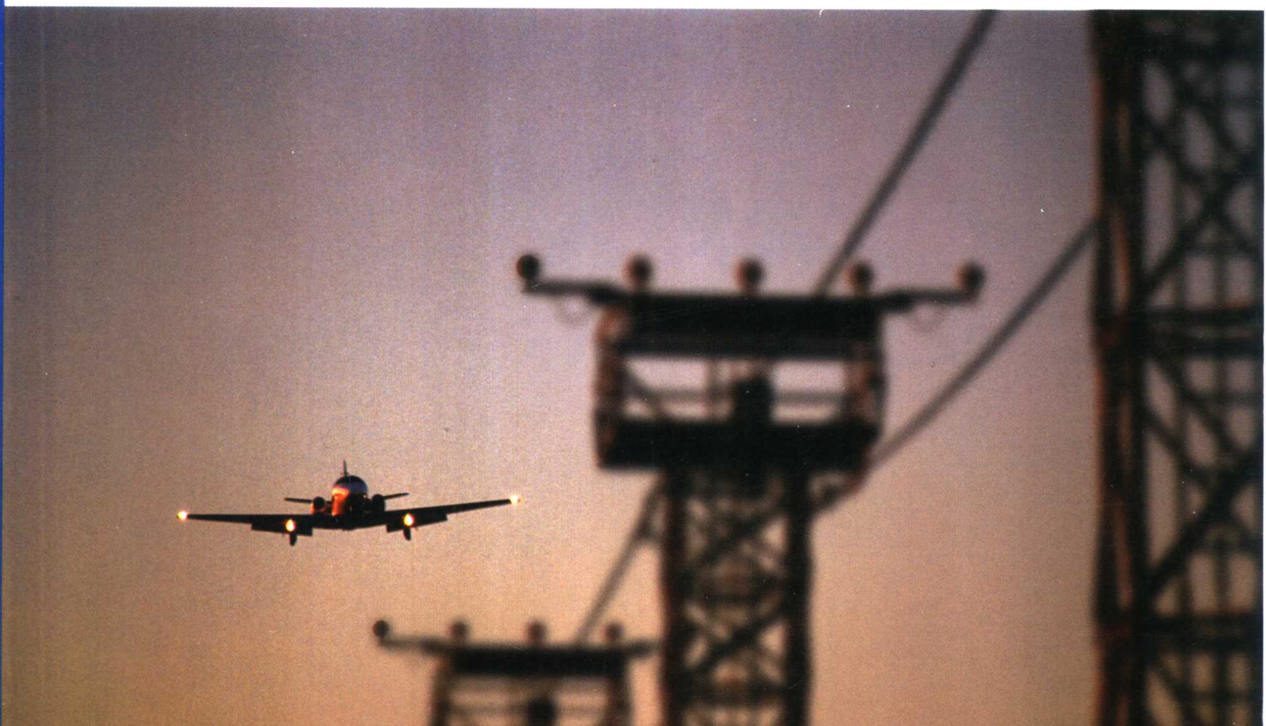
21世纪高等院校教材

工程模糊系统

肖辞源　编著



科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

工程模糊系统

肖辞源 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在介绍模糊集、模糊关系等基本知识的基础上，着重介绍应用于石油、物探、地质、机械工程、建筑工程、化学与环境工程、医学、材料学、工商管理、计算机智能与电子信息处理等工程领域中的模糊系统方法。全书共分10章，前4章介绍模糊集的基础知识，后6章分别讨论模糊聚类、模糊模式识别、模糊多目标决策、模糊统计决策、模糊优化、模糊控制等模糊系统方法及其在各类工程领域中的应用实例。与本书配套的《工程模糊系统应用软件》(IFSA软件)可供在教学、科研、工程技术实践中直接使用。

本书可作为工科博士、硕士研究生及本科高年级学生的教材，也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的参考书和实用工具书。

图书在版编目(CIP)数据

工程模糊系统/肖辞源编著. —北京：科学出版社，2004
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-014445-7

Ⅰ.工… Ⅱ.肖… Ⅲ.模糊系统-应用-工程技术-高等学校-教材
Ⅳ.①N94②TB

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第102239号

责任编辑：马长芳　资丽芳 / 责任校对：钟　洋
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年10月第　一　版　开本：B5 (720×1000)
2004年10月第一次印刷　印张：22
印数：1—2 500　字数：444 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自 L. A. Zadeh 教授开创模糊集与模糊系统这个崭新的数学分支以来，在自然科学、社会科学、企业经济等诸多领域的模糊现象的研究中，我们已取得了许多可喜的成果和显著的效益。

随着现代工业的发展，模糊集理论在工程技术领域中的应用具有更广阔的前景。近 30 年来，在石油工程、机械工程、化学及环境工程、计算机与智能工程、电子信息工程、材料与建筑工程、工商管理工程等领域的模糊现象的研究中，已经逐渐形成了系统的方法，并且已逐渐成为广大科学工作者及工程技术人员常用的数学方法之一。

我于 1985 年开始给工科研究生和本科高年级学生开设"模糊数学"课程，最近几年又给工科博士生及工程博士生开设"模糊系统"课程。通过这些年的教学实践与科学研究，在反复修改充实讲义和讲稿、不断吸收最新研究成果的基础上，编著了这本教材。本书第 1～4 章介绍模糊集理论的基础知识，第 5～10 章研究应用于各类工程技术领域中的模糊系统方法，并编制了《工程模糊系统应用软件》(IFSA 软件)，以便于教学及工程技术人员直接使用。另外，本书还收集了较丰富的各类工程技术领域的应用实例，以使读者对各种系统方法的应用有更深刻的认识。

本书概念清楚、文字通俗、深入浅出，个别研究方向的前沿问题在本书中也有所反映。每章后还配有一定数量的练习题。本书可作为工科博士、硕士研究生及本科高年级学生的教材，也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的入门参考书和实用工具书。本书后 6 章是相对独立的，可根据课时、学习对象等的不同适当选用，不会影响本书的系统性。

应当感谢的是汪培庄先生、楼世博教授，他们在 1979 年邮寄给我模糊集理论的资料，使我对这门学科产生了浓厚的兴趣；也要感谢刘应明先生在 1982 年武汉召开的全国首届模糊系统学术会议上给我的鼓励，使我将模糊集理论与工程实践结合的研究与教学坚持至今；更要感谢大连大学的邹开其教授、中国海洋大学的刘文斌教授、西南石油学院的刘育骥教授对全书的审阅，以及给予我的支持和鼓励；还应感谢西南石油学院教务处李小明处长、机电工程学院刘清友博导、石油工程学院唐海教授对本书的出版所给予的大力帮助和支持。

本书引用了诸多文献资料，书中部分练习题引自参考文献[1]～[6]，同时还引用了我的一些博士生、硕士生的研究成果，在此谨向作者们表示衷心的感谢。

本书包含了我的已发表的和未发表的一些研究成果，有的仅是一孔之见，旨在抛砖引玉，疏漏和错误之处，恳请诸位读者批评指正。

编著者

2004 年 5 月

目　录

第1章　预备知识

1.1　普通集合与映射

1.1.1　集合的概念

在概率论中我们已经描述过集合，集合可以表示概念，称符合某个概念的对象的全体——概念的外延，即“全体对象”为一个集合，也即概念的外延就是**集合**。谈论一个集合，总离不开一定的**论域**U(在概率论中又叫做样本空间或基本空间)。U中的集合常用大写字母A、B、C等表示。集合中的元素常用小写字母x、y、z等表示。对任给定的一个元素x及任意一个集合A，在x与A之间仅有$x\in A$或$x\overline{\in} A$，二者必居其一，这是普通集合的起码要求(这里的“$\in$”表示“属于”，“$\overline{\in}$”表示“不属于”，后同)。集合可分为有限集与无限集。有限集常用穷举法表示，如$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；无限集常用描述法表示，如$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=[1,2]$。不含任何元素的集称为空集，记为$\varnothing$。仅含一个元素$x$的集称为单元集，记为$\{x\}$。注意，$x$与$\{x\}$的意义是不同的，它们之间的关系为$x\in\{x\}$。

1.1.2　集合的关系与运算

集合间的关系有：

包含　$A\subseteq B$：$\forall x\in A$都有$x\in B$，并称A为B的子集。若$A\subseteq B$，但$A\neq B$，称A为B的真子集，记为$A\subset B$(其中“$\forall$”表示“任意”，后同)。

相等　$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$(其中“$\Leftrightarrow$”表示“充分必要”，后同)。

集合和元素是两个不同层次的概念。如将论域U中的每一个子集(包括空集)都看作新的元素，则由U中的全部子集可组成新的集合——即集合的集合(集合类)，称为U的**幂集**，记作$P(U)$。例如$U=\{1,2,3\}$，则$P(U)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

集合间的运算有：

并运算　$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$。

交运算　$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$，也记为AB。一般地，设$A_t(t\in T)$是U的子集，所有A_t的并集为

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x\mid \exists\, t\in T, x\in A_t, x\in U\}$$

而所有A_t的交集为

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x \mid \forall\, t \in T, x \in A_t, x \in U\}$$

其中，T 是集 A_t 的所有下标组成的集，称为**指标集**。符号“∃”表示“存在”，后同。

差运算　$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$。

余运算　$\overline{A}=\{x \mid x\notin A, x\in U\}$。

集合的并、交、差、余运算如图 1.1 所示。集合的运算满足如下运算规律：

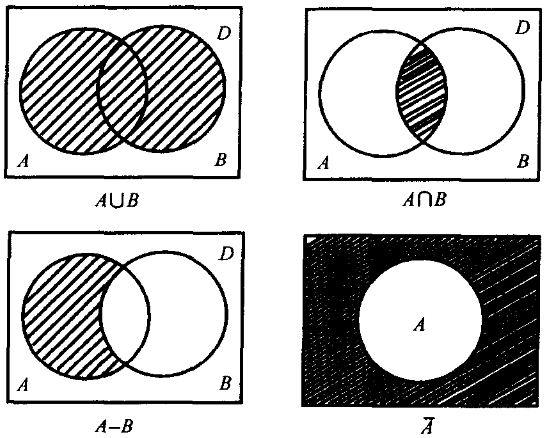


图 1.1

幂等律　$A\cup A=A, A\cap A=A$。

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$。

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$。

吸收律　$(AB)\cup B=B, (A\cup B)B=B$。

两极律　$A\cup U=U, A\cap U=A, A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$。

还原律　$\overline{(\overline{A})}=A$。

互补律　$A\cup\overline{A}=U, A\overline{A}=\varnothing$。

De-Morgan 律　$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{(AB)}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

一般设 $A_t\in P(U), t\in T$，则

$$\overline{\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)} = \bigcap_{t\in T}\overline{A}_t$$

$$\overline{\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)} = \bigcup_{t\in T}\overline{A}_t$$

1.1.3 映射的概念

为更好地描述集合，先引入映射的概念。

定义 1.1　记号

$$f: U \longrightarrow V (U、V \text{ 为论域})$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$
即对每个 $x \in U$，都有唯一 $y \in V$ 与之对应，则对应法则 f 称为 U 到 V 的一个**映射**。

映射实质是函数概念推广到一般集合的情况。当论域 U、V 为实数集时，即为函数，而映射中的论域 U、V 可为非实数集的一般集合。

映射也常记为 $f: x \longmapsto y$ 或 $y = f(x)(x \in U, y \in V)$，称 U 为映射 f 的**定义域**。V 的子集 $f(U) = \{y | y = f(x), x \in U\}$ 为映射 f 的**值域**。常见的映射有下面几种：

全映射(满射)　$f(U) = V$。

单射(内射)　若 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

满单射(双射)　f 既为全射又为单射，也称为 1-1 映射。

逆象　设 $f: U \longrightarrow V$，$f^{-1}(y) = \{x | f(x) = y, x \in U\}$ 称为 y 关于 f 的逆象。

逆映射　设满单射

$$f: U \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto y \text{ 或 } y = f(x)$$

则

$$f^{-1}: V \longrightarrow U$$
$$y \longmapsto x \text{ 或 } x = f^{-1}(y)$$

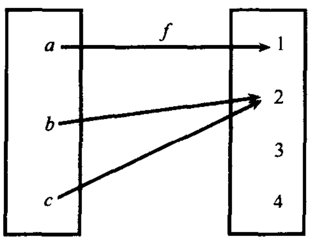
称 f^{-1} 为 f 的逆映射。

集射　设 $f: U \longrightarrow V$，则称其幂集间映射

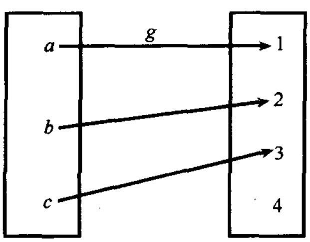
$$\Phi: P(U) \longrightarrow P(V)$$
$$A \longrightarrow \Phi(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Φ 为由 f 诱导出的集射。

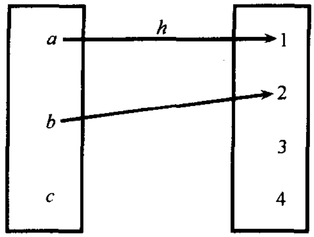
例如，$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，有如下四种情况：



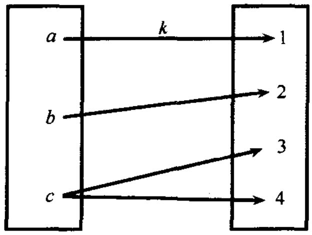
f 为映射，但不是单射，也不是满射



g 为映射，且为单射，但不是满射



h 不是映射，因元素 c 无对应元



k 不是映射，因元素 c 不是唯一的对应

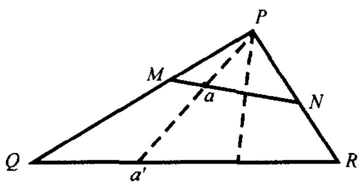


图 1.2

又如在$\triangle PQR$中(见图 1.2)，$A=\{MN$ 上点$\}$，$B=\{QR$ 上的点$\}$。设映射 f：过 P 向 QR 引射线交 MN 于 a，交 QR 于 a'，则 f 为 $A \longrightarrow B$ 的满单射。

关于集射有下面几个性质：

1) $A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B)$，符号"$\Rightarrow$"表示"推出"，后同。

2) $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$。

3) $\Phi(AB) \subset \Phi(A) \cap \Phi(B)$。

4) $\Phi(A) - \Phi(B) \subset \Phi(A - B)$。

映射中还有一个重要的概念，即合成映射。

定义 1.2 设有三个非空集合 U、V、W，映射 $f: U \longrightarrow V$，映射 $g: V \longrightarrow W$，由 f、g 确定的 U 到 W 的映射 $h: U \longrightarrow W$，称为映射 f、g 的**合成映射**，记为 $h = g \circ f$(图 1.3)。而

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in U$$

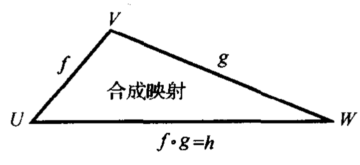


图 1.3

可验证合成映射满足结合律：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

1.1.4 集合的特征函数

前已介绍普通集合的起码要求是：$\forall x \in U$，$\forall A \in P(U)$，要么 $x \in A$，要么 $x \overline{\in} A$，这二者必居其一。这种特性可用论域 U 到二元集 $V=\{0,1\}$ 的映射来描述：

$$\chi_A:\quad U \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \overline{\in} A \end{cases}$$

映射 χ_A 就称作集合 A 的**特征函数**。反之，任一个 $U \longrightarrow \{0,1\}$的映射 χ_B，都确定了一个 U 中的子集：

$$B = \{x \mid \chi_B(x) = 1\}$$

因此 χ_B 都可看作某子集 B 的特征函数。可见特征函数就刻化了 U 中的任意子集，那么子集间的关系与运算就可以用特征函数的运算来表示：

1) $A=B \Leftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x), \forall x \in U$；

$B \subseteq A \Leftrightarrow \chi_B(x) \leqslant \chi_B(x), \forall x \in U$；

$A=\Phi \Leftrightarrow \chi_A(x)=0, \forall x \in U$；

$A=U \Leftrightarrow \chi_A(x)=1, \forall x \in U$。

2) $A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in U$ 有

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

$A \cap B \Leftrightarrow \forall x \in U$ 有

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

注意“$\vee$”、“$\wedge$”表示取大、小运算(后同)。

3) $\overline{A} \Leftrightarrow \chi_{\overline{A}}(x)=1-\chi_A(x), \forall x \in U$。

例如，$A=[2,8]$，$\chi_A(x)=\begin{cases} 1, & x \in [2,8] \\ 0, & x \overline{\in} [2,8] \end{cases}$，$B=[3,5]$，$\chi_B(x)=\begin{cases} 1, & x \in [3,5] \\ 0, & x \overline{\in} [3,5] \end{cases}$，则 $\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}=\begin{cases} 1, & x \in [2,8] \\ 0, & x \overline{\in} [2,8] \end{cases}$，而 $A\cup B=[2,8]$，$\chi_{A\cup B}(x)=\begin{cases} 1, & x \in [2,8] \\ 0, & x \overline{\in} [2,8] \end{cases}$，可见 $\chi_{A\cup B}(x)=\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}$。

一个集合 A 的特征函数形象地刻化了普通集合所表示的“非此即彼”的二者必居其一的现象，它正是清晰性现象的描述。也称 A 的特征函数在 x 处的值$\chi_A(x)$为 x 对 A 的**隶属程度**。显然，当 $x \in A$ 时，$\chi_A(x)=1=100\%$，即 x 隶属于 A 的程度为 100%，绝对地属于 A。当 $x \overline{\in} A$ 时，$\chi_A(x)=0$，即表明 x 隶属于 A 的程度为 0，绝对地不属于 A。

1.2 关系与序关系

1.2.1 直积(Descartes 乘积)

定义 1.3 设 A、B 为两个集合，称

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

为集合 A 与 B 的**直积**或**笛卡儿(Descartes)乘积**。

直积 $A\times B$ 是一个新的集合，其元素由 A 中的元素与 B 中的元素无约束的任意搭配起来的序偶(x,y)(或序对)构成。

例 1 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$
$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

显然 $A\times B\neq B\times A$，可见序偶和顺序是有关的。当 $A=B$ 时，$A\times A=A^2$，称为 A 上的直积。直积的定义可推广到多个集合上去：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

例如，设 R 为实数集，则 $R^3=R\times R\times R=\{(x,y,z)\,|\,-\infty<x,y,z<+\infty\}$又称为三维 Euclid 空间。$R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n\}$又称为 n 维 Euclid 空间。

1.2.2 关系

定义 1.4 直积 $A\times B$ 的一个子集 R，即 $R\in P(A\times B)$称为 A 与 B 之间的一个二元关系，简称**关系**。

例 2 设 X 表示平面上的水平轴，Y 表示纵轴，则 $X\times Y=\{(x,y)\,|\,x\in X,y\in Y\}$笛卡儿乘积就表示平面上所有的点。那么 $R=\{(x,y)\,|\,x=y,x\in X,y\in Y\}$就表示坐标平面中的一个相等关系。$R_1=\{(x,y)\,|\,x<y,x\in X,y\in Y\}$就表示坐标平面中的一个“小于”关系。

可见 R、R_1 都是 $X\times Y$ 的子集，因此两个集合间的二元关系实质就表现为两集合间元素的一种有约束的搭配。当$(x,y)\in R$ 时，称 x 和 y 有关系 R，记作 xRy；当$(x,y)\overline{\in}R$ 时，称 x 和 y 无关系 R，记作 $x\overline{R}y$。特别当 $A=B$ 时，称 $A\times A$ 的子集 R 为 A **上的二元关系**。

二元关系可推广到 n 元关系，一般$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$的子集 R 称为 A 上的 n 元关系。一般主要研究二元关系，其许多结论可推广到多元关系中。

从上看到，关系 $R\Leftrightarrow R$ 为 $A\times B$ 的一个子集，关系就是一个集合。关系的这种集合表现方式是现代数学的一个重要思想。既然关系是集合，因此关系也可用特征函数表示：

$$\chi_R(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in R\\ 0, & (x,y)\overline{\in}R\end{cases}$$

正是由于关系的这种集合特征函数表示法，使得当笛卡儿乘积中的集合为有限集时，其二元关系可表示为矩阵——**关系矩阵**。

例 3 设 $U=\{$张同志，王同志，李同志$\}$，$V=\{$北京，上海，天津，广州$\}$，则 $U\times V=\{$(张，北)，(张，上)，(张，天)，(张，广)，(王，北)，(王，上)，(王，天)，(王，广)，

(李,北),(李,上),(李,天),(李,广)}表示张、王、李三个人去北京、上海、天津、广州出差的所有可能方式。现有一次出差任务是:张去上海,王去天津,李去北京。这就构成一种关系:

$$R = \{(\text{张},\text{上}),(\text{王},\text{天}),(\text{李},\text{北})\}$$

显然 $R \subset P(U \times V)$,由 R 的特征函数表示法可将关系 R 列成表格形式:

R	北京	上海	天津	广州
张同志	0	1	0	0
王同志	0	0	1	0
李同志	1	0	0	0

将其写为矩阵形式,就得到关系矩阵:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,1 表示两元素间有关系 R,0 表示两元素间无关系 R。关系是十分清楚的。

1.2.3 序关系和等价关系

关系中还有一些特殊的关系。

定义 1.5 设 A 是非空集合,R 是 A 上的关系,且满足条件:

1) 自反性 $\forall x \in A$,都有 xRx。

2) 反对称性 $\forall x, y \in A$,若 xRy 且 yRx,则 $x = y$。

3) 传递性 $\forall x, y, z \in A$,若 xRy 且 yRz,则 xRz。

则称关系 R 是 A 上的**偏序关系**或**序关系**,称(A,R)为**偏序集**或**半序集**,即定义了偏序关系的集合 A 就叫做半序集。

定义 1.6 设(A,R)为偏序(半序)集,若对任意 $x, y \in A$,xRy 或 yRx 至少有一个总成立,则称关系 R 为 A 上的**全序关系**。此时的偏序集(A,R)称为**全序集**。

从上两个定义看到:全序集一定是偏序集,但反之则不一定。

例 4 对实数集 R,关系"$\leqslant$"表示实数间通常的小于或等于关系。由$\forall x \in R \Rightarrow x \leqslant x$;$\forall x, y \in R$,若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x \Rightarrow x = y$;$\forall x, y, z \in R$,若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$。因此$(R, \leqslant)$是偏序集。又由$\forall x, y \in R$,必有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$,因此$(R, \leqslant)$又是全序集。但对实数集 R 上的笛卡儿乘积 $R \times R$,若规定关系"$\leqslant$"为:对任意两点(x_1, y_1),(x_2, y_2),$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2$ 且 $y_1 \leqslant y_2$。则易验证关系"$\leqslant$"是集合 $R \times R$ 上的一个偏序关系,但却非全序关系。

事实上,对平面上任意两点(x_1, y_1),(x_2, y_2),在$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$和$(x_2, y_2) \leqslant (x_1, y_1)$中并不一定至少有一个成立,如(2,3)与(1,4)就是如此。因此上面规定的关系"$\leqslant$"仅是半序。

定义 1.7 设 A 为非空集合，若 A 上的某关系“$\sim$”满足：

1）自反性 $\forall x \in A$ 均有 $x \sim x$。

2）对称性 $\forall x, y \in A$，若 $x \sim y \Rightarrow y \sim x$。

3）传递性 $\forall x, y, z \in A$，若有 $x \sim y$ 且 $y \sim z \Rightarrow x \sim z$。

则称关系“$\sim$”为 A 上的**等价关系**。

例 5 设 R 是实数集，关系“$=$”为普通实数的相等关系，则易验证关系“$=$”为一个等价关系。还可验证任意集合 A(不一定是数集)上的“等于”关系都是一个等价关系。因此，等价关系实质是将实数的“相等”概念推广到一般集合中。

定义 1.8 设(A, R)是偏序集。

1）若$\exists \alpha \in A$ 使对$\forall x \in A$ 都有 $xR\alpha$，则称 α 为 A 的**最大元**；若$\exists \alpha \in A$ 使对$\forall x \in A$ 都有 αRx，则称 α 为 A 的**最小元**。

2）若$\exists \beta \in A$ 使对$\forall x \in A$，有当 βRx 时$\Rightarrow \beta = x$，则称 β 为 A 的**极大元**；若$\exists \beta \in A$ 使对$\forall x \in A$，有当 $xR\beta$ 时$\Rightarrow \beta = x$，则称 β 为 A 的**极小元**。

结论 ① 最大(小)元必为极大(小)元，反之则不一定。②A 中若存在最大(小)元则必唯一，但极大(小)元可能有多个。

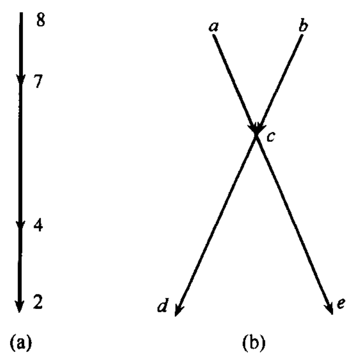


图 1.4

例 6 设 $A = \{2, 4, 7, 8\}$，关系“$\leqslant$”为普通实数的小于等于关系，则$(A, \leqslant)$构成全序集，其全序图见图 1.4(a)。

例 7 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$，A 上的关系 $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,a), (d,b), (d,c), (e,c), (c,a), (c,b), (e,a), (e,b)\}$，则可验证$(A, R)$为偏序集，$a$、$b$ 是极大元，d、e 是极小元，而无最大元与最小元。其偏序图见图 1.4(b)。

定义 1.9 设(A, R)为偏序集，且 $A_1 \subseteq A$。若$\exists \alpha \in A$ 使对$\forall x \in A_1$ 都有 $xR\alpha$，则称 α 为集 A_1 的**上界**。在 A_1 的所有上界中若存在最小元 α_0，则称 α_0 为 A_1 的**上确界**，记为 $\alpha_0 = \sup A_1$。

若$\exists \beta \in A$ 使对$\forall x \in A_1$ 都有 βRx，则称 β 为 A_1 的**下界**。在 A_1 的所有下界中若存在最大元 β_0，则称 β_0 为 A_1 的**下确界**，记为 $\beta_0 = \inf A_1$。

例如，在例 7 中，若取 $A_1 = \{a, b\} \subset A$，由(c,a)，$(c,b) \in R$，即 cRa 及 cRb 知 c 为 A_1 的下界，同样由(e,a)，(e,b)，(d,a)，$(d,b) \in R$ 知 e，d 也为 A_1 的下界。在下界组成的集合$\{c, e, d\}$中，因(c,c)，(e,c)，$(d,c) \in R$，由最大元定义知 c 为$\{c, e, d\}$的最大元，即 c 为 A_1 的下确界，$c = \inf A_1$。但 A_1 无上界，自然也无上确界了。

可见一个集合的最大(小)元、极大(小)元、上界、下界等都是由关系 R 来确定的，对同一集合而言，不同的关系将有不同的结果，这就是现代数学基础中关系 R

的重要作用。

1.3　格与布尔代数

上节介绍了半序集,在半序集上可定义格。

定义 1.10　设(L,R)为偏序集,若其中任一对元素$\{x,y\}$都有上、下确界,则称(L,R)为**格**。

例如,1.2 节例 6 中的$(A,\leqslant)$为格,而例 7 中的偏序集(A,R)不是格,这是因为取$\{a,b\}\subset A$时,这一对元素无上界,因此当然也无上确界。

上确界常记为$\sup\{x,y\}=x\vee y$,下确界常记为$\inf\{x,y\}=x\wedge y$。

设(L,R)为格,$x,y,z\in L$,由格的定义可得如下性质:

1) 交换律　$x\vee y=y\vee x, x\wedge y=y\wedge x$。

2) 结合律　$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z), (x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$。

3) 吸收律　$x\vee(y\wedge x)=x, x\wedge(y\vee x)=x$。

4) 幂等律　$x\vee x=x, x\wedge x=x$。

上述格的定义实质是在非空集L上定义了两种二元运算,即取上确界($\vee$)与取下确界($\wedge$),且满足 1)～4)条性质。因此格也可按如下方式定义。

定义 1.11　设L为非空集,在L上定义两种运算$\vee$,$\wedge$,使得对$\forall x,y\in L$都有$x\vee y, x\wedge y\in L$,且两种运算满足上述 1)～4)条性质,则称$(L、\vee、\wedge)$为**格**。

只需在L上规定偏序关系R为:$xRy\Leftrightarrow x\wedge y=x$(或$x\vee y=y$),则可证明格的这两种定义是等价的。

定义 1.12　对格(L,R)中任意元x,y,z,若还满足性质 5),则称此格为“**模格**”。

5) 模律　当zRx时有$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee z$(即取上、下确界的运算可交换)。

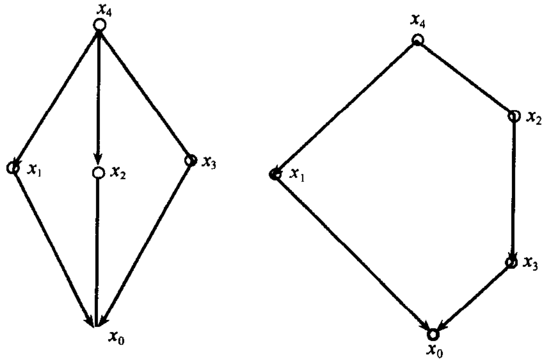
例 8　偏序关系如图 1.5(a)、(b)偏序图所规定,则(a)为模格,而(b)非模格。事实上在(b)中取三个元素x_2,x_1,x_3。因x_3Rx_2,但$x_2\wedge(x_1\vee x_3)=x_2\wedge x_4=x_2$,而$(x_2\wedge x_1)\vee x_3=x_0\vee x_3=x_3$,模律不成立,故(b)不是模格。

定义 1.13　对格(L,R)中任意元x,y,z,若还满足性质 6),则称此格为**分配格**。

6) 分配律　$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z), x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$。

显然当zRx时,$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=(x\wedge y)\vee z$,即模律成立,故分配格一定是模格,但反之则不一定。图 1.5(a)是非分配格的模格,因为$x_1\vee(x_2\wedge x_3)=x_1\vee x_0=x_1$而$(x_1\vee x_2)\wedge(x_2\vee x_3)=x_4\wedge x_4=x_4$。

定义 1.14　在格(L,R)中,若对$\forall A\subset L$,$\sup A$与$\inf A$恒成立,则称此格为**完备格**或**完全格**。



(a) 模格　　　　(b) 非模格

图 1.5

由定义 1.14 可知，如(L,R)是完备格，则由 L 中任意子集都有上、下确界，可推出集 L 必有上、下确界，即 L 必有最大元(L 的上确界)和最小元(L 的下确界)。图 1.5(a)、(b)所示的格都是完备格，且 x_0 与 x_4 分别是其最小元和最大元。若格(L,R)中有最大元和最小元，常用记号 1 表示最大元，而用记号 0 表示最小元。最大元 1 和最小元 0 显然满足性质 7)。

7) 0-1 律　$x\vee 1=1, x\wedge 1=x, x\vee 0=x, x\wedge 0=0$。

定义 1.15　设格(L,R)具有最大元 1 和最小元 0，且对$\forall x\in L$ 都存在元素 $\bar{x}\in L$，满足性质 8)，则称此格为**补格**，而 $\bar{x}$ 称为 x 的**补元**。

8) 互补律　$x\vee\bar{x}=1, x\wedge\bar{x}=0$。

定义 1.16　有补分配格称为布尔(Boole)格，也称**布尔代数**。而称具有最大元 1 和最小元 0 的分配格为**"软代数"**。

显然软代数区别于布尔代数的地方仅在于互补律不成立，即软代数中没有补元。

定理 1.1　布尔格中的补元是唯一的。

证明　设布尔格中某元 a 有两补元 b 和 c，则由 $c=1\wedge c=(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=0\vee(b\wedge c)=b\wedge c$，有 cRb；又由 $c=0\vee c=(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)=1\wedge(b\vee c)=b\vee c$，有 bRc。由偏序关系的反对称性知 $b=c$。

由定理 1.1 补元的唯一性可知，在布尔格内有性质 9)，10)。

9) 复原律　$\bar{\bar{x}}=x$。

10) 对偶律　$(\bar{x}\vee\bar{y})=\overline{(x\wedge y)}, (\bar{x}\wedge\bar{y})=\overline{(x\vee y)}$。

易验证，对任意集合 U，其幂集与包含关系$(P(U),\leqslant)$构成完备的布尔格，其最大元为 U，最小元为$\varnothing$。完备格必有最大、最小元，但是否就为补格呢？这是不一定的，因为补格不仅有最大、最小元，且元素要满足互补律，即要有补元。

例 9　在$[0,1]$上定义二元运算$\vee$，$\wedge$如下：$\forall x,y\in[0,1]$，$x\vee y=\max\{x,y\}$，$x\wedge y=\min\{x,y\}$。则易验证交换律、结合律、吸收律、幂等律、分配律均成立，因此