考虑非线性系统的特殊情况. 对于某些特定形式的非线性可根据其特殊的特征来进行设计,而对于一般化的难以精确描述的非线性系统,其鲁棒控制更应具有相当强的适应能力,这正是近年来人们研究的重点.

近年来在非线性系统控制领域出现了一些有价值的专著. 例如 P. Kokotovic 及其合作者在文献[116,192]中系统地介绍了他们的工作,其突出之处在于递归设计方法的应用,对一类非线性系统得到了一种构造性的设计方法;A. Isidori 的文献[93]是其名著[92]的后续本,其中介绍了近年来国际上有关非线性系统鲁棒稳定性分析、干扰抑制、$L_2$ 增益控制设计等方面的最新成果;Arjan Vander Schaft 在文献[225]中介绍了非线性系统的无源性、耗散性、增益稳定性等问题,讨论了非线性系统的因子分解、Hamilton 系统以及 $H_\infty$控制的次优设计等. 近年来也出现了许多讨论非线性系统鲁棒控制的文章,这方面的工作方兴未艾.

我们在编写本书时参考了以上所列文献和大量期刊文献,吸收其有益的材料. 然而,非线性系统控制理论远没有线性系统控制理论那样成熟,不同的学者各有自己的观点,侧重点和方法也不尽相同. 同样,本书的取材反映了我们的观点、方法和我们近年来取得的成果,与此同时,也讨论了若干读者可能普遍感兴趣的问题. 我们力求本书能在一个较统一的体系下讨论问题.

全书主要内容如下:

第二章是预备知识. 其中 2.1 节介绍非线性系统的数学模型,2.2 节给出 Lyapunov 稳定性的要义. 我们并未全面地讨论各种数学模型,只是重点介绍在本书中用到的几种模型. 需要指出的是,因方法的不同,所讨论的非线性系统的数学模型形式也不同,且并非都可等价变换,这和线性系统的情况是不同的. 我们不可能一一介绍各种不同的非线性系统的数学模型.

第三章系统地介绍了系统的耗散性、无源性和正实引理等,这些将是本书中处理非线性系统的基本工具.

第四章讨论系统的稳定性. 其中包括与鲁棒控制有关的稳定系统的摄动、串联系统的稳定性和输入-状态稳定性等. 本章中提出了如何用递推反馈形成弱严格无

源的非线性及时变非线性系统，并得到其无源的充分条件. 这种办法可用于研究相当广泛的非线性及时变非线性系统 Lyapunov 稳定的反问题，即讨论这类稳定系统应具有什么样的结构.

第五章讨论控制系统的优化. 介绍了无源性理论在系统镇定中的应用，如何构造控制 Lyapunov 函数，并着重讨论了近年来发展起来的递归设计方法. 在本章的设计中并没有考虑未建模动态和外部干扰，但并不表示本章所提供的设计没有鲁棒性，相反，本章在讨论控制设计时给出了应有的稳定裕度. 本章的讨论也为进一步讨论打好了基础.

第六章介绍系统具有未建模动态和外扰时的鲁棒控制设计. 主要基于无源性理论. 在本章中，除介绍常规的状态反馈外，特别讨论了以无源性分析为基础的鲁棒输出反馈控制设计，包括并联和串联补偿方法.

第七章讨论干扰的抑制. 对相当广泛的一类非线性系统讨论了抑制干扰实现镇定问题，给出了 $L_2$ 增益鲁棒控制设计的基本原理，并讨论了这类问题的解.

我们希望读者能从本书中对非线性系统的鲁棒控制的主要问题、研究方法和新的结果等获得一些基本的了解.

# 第二章 预备知识

本章将介绍有关非线性系统的数学模型和系统稳定性的一些基本概念和结论，为以后的讨论作准备.

## 2.1 非线性系统模型

线性系统有多种不同形式的标准型，且可以相互转化.非线性系统的情况就非常复杂了，对此有多种描述方法，且并不都能相互转化.本节仅对非线性系统模型的基本点作些介绍.其主要参考是文献[54,67,92]等.

### 2.1.1 非线性系统的数学描述

一个非线性系统通常可以采用如下微分方程描述：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t) \\ y(t) &= h(x,u,t) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

其中，状态向量 $x \in R^n$；输出向量 $y \in R^q$；输入向量 $u \in R^p$；$f(\cdot)$和 $h(\cdot)$为相应维数的向量函数.通常称式(2.1.1)中第一式为系统的状态方程，第二式为系统的输出方程.这里的输出 $y$ 有时并不仅仅指整个系统的实际输出，往往还包含了我们所关心的部分状态的量测信号.在讨论输出反馈控制时尤其如此.

本书中，为书写清晰起见，在不影响理解的情况下，我们省略了函数自变量.

需要指出的是，对式(2.1.1)所描述的非线性系统 $H$，我们总假定系统的状态 $x(t)$可由初值 $x_0$ 和输入函数 $u(t)$唯一地确定.至于何时系统满足这一假定，现有的文献讨论较多.例如，当函数 $f(\cdot)$为 $x$ 的连续函数时可依据常微分方程理论，这可参考文献[113]等；当 $f(\cdot)$包含 $\mathrm{sgn}(x)$等不连续函数时，可以参考文献[60]的讨论.另外，我们设 $u(t)$在任何有限时间区间都是有界的.事实上，在任何控制设计中几乎都是这样要求的.在反馈控制设计中，$u(t)$可能是状态 $x(t)$的函数，因此无法预先验证这一假设，但设计后的系统必须满足这一假设.

非线性系统有多种描述方法，有时可以根据不同的研究采用不同的描述方法.如图 2.1.1 所示，我们有时直接用 $y=Hu$ 这种简单的算子描述来表达这一系统，

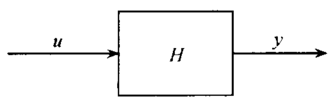


图 2.1.1 系统(2.1.1)的输入输出表示

直接讨论系统的输入输出特性. 值得注意的是，此时系统内部的初始状态 $x_0 = x(0)$没有显示出来，但在分析中我们往往不能忽略这种初始条件. 我们知道，对于线性系统来说，除了状态空间描述，利用微分方程进行输入输出描述也是一种常用手段. 对于非线性单输入单输出(SISO)系统，类似的描述也是值得注意的：

$$y^{(n)} = \varphi(x,z,t) \tag{2.1.2}$$

其中，$x=[y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(n-1)}]^T$；$z=[u \quad \dot{u} \quad \cdots \quad u^{(m)}]^T$. 这里$(\cdot)^{(i)}$指 $i$ 阶导数，$[\cdot]^T$表示转置.

对式(2.1.2)所示系统描述，一般作如下假设：

(1)函数 $\varphi(\cdot) \in C^1$；

(2)满足正则(proper)条件.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^{(m)}} \neq 0$$

显然，式(2.1.2)可以退化为线性系统

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y^{(1)} - a_0 y + b_m u^{(m)} + \cdots + b_0 u$$

通常称式(2.1.2)所示的描述方式为微分输入输出描述. 对此更一般的表达方式是所谓的微分代数描述，我们对此不作讨论，有兴趣的读者可以参见文献[54]. 系统(2.1.2)满足上述条件(1)，(2)时被称为正则的.

我们知道，对于线性系统，输入输出描述和状态空间描述在一定条件下可以相互转化. 对非线性系统，有时也有类似的转换. 如对 SISO 系统(2.1.2)，若定义

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T = [y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(n-1)}]^T$$

并进一步增广 $m$ 个积分器到系统的输入端，定义积分器状态

$$z = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_m]^T = [u \quad \dot{u} \quad \cdots \quad u^{(m-1)}]^T, \quad v = u^{(m)}$$

则系统(2.1.2)可以转化为

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \\
&\dot{x}_n = \varphi(x,z,v,t) \\
&\dot{z}_j = z_{j+1}, \quad j = 1,2,\cdots,m-1 \\
&\dot{z}_m = v \\
&y = x_1
\end{aligned}$$

显然这就成了系统(2.1.1)的特殊形式. 反过来，在所谓的弱可观测情况下，文献[119]也证明了形如(2.1.1)的 SISO 系统可以局部转化为系统(2.1.2). 很明显，上述实现对应于线性系统不是最小实现. 事实上，对非线性系统来说，不同系统描述间的转换有时相当复杂，而且并不总是能够实现的，对此比较详细的讨论可以参考文献[54]. 本书对此不作深入讨论.

式(2.1.1)可以说代表了最一般化的非线性控制系统. 若式(2.1.1)中函数 $f(\cdot)$不显含时间 $t$，则称系统(2.1.1)为时不变系统. 此时系统变为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u) \\ y(t) &= h(x,u) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

这也将是本书主要讨论的系统模型.

系统(2.1.3)表达了相当广泛的一类非线性系统,它包含了以下几种常见的特殊情形:

(1) 仿射非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) + j(x)u \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

(2) Lurie 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(u) \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

(3) 静态非线性系统

$$y = \varphi(u) \tag{2.1.6}$$

(4) 线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

可以看到,仿射非线性系统(2.1.4)中的状态方程和输出方程关于输入 $u$ 是线性的,而对状态是非线性的.线性系统本身也是仿射非线性系统的特殊情形.在静态非线性系统(2.1.6)中,输出直接是输入的某个函数,没有内部状态.系统(2.1.5)是一类广为讨论的含非线性控制的系统,它可以看成静态非线性系统和线性单变量系统的串连连接.

### 2.1.2 非线性系统的基本特性

针对仿射非线性系统(2.1.4),下面给出一些重要的几何概念.这些概念在我们今后的讨论中常常需要提到.以下记号 $L_f^k h(x)$ 为通常的 Li 导数运算,读者可以参考文献[54].

**定义 2.1.1** 若 SISO 系统(2.1.5)在 $x=x_0$ 的一个邻域内满足

(1) $L_g L_f^k h(x)=0, k=0,1,\cdots,r-2$;

(2) $L_g L_f^{(r-1)} h(x_0)\neq 0$,

则称该系统在 $x=x_0$ 处具有相对阶 $r$.

**定义 2.1.2** 对系统(2.1.5),若 $x\in R^n$;$u,y\in R^m$,且在 $x=x_0$ 的一个邻域内满足

(1) $L_{g_j} L_f^k h_i(x)=0, 1\leqslant i,j\leqslant m, k<r_i-1$;

(2) $m\times m$ 矩阵 $R(x_0)$ 非奇异,

则称该系统在 $x=x_0$ 处具有相对阶 $(r_1,\cdots,r_m)$.又若 $r_1=r_2=\cdots=r_m$,则称多输入多输出(MIMO)系统(2.1.5)具有相对阶 $r_1$.这里

$$R(x)=\left(\frac{\partial y_i^{(r_i)}}{\partial u_j}\right)=\begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{r_m-1}h_m(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

显然，定义 2.1.2 退化为 SISO 系统即为定义 2.1.1. 这里单独列出是因为 SISO 系统有着特殊的地位，有助于理解. 若线性系统(2.1.7)是 SISO 的，当 $D\neq 0$，则系统的相对阶即为 0. 当 $D=0$ 时，系统的相对阶 $r$ 满足

$$CA^kB=0,0\leqslant k\leqslant r-2 \text{ 和 } CA^{r-1}B=0$$

从线性系统频域描述来看，SISO 系统的相对阶即为传递函数极点和零点的差. 需要指出，对非线性系统来说，定义 2.1.1 和 2.1.2 都是定义在 $x=x_0$ 的一个邻域内的局部概念. 如果定义中(1)和(2)都全局成立，则此时称非线性系统具有全局相对阶. 和线性系统不同，非线性系统有时可能不存在相对阶，如系统 $\dot{x}=u,y=\sin x$，在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处就不存在相对阶.

对在 $x=x_0$ 处具有相对阶$(r_1,\cdots,r_m)$的系统(2.1.4)，存在坐标变换

$$(\xi,z)=T(x) \tag{2.1.8}$$

可使系统变为一种特殊的结构形式

$$\begin{aligned}
&\dot{z}=q(z,\xi)+\gamma(z,\xi)u\\
&\dot{\xi}_1^i=\xi_2^i\\
&\vdots\\
&\dot{\xi}_{r_i-1}^i=\xi_{r_i}^i,\quad i=1,2,\cdots,m\\
&\dot{\xi}_{r_i}^i=a_i(z,\xi)+\sum_{j=1}^m b_{ij}(z,\xi)u_j\\
&y_i=\xi_1^i
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

对式(2.1.8)，一种可能的变换是取

$$T_1^i(x)=\xi_1^i(x)=y_i,\quad T_2^i(x)=\xi_2^i(x)=L_fh_i(x),\cdots,\xi_{r_i}^i(x)=L_f^{r_i-1}h_i(x)$$

并补上 $n-\sum_{i=1}^m r_i$ 个函数 $T_{r+1}(x),\cdots,T_n(x)$ 使得 $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ 非奇异.

有关以上变换的详细讨论，读者可以参考文献[92,192]. 通常称式(2.1.9)为系统(2.1.5)的规范型(Normal Form). 在一些特殊情况下，例如对 SISO 系统，通过选择适当的坐标 $z$ 可以使式(2.1.9)中 $\gamma(z,\xi)=0$.

非线性系统的另外一种较为重要的形式是所谓的严格反馈型[61,192]，它具有如下结构形式：

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}=f(\eta)+g(\eta)\xi_1\\
&\dot{\xi}_1=a_1(\eta,\xi_1)+b_1(\eta,\xi_1)\xi_2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{n-1} = a_{n-1}(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) + b_{n-1}(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1})\xi_n$$
$$\dot{\xi}_n = a_n(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_n) + b_n(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_n)u \tag{2.1.10}$$

这种系统实际上是仿射非线性系统的特殊情形. 该系统具有特殊的下三角结构,称它为严格反馈型是由于系统具有特殊的反馈形式. 即系统(2.1.10)中第二个等式的状态是第一个等式所描述的子系统的输入,并可逐级下推. 这为递归设计提供了条件. 并非所有非线性系统都可写成式(2.1.10)的形式,但相当广泛的一类非线性系统可以完成这种转换. 对何时系统可以通过变换转化为系统(2.1.10),读者可以参考文献[92].

显然,系统(2.1.10)可以通过坐标变换为(2.1.9)的形式,而 SISO 系统(2.1.9)在去掉第一式后即为式(2.1.10)的特殊情况. 但系统(2.1.9)中的第一式

$$\dot{z} = q(z, \xi) + \gamma(z, \xi)u \tag{2.1.11}$$

对系统有着重要的影响. 当系统(2.1.9)的输出 $y$ 保持为 0 时,即 $\xi(0)=0$ 且

$$u = -b^{-1}(z, 0)a(z, 0) \tag{2.1.12}$$

时,系统(2.1.9)的子系统(2.1.11)变换为

$$\dot{z} = q(z, 0) - \gamma(z, 0)b^{-1}(z, 0)a(z, 0) =: f_{zd}(z) \tag{2.1.13}$$

上式中的状态实际上是系统(2.1.9)限制在 $y(t)\equiv 0$ 上的动态情况,因此有以下定义:

**定义 2.1.3** 称系统(2.1.13)为系统(2.1.9)的零动态子系统,称(2.1.13)中的状态为系统(2.1.9)的零动态.

**定义 2.1.4** 若系统(2.1.9)的零动态子系统是稳定的,则称系统(2.1.9)是弱最小相位的. 若系统(2.1.9)的零动态子系统是渐近稳定的,则称系统(2.1.9)是最小相位的.

对 SISO 线性系统 $G(s)$,从频域的角度来看,其零动态子系统由 $G(s)$的分子多项式所决定,即由 $G(s)$的零点所决定. 对线性系统(2.1.7),一个众所周知的结论是状态反馈不改变系统的零点,也就是说,状态反馈不改变系统的零动态. 对非线性系统也有相同的结论. 非线性系统的零动态和所选择的坐标变换没有任何关系,状态反馈也不改变系统的零动态. 也就是说,非线性系统零动态子系统(2.1.13)具有结构不变性. 对此,更为详细的讨论可以参考文献[192].

本节介绍了非线性动态系统的基本数学描述及其若干基本特征,为以后的讨论提供了预备知识. 非线性动态系统可有多种描述方法,或者说可采用多种数学工具来研究非线性系统,不同的数学模型研究不同的问题可能更为方便,在本书中不能一一介绍,读者可以参阅相关文献.

## 2.2 Lyapunov 稳定性要义

稳定性是系统的重要特性. 下面我们主要介绍稳定性分析中应用最广的 Lyapunov 稳定性.本节的主要参考文献是[93,135,192].

### 2.2.1 $K$ 类函数

记 $I_a=[0,a)$,$\bar{I}_a=[0,a]$;$B_d$ 表示以零为中心,$d$ 为半径的球;$C^i$ 表示所有 $i$ 阶连续可微函数集.

**定义 2.2.1** 连续函数 $\alpha: I_a \mapsto I_\infty$,若 $\alpha(\cdot)$严格单增,且有 $\alpha(0)=0$,则 $\alpha$ 称为 $K$ 类函数,记为 $\alpha\in K$.又若 $a=\infty$且 $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$,则称 $\alpha(\cdot)$为 $K_\infty$类函数,记为 $\alpha\in K_\infty$.

**定义 2.2.2** 连续函数 $\beta: I_a\times I_\infty\mapsto I_\infty$,若对任意固定 $s\in I_\infty$,函数 $\beta(\cdot,s)\in K$,且对任意固定 $r\in I_a$,$\beta(r,\cdot)$单减,$\lim\limits_{s\to\infty}\beta(r,s)=0$,则 $\beta$ 称为 $KL$ 类函数,记为 $\beta\in KL$.

$K$ 和 $KL$ 类函数有许多重要的性质:

(1) 两个 $K(K_\infty)$类函数的复合函数仍为 $K(K_\infty)$类函数.即

$$\alpha_1\in K,\alpha_2\in K\Rightarrow\alpha_1\circ\alpha_2\in K$$
$$\alpha_1\in K_\infty,\alpha_2\in K_\infty\Rightarrow\alpha_1\circ\alpha_2\in K_\infty$$

其中,$\alpha_1\circ\alpha_2$ 为复合函数.

(2) 对定义于 $I_a$ 上的 $K$ 类函数 $\alpha(r)$,若$\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=b$,则存在唯一的函数 $\alpha^{-1}: I_b\mapsto I_a$使得

$$\alpha^{-1}(\alpha(r))=r,\quad \forall\, r\in I_a$$
$$\alpha(\alpha^{-1}(r))=r,\quad \forall\, r\in I_b$$

成立,且 $\alpha^{-1}\in K$.即 $K$ 类函数的反函数为 $K$ 类函数.

(3) 若 $\beta\in KL$ 且 $\gamma,\theta\in K$,则 $\gamma(\beta(\theta(r),s))\in KL$.

(4) 若 $\beta(r,s)$为 $I_a\times I_\infty$上的 $KL$ 类函数,则存在函数 $\gamma,\theta\in K_\infty$,使得

$$\beta(r,s)\leqslant\gamma(e^{-s}\theta(r)),\quad \forall\,(r,s)\in I_a\times I_\infty$$

成立.

(5) 若 $\alpha(y)$为 $I_a$ 上的 $K$ 类函数,且满足局部 Lipschitz 条件,则对任意初始状态 $x_0\in I_a$,微分方程

$$\dot{y}=\alpha(y)$$

存在唯一的解 $y(t)=\varphi(x_0,t)$,且 $\varphi\in KL$.

以上性质(1)-(3)可以直接进行验证,性质(4)和(5)可以参考文献[122].

$K$ 类函数在 Lyapunov 稳定性研究中有着重要的作用,它和正定函数之间存在密切的联系[136]:

**命题 2.2.1** 设 $\|x\|\leqslant d$,则 $W(x)$为连续正定函数的充分必要条件为存在 $\varphi_1,\varphi_2\in K$ 使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant W(x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$$

$V(x)$为无穷大连续正定函数的充分必要条件是存在 $\varphi_1,\varphi_2\in K_\infty$使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$$

成立.这里函数 $W(x)$正定指 $W(x)>0,x\neq0$ 且 $W(0)=0$;函数 $V(x)$无穷大指 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}V(x)=\infty$.

### 2.2.2 Lyapunov 稳定性

在研究系统的 Lyapunov 稳定性问题时,通常限于研究没有外输入作用时的系统.下面我们考虑时不变非线性系统:

$$\dot{x}=f(x) \tag{2.2.1}$$

其中,$x\in R^n$;$f(0)=0$ 且函数 $f(x)$满足局部 Lipschitz 条件.这里我们直接假设零点是系统(2.2.1)的一个孤立平衡状态,即系统在零点的充分小的邻域内只有零点这一个平衡状态.下面将引入著名的 Lyapunov 方法来判断系统(2.2.1)的稳定性和渐近稳定性.这里仅对零平衡状态给出稳定性判据是不失一般性的,因为任何孤立非零平衡状态的稳定性问题都可以通过简单的变换加以转化.下面先给出 Lyapunov 稳定性定义.

**定义 2.2.3** 称系统(2.2.1)的平衡状态 $x=0$ 是稳定的,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得对任意初始状态 $x(t_0)=x_0$, $\|x_0\|\leqslant\delta$,从 $t_0$ 时刻出发的系统的轨迹 $x(t,x_0)$满足

$$\|x(t,x_0)\|<\varepsilon,\quad\forall\, t\geqslant t_0$$

又若进一步存在正数 $\sigma>0$,当 $\|x_0\|<\sigma$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0)\|=0$$

则称系统(2.2.1)的零平衡状态是渐近稳定的,此时称 $B_\sigma$ 为其吸引域.再若 $B_\sigma=R^n$,即吸引域为整个状态空间时,则称系统(2.2.1)的零解是全局渐近稳定的.

**定义 2.2.4** 称系统(2.2.1)的零解是局部指数稳定的,若存在常数 $\lambda>0$,$M>0$ 和 $\delta>0$,使得对任意初始状态 $x(t_0)=x_0$, $\|x_0\|\leqslant\delta$,从 $t_0$ 时刻出发的系统的轨迹 $x(t,x_0)$满足

$$\|x(t,x_0)\|<M\|x_0\|e^{-\lambda t},\quad\forall\, t\geqslant t_0$$

从定义也可以看出,系统零解的稳定,实际上就是系统在偏离零平衡状态后的受扰运动能依靠系统内部结构因素而限制在零解的一个有限邻域内,甚至趋向于平衡状态.上述定义也可用于时变系统,所不同的是定义中正数 $\delta$ 的选取可能和初始时刻 $t_0$ 有关.此时当正数 $\delta$ 与初始时刻无关时,称系统的零解是一致稳定的.对于式(2.2.1)所描述的时不变系统,零解的稳定和一致稳定是等价的.从实际角度出发,我们通常要求系统一致稳定,以便任何时刻出现的受扰运动都具有相同的 Lyapunov 稳定性.

**定理 2.2.2** 设 $V:B_d\mapsto R$ 上的 $C^1$ 函数,且存在定义于 $I_d$ 上的两个 $K$ 类函

数 $\underline{\alpha}(\cdot)$和 $\bar{\alpha}(\cdot)$满足

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \bar{\alpha}(\|x\|), \quad \forall \|x\| < d \tag{2.2.2}$$

若

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leqslant 0, \quad \forall \|x\| < d \tag{2.2.3}$$

则系统(2.2.1)的零解是稳定的.又若存在定义于 $I_d$ 上的 $\alpha \in K$ 使得

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leqslant -\alpha(\|x\|), \quad \forall \|x\| < d \tag{2.2.4}$$

则称系统(2.2.1)的零解渐近稳定.进一步,若 $d=\infty$ 且函数 $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in K_\infty$,则称系统(2.2.1)的零解是全局渐近稳定的.

**证明** 根据式(2.2.3),只要系统(2.2.1)的解 $x(t)$存在,必有 $V(x)$单调不增,即

$$V(x) \leqslant V(x_0)$$

设 $\varepsilon < d, \delta < d$,定义

$$\delta = \bar{\alpha}^{-1}(\underline{\alpha}(\varepsilon))$$

则根据 $\|x_0\| \leqslant \delta$,由式(2.2.2)可得

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant V(x_0) \leqslant \bar{\alpha}(\|x_0\|) \leqslant \bar{\alpha}(\delta) = \underline{\alpha}(\varepsilon)$$

根据 $K$ 类函数的定义即知

$$\|x\| \leqslant \varepsilon$$

成立.

又若式(2.2.4)满足,设 $\theta(\cdot) = \alpha(\bar{\alpha}^{-1}(\cdot))$,则根据式(2.2.2)、式(2.2.4)和 $K$ 类函数定义,即得

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\theta(V)$$

不失一般性,我们可以假设 $\theta(\cdot)$满足局部 Lipschitz 条件,否则 $\theta(\cdot)$可以用任何局部 Lipschitz 的函数 $\bar{\theta}(r) \leqslant \theta(r)$代替.这样根据 $K$ 类函数的性质(5),微分方程 $\dot{y} = -\theta(y)$存在唯一的从 $y_0 = V(x_0)$出发的解 $y(t)$,且存在 $\varphi \in KL$ 满足 $y(t) = \varphi(V(x_0), t)$.根据微分方程的比较定理有

$$V(x) \leqslant \varphi(V(x_0), t)$$

从而进一步利用式(2.2.2)得

$$\|x\| \leqslant \underline{\alpha}^{-1}(\varphi(\bar{\alpha}(\|x_0\|), t)) \tag{2.2.5}$$

根据 $K$ 类函数有性质(3)可知,上式右端是以 $\|x_0\|$ 和 $t$ 为参数的 $KL$ 类函数,从而根据 $KL$ 类函数的性质即可知系统(2.2.1)的零解是渐近稳定的.

若 $d=\infty$ 且函数 $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in K_\infty$,则上述推导对任意 $x_0$ 都成立.从而系统(2.2.1)的零解是全局渐近稳定的. □

我们知道,以上 Lyapunov 判据在很大程度上具有可逆性.这里我们不加证明