青年数学叢書

直园柱

米拉基揚著

中国青年出版社

直 圓 柱

〔苏〕米拉基揚著
何仁炯譯

*

中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售

*

787×1092 1/32　1 3/8印張　20,000字
1957年1月北京第1版　1957年1月北京第1次印刷
印数 1—30,000

統一書号：13009·108

定价(8)一角五分

青年数学叢書

直 圓 柱

米拉基揚著
何仁炯譯

中国青年出版社
1957年·北京

內容提要

直圓柱在技术上应用得很多，在日常生活中，也常常碰到直圓柱的例子。跟直圓柱有关的，有很多有趣的东西。这本小册子前三節研究了跟直圓柱有关的三种曲綫——螺旋綫、橢圓和正弦曲綫；接下去四節研究了跟直圓柱有关的四个实际問題：計算在傾斜的圓柱容器里盛水的体积問題，圓柱轉动时的动能和轉动慣量問題，圓柱容器底下漏水快慢的問題以及全面积一定的圓柱什么时候体积最大的問題；最后一節从圓柱面討論了这样一个問題：曲面的面积是不是可以看做內接于曲面的多面体当面数无限增多、而各个面的面积无限縮小时的面积的極限？用到的知識不超出中学数学的范圍，虽然有些問題实質上是高等数学的問題。

Г. М. МИРАКЬЯН
ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР
ГОСТЕХИЗДАТ
МОСКВА, 1955

譯者的話

譯完了这本小册子，我想跟讀者簡單地交流一下学习心得。

这本小册子是苏联技术理論書籍出版社出版的一套“数学通俗講演”里的一本。我認为学习这类数学小册子的好处，首先就在：它可以使我們更深刻地認識到，数学并不是枯燥的空理論，而是和生产有紧密的联系的。数学生动地反映着客观規律，是我們建設事业不可缺少的工具。例如在这本小册子里，我們可以看到，正弦曲綫是做弯管的时候需要用到的；研究了求极大值的方法，就能为国家节省資金，等等。这些例子，都会使我們很自然地和“枯燥”的数学发生感情。

此外，通过这类小册子的学习，我們可以很有兴趣地来复习中学数学里講到的东西。例如在这本小册子里，我們会复习到直圓柱的公式和級数等等問題。同时，在这类小册子里常常很自然地引入一些高等数学的基本概念。例如在这本小册子里，就提到了螺旋綫、測地綫、橢圓、极限等等的基本概念，对將来学习高等数学是很有帮助的。所以我認为，这类小册子是在初等数学的基础上向高等数学进軍的跳板。希望讀者在学习中有所收获。

何仁炯 1956年4月6日

原　　序

这本小册子的基础是我在 1953 年三月对参加第十二届敖德薩中学高年級数学竞賽会的学生所做的講演．竞賽是在敖德薩国立梅契尼科夫大学物理数学系組織下进行的．上述講演稿的內容只包括象这本小册子的第二、第五和第八节里所講的那些，其余各节也很有趣，当然，要把它們都放在一次兩小时的講演里，那是不可能的．

这本小册子的內容，九年級和十年級① 的同学是完全可以領会的，因为解答問題所用的方法并沒有超出中学数学的范圍，虽然实質上这些問題是高等数学的問題．

在这里，我認为必須向对这本小册子提供了宝貴改进意見的吉洪諾娃同志致謝．

Г. М. 米拉基揚

① 相当于我国高中二年級和三年級．——譯者注

前　言

从中学几何課本知道，柱面是由一条直綫（母綫）沿着某一条曲綫（准綫）作平行于已知方向的移动而得到的.

假如准綫是个圓，而母綫垂直于这个圓的平面，那么我們得到的就是一个直圓柱. 换句話說，可以給直圓柱下这样一个定义：直圓柱是互相平行的兩条直綫中的一条繞着作为轉动軸的另一条轉动所形成的面.

兩个垂直于直圓柱軸的平面截直圓柱而得到的直圓柱的一部分，也叫做直圓柱；这时候，这兩个平面之間的距离叫做直圓柱的高.

从中学几何課本还知道，底半徑是 R、高是 H 的圓柱体，体积等于

$$\pi R^2 H,$$

側面积等于

$$2\pi RH,$$

而全面积等于

$$2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R).$$

自然会发生这样一个問題：关于直圓柱还有什么該知道的呢？

初看起来，好象关于直圓柱的所有东西，这就都說完了. 但是，实际上幷不是这样. 从这本小册子，讀者就会知道，跟

直圓柱这种看来这么簡單的几何面有关的，还有很多有趣的东西哩.

要知道，直圓柱在技术上应用的很多；在日常生活中，我們也常常会碰到直圓柱的例子. 机械和机器上的軸、軸承的表面、飞輪的輪緣、各种管子的側面、石油槽，以至罐头和卷筒紙——所有这些东西，都有直圓柱的形状.

下面我們就把直圓柱簡称做圓柱.

一

把底半徑是 R、高是 H 的直圓柱，沿它的一条母綫切开，然后把这个面攤平；这时候，我們得到了一个底是 $2\pi R$、高是 H 的矩形. 这个矩形就叫做这个圓柱在平面上的展开面. 这种展开面用其他方法也可以得到，用不着把圓柱切开. 假設在一个圓柱的表面新涂了一层顏料，把它放在一个平面上，沿着一条母綫和平面相接触. 現在，把圓柱沿着平面沒有滑动地滚动一周；那么，在平面上就会出現圓柱面的印迹，它的形状是一个底等于 $2\pi R$、高等于 H 的矩形，也就是前面所說的展开面. 反过来說，每一个底等于 a、高等于 b 的矩形，都可以看做是高等于 b、底半徑等于 $\frac{a}{2\pi}$ 的直圓柱的展开面.

容易看出，半徑等于 R 的无限圓柱的展开面，是包含在相距等于 $2\pi R$ 的兩条平行綫之間的一部分平面.

应該指出，并不是所有的面都能在平面上展开，例如球面就不能在平面上展开. 直圓錐却可以在平面上展开；这里展开面是一个扇形.

以后我們就要用到圓柱的展开面。

現在，先来介紹一条跟圓柱有直接关系的曲綫。

在半徑是 R 的圓柱上取圓 ABC，这个圓位于跟圓柱軸垂直的平面上；把直角三角形 KEC 繞在圓柱上，使直角边 CE 繞在圓 ABC 上；那么斜边 CK 在圓柱上就形成了一段曲綫，这段曲綫叫做螺旋綫(图 1)。

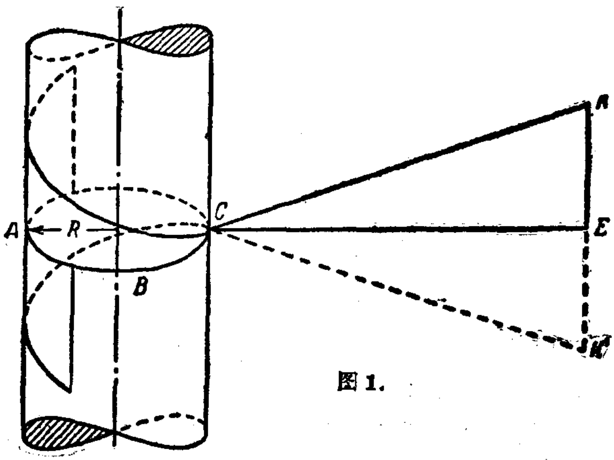


图 1.

把三角形 KCE 繞直角边 CE 旋轉 180°，再把它繞在圓柱上，繞的方向跟三角形 KCE 第一次繞的相反；那么就得到了另一段螺旋綫，这段螺旋綫是起先得到的那一段的延續(在图 1 上三角形 KEC 的第二个位置用 CEK' 来表示)。如果无限增長直角边 CE，就得到整条的螺旋綫。

螺旋綫跟同一条母綫相交的前后兩点之間的綫段，叫做螺綫圈。母綫上这样兩点間的距离，叫做螺距。角 KCE 叫做螺旋角，用 α 来表示。为了求出螺綫圈的長 l 和螺距 h，請看

直角三角形 CE_0K_0，它的直角边 CE_0 等于 $2\pi R$，而角 K_0CE_0 等于螺旋角 α（图 2）．容易看出，斜边 K_0C 等于螺綫圈的長 l，而直角边 K_0E_0 等于螺距 h．

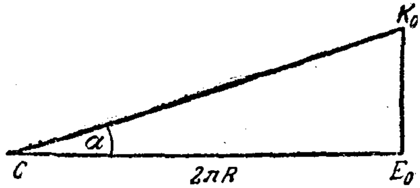


图 2.

因此得到公式

$$l = \frac{2\pi R}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

$$h = 2\pi R \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

螺旋綫有右螺旋和左螺旋兩种．假設有一个点，沿着螺旋綫运动．螺旋綫在垂直于它的軸（螺旋綫所繞的圓柱的軸，就叫做螺旋綫的軸）的平面上的射影，显然是个圓．因此，假如按軸的方向对着螺旋綫看，那么就会看見这个点是沿着圓在运动．假如这个点順时針方向沿着圓运动的时候是逐渐离我們远去的，这种螺旋綫就叫做右螺旋綫；假如它順时針方向运动的时候跟我們越来越接近，这种螺旋綫就叫做左螺旋綫．在同一个圓柱上，螺旋角相同的右螺旋綫和左螺旋綫是不可能重合的．在图 1 上我們得到的是左螺旋綫；假如要得到右螺旋綫，应該把三角形按相反的方向繞起来．

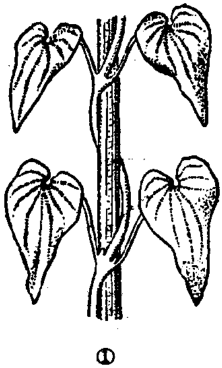
在自然界里，蔓生植物的卷須是具有螺旋綫的形狀的．象葡萄、蛇麻草、菜豆、豌豆等等植物的卷須，都可以作为例子．同时在卷須纏繞时，假如支杆在它的左边，就形成右螺旋

綫；假如在卷須运动时（卷須在空間描出一个圓錐，就是所謂卷須的轉头运动），碰到竪直的支杆在右边，那么，卷須就沿着支杆繞成左螺旋綫。

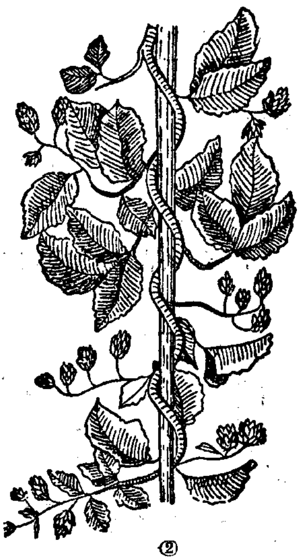
至于蔓生植物的莖，也能沿着支杆繞成螺旋綫；不过它們每一种都是按着一定方向繞卷的。大部分蔓生植物都繞成右螺旋綫，例如菜豆、牽牛花和甘薯等都是；繞成左螺旋綫的，有蛇麻草和忍冬。

在物理学上和技术上，我們也常常会碰到螺旋綫的例子。

感应綫圈上的每一层导綫都具有螺旋角很小的螺旋綫形狀。車床在匀速走刀的情况下車圓柱，圓柱上留下的痕迹就呈螺旋綫形狀。圓柱形麻花鑽头的切削刃也具有螺旋綫的形狀。各种安裝螺絲和調整螺絲、螺栓和螺帽上的螺紋都是螺旋綫（通常都采用右螺旋紋）。飞机作直綫匀速飞行的时候，它螺旋槳



①



②

图3. 1，甘薯的莖，繞成右螺旋綫；2，蛇麻草的莖，繞成左螺旋綫

上的点描繪着螺旋綫．远洋輪船和小汽艇的螺旋推进器上的点也描繪着螺旋綫．拔瓶塞用的螺旋錐上也有螺旋綫．飞机"进入螺旋"的时候，机翼上的点描繪着螺旋綫．来复枪彈和炮彈在作直綫勻速飞行的时候，它們表面上的点也都描繪着螺旋綫．上面所举科学技术性質的例子，在計算的时候都要用到螺旋綫的这个或者那个性質．这些例子，在数量上和性質上都可以說明螺旋綫在实际应用上的重要性．

現在我們来研究一下螺旋綫的某些性質．

試証明螺旋綫在平行于螺旋綫軸的平面上的射影，是一条正弦曲綫．

假設螺旋綫是在半徑 R 的圓柱上，螺距是 h． 为了証明上述論断，显然只要研究一个螺綫圈就够了．設 $OMM_1M_2P_3$ 是一个螺綫圈，它在長是 h 的"一段"圓柱上；而 $OPP_1P_2P_3$ 是它在沿母綫 OP_3 和圓柱相切的平面上的射影（图 4）．在切面上取直角坐标，O 是原点，母綫 OP_3 作 Ox 軸，而 Oy 軸在 O 点垂直于 OP_3．

用 P 来代表螺綫圈上任意一点 M 的射影．从 P 点引 Ox

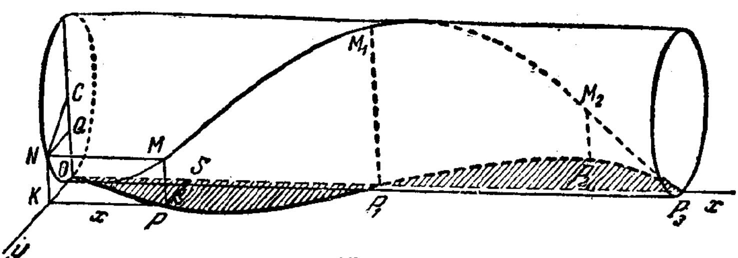


图 4.

軸的垂綫 PS，并用 x 来代表綫段 OS 的長，用 y 来代表垂綫 PS 的長；那么，P 点的横坐标是 x，縱坐标就是 y. 当 P 点沿着螺旋綫的射影移动的时候，它的坐标 x 和 y 也随着在改变；同时，它們之間还有某种关系. 这种关系就是我們所要确定的.

作出 M 点和 P 点在圓柱底平面上的射影，得到 N 点和 K 点(图 4). C 点是底面的圓心. 連接 C 点和 N 点，并从 N 点引直綫 OC 的垂綫 NQ. 可以看出，$NM=KP=OS=x$，还有，$QN=OK=SP=y$. 把圓柱面的 NOM 部分展开，就得到直角三角形 NOM（在图 5 上，三角形 NOM 的尺寸是放大了一倍）.

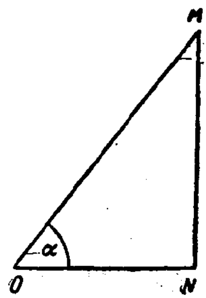


图 5.

角 MON 等于螺旋角 α，可以从等式(2)来确定：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{2\pi R}.$$

从图 5 可以求出直角边 ON：

$$ON=MN\operatorname{ctg}\alpha=x\operatorname{ctg}\alpha=x\frac{2\pi R}{h}.$$

現在，很容易求出圓心角 OCN（图 4）的弧度了，也就是 $\angle OCN=\frac{\overset{\frown}{ON}}{R}=x\frac{2\pi R}{h}\div R=\frac{2\pi x}{h}$. 再說在直角三角形 CQN 里，已知斜边 $CN=R$ 和銳角 $OCN=\frac{2\pi x}{h}$，可以求出直角边 NQ：

$$NQ=CN\sin\angle OCN=R\sin\frac{2\pi x}{h}.$$

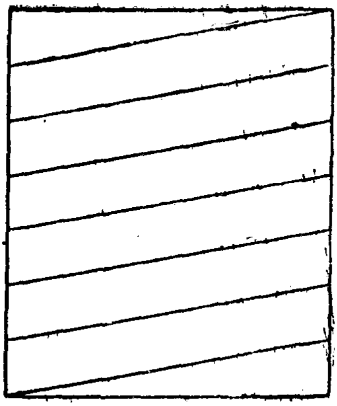


图 6.

因为$NQ=y$，所以

$$y=R\sin\frac{2\pi x}{h},$$

也就是說，螺旋綫的射影是一条正弦曲綫.

假如把上面刻有螺旋綫的圓柱面沿它的某一条母綫切开，然后攤在平面上，那么在展开面上螺旋綫就成一組互相平行和等距离的斜綫段(图 6).

現在，我們来解这样一个問題.

假如在圓柱面上F点停着一只蜘蛛，在G点停着一只蒼蝇(图 7).

請問，蜘蛛沿着哪条路綫向蒼蝇爬去路程最短——FIG、$FIIG$或$FIIIG$呢，还是沿着其他連接F点和G点的路綫?

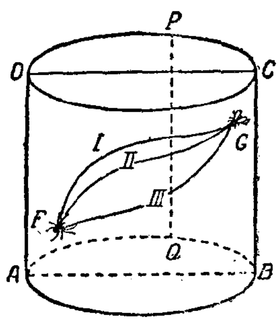


图 7.

在解答問題时，我們把下列情况除外，就是当 F 点和 G 点在同一条母綫上，或者在垂直于圓柱的軸的平面上的一个圓周上．很容易看出，在第一种情况下，最短的路綫是沿着这一段母綫爬；在第二种情况下，是沿着圓周的劣弧爬．

設通过圓柱軸的平面 $ABCD$ 把圓柱分隔成兩半，使蜘蛛和蒼蝇在同一半圓柱上．然后，沿着另一半上的某一条母綫 PQ 把圓柱面切开，現在我們轉到这个展开面上去研究（图8）．

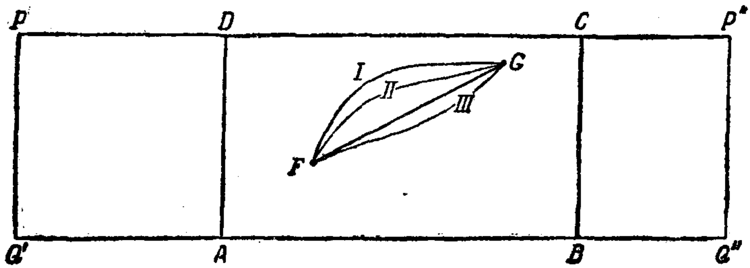


图 8.

在平面上，兩点間的最短路綫是通过这兩点的一段直綫；因此引直綫 FG，并且把矩形 $P'Q'Q''P''$ 重新卷成圓柱．在这种情况下，綫段 FG 并不改变長度，却变成了一段螺旋綫．因此，在圓柱面上的最短路綫是螺旋綫．所以，蜘蛛应該沿着連接 F 和 G 的螺旋綫向蒼蝇爬去．

但是，并不是所有通过 F 点和 G 点的螺旋綫都是最短的路綫；經过 F 点和 G 点可以引无限多的螺旋綫，它們在 F 点和 G 点之間圈数不同，方向也不一样（图 9 是其中的几个例子）．

然而，这些螺旋綫段都不是上述問題所要求的答案．

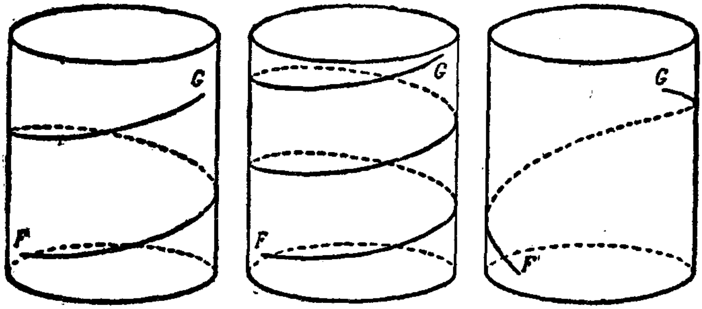


图 9.

螺旋綫、母綫、垂直于圓柱軸的截面上的圓都是直圓柱上的測地綫①，它們就好象平面上的直綫和球上的大圓一样．这儿应該指出，虽然在曲面上（例如在圓柱上）最短的綫是測地綫，而測地綫并不一定都是最短的綫（就象我們知道的，圓柱上兩点之間可以引出一些螺旋綫，它們并不是最短的綫）．

二

在这一节里，我們要討論用平面截圓柱所得的截綫．

我們先来談談叫做橢圓的曲綫．橢圓是平面上到兩定点的距离的和等于常量而且大于这兩点之間的距离的点的軌迹．这兩个定点叫做橢圓的焦点（在图10上，焦点用 F_1 和 F_2 来表示，点 M、M_1、M_2、M_3 在橢圓上）．

根据上述的定义，很容易作出橢圓．把一条定長的綫的

① 測地綫也叫短程綫。測地綫的理論是在高等数学課程——曲面論和变分法里研究的。

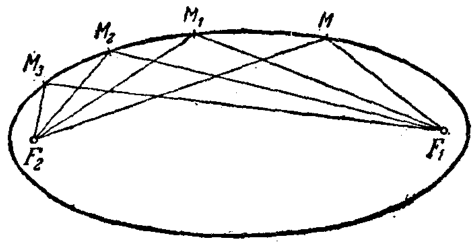


图 10.

兩头固定在兩个定点——焦点 F_1 和F_2 上，然后用削尖的鉛笔把綫拉开，使鉛笔在紙上滑动并随时保持綫段張紧(图11)。这样做的結果就会描出一条閉合曲綫(为了得到閉合的曲綫，当綫碰到釘子的时候，可以把綫拿到另一边去)，这条閉合曲綫是一个橢圓，因为，这条曲綫上的任意一点到 F_1 和F_2 兩点的距离的和等于常量，也就是等于这段綫的長。

圓可以看做是橢圓的一种特殊情况。当 F_1 和F_2 兩点重合的时候，就得到圓。

現在我們分別确定用平面截圓柱所得的各种截綫如下：

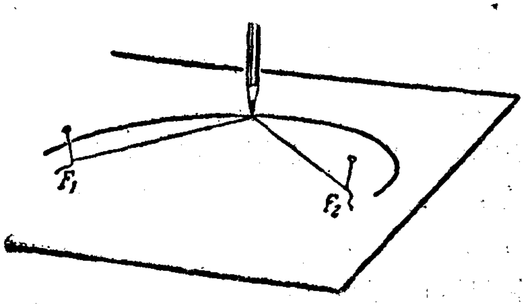


图 11.