专升本

教育部师范教育司组织编写
中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

复变函数

主　编　杨林生
副主编　乔玉英

高等教育出版社

教育部师范教育司组织编写

中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

复　变　函　数

主　编　杨林生

副主编　乔玉英

编写人员　杨林生　乔玉英　米据生

焦红兵　谢永红　李玉成

彭淑彦

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数 / 杨林生主编. 一北京：高等教育出版社，2001

ISBN 7-04-009304-9

Ⅰ. 复…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 复变函数　Ⅳ. 0174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 025368 号

复变函数

主编　杨林生

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010—64054588	**传　　真**	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2001 年 6 月第 1 版
印　　张	9.625	**印　　次**	2001 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	10.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

本教材是根据1999年教育部颁发的中学教师进修高师本科(专科起点)教学计划编写的,供中学教师进修数学教育专业专科升本科学员使用,也可供数学本科其它类型(如普通高等专科接本科、自学考试本科、职大和夜大本科等)学生使用,也可作为工科院校《工程数学—复变函数》的教材.

考虑到本教材的主要读者对象,编写的主导思想是,让学员通过学习本教材,能够系统掌握复变函数论的基本概念和基本理论,特别是以柯西积分定理为基础和核心的解析函数的一系列重要性质、级数理论、留数理论以及保形映射和解析开拓的理论和方法.学员通过对本教材的学习,进一步巩固和加深对数学分析中有关内容和方法的理解,居高临下地指导中学数学教学.

本教材在编写过程中力求从全面提高中学教师素质,培养一支高水平中学教师队伍的需要出发,努力做到使教材符合知识经济时代到来的要求,既要体现内容和方法的先进性、科学性和系统性,又要充分考虑读者对象的在职、成人、师范教育的特点,体现教材的针对性和实用性,在这方面,我们主要做了以下工作:

1. 为了使教师好教,学员好学,特别是利于学员自学,本教材的每一章开头都列出了学习要点和基本要求,在正文后面作出了该章小结.

2. 复变函数论是数学分析的后继课,无论从内容到形式,它们都有着密切联系,因而本教材注意了与数学分析的衔接,教材在各章的论述中对两个学科的相同概念都指出了它们的共性和区别,并给出了思考题以促使学员加深理解.

3. 本教材力争做到突出重点,把重点内容写好写细,以重点

带一般.如我们对柯西积分定理和柯西积分公式、解析函数的惟一性定理,无论从概念的引入,定理的论证,诸定理间的联系,还是从例题、习题的配备,实质的剖析都下了一定功夫,在文字表述上也力求详尽、形象.

4. 本教材对难点的处理也给以高度重视,如多值函数和保形映射,普遍认为学生难学,教师难教.在这方面我们注意了突破传统教材模式,对多值函数的内容适当分散,对保形映射的论述做到深入浅出,图解步骤加细,并在保证达到本科基本要求的前提下,删除一些理论性太强、难度过大的内容.

本书承蒙北京理工大学数学系祝同江教授审稿,并提出了很多修改意见,高教出版社李陶先生为本书的编写和出版给予热情指导和帮助,在此一并致谢.

本教材在编写过程中得到了河北师范大学数学与信息科学学院,成教学院领导的大力支持,在此表示感谢.

限于编者水平,书中缺点、错误和不当之处在所难免,敬请专家和读者批评指正.

编　者

目　　录

第一章　复　　数

【学习要点及基本要求】

1. 明确复数、复平面、扩充复平面、复球面的概念.
2. 掌握复数的各种代数运算.
3. 明确平面点集的有关概念.
4. 会应用模和辐角的性质解决一些几何问题.
5. 进一步认识复数域的结构,从而指导中学复数教学.

§1　复　　数

1. 复数概念

数学分析是研究实数性质及实数集合之间对应关系的,解决了实践中的很多问题,例如求最值、求体积、求面积等等,这些问题涉及的量为纯量或称为标量(即只有大小没有方向的量).而现实生活中还有一种既有大小又有方向的量——向量,例如力、流体、磁场等.复数的引入为研究这些量带来了很大的方便.

我们知道,i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个根,即 $i^2=-1$.我们称 i 为虚数单位.

定义 1　设 $x,y\in\mathbf{R}$,则称 $z=x+iy$(或 $x+yi$)为复数,其中 x 称为复数 z 的实部,记作 $x=\mathrm{Re}\,z$,y 称为复数的虚部,记作 $y=\mathrm{Im}\,z$.

当 $y=0$ 时,$z=x$,此时复数取实数值,因而实数集是复数集的真子集.当且仅当 $x=y=0$ 时,复数 $z=0$.

当 $y\neq0$ 时,称复数 $z=x+iy$ 为虚数,特别称 $z=iy(y\neq0)$

为纯虚数.

定义 2　设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，若 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称复数 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1 = z_2$.

此定义可简记作 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

定义 3　称复数 $x + \mathrm{i}y$ 与 $x - \mathrm{i}y$ 互为共轭复数，即 $x + \mathrm{i}y$ 是 $x - \mathrm{i}y$ 的共轭复数，$x - \mathrm{i}y$ 是 $x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$.

已有各数集之间的关系可表示为：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\ \text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$$

2. 复数的几何表示

由复数的定义可知，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 是由有序实数对 (x, y) 惟一确定的，而 (x, y) 又与坐标平面上的点一一对应，所以，复数与平面上的点是一一对应的. 今后，我们把“点 z”与“复数 z”不加区分地使用. 把全体复数与坐标平面建立起一一对应关系后，称这个坐标平面为复平面，记作 S 或 S_z，坐标平面的横轴与纵轴分别称为实轴与虚轴.

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用复平面的一个向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示（如图 1.1）.

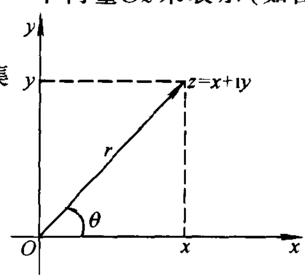

图 1.1

到目前，我们已建立了以下四个集的一一对应关系：

实数对集 $\{(x, y) \mid x, y \text{ 为实数}\}$

复数集 $\{z \mid z = x + \mathrm{i}y, x, y \in \mathbf{R}\}$

{平面上所有点}

{从原点出发的所有向量}

我们知道，平面上的点也可用极坐

标(r,θ)来确定(如图 1.1).在复平面上建立极坐标系,使极点与原点重合,极轴与正实轴重合,于是可引入如下概念:

定义 4 点 $z(z\neq0)$到原点的距离 r 称为复数 z 的模或绝对值,记作 $r=|z|$;

从极轴到向量$\overrightarrow{Oz}$所成的角(顺时针方向为负,逆时针方向为正)称为复数 z 的辐角,记作 $\theta=\operatorname{Arg} z$.

由两点之间的距离公式知,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$,因此不等式$|x|\leqslant|z|$,$|y|\leqslant|z|$及$|z|\leqslant|x|+|y|$成立.

复数 0 的模为 0,但辐角不确定,因此 Arg 0 是无意义的.

任一非零复数 z 有无穷多个辐角,以 $\arg z$ 表示 $\operatorname{Arg} z$ 的主值或 z 的主辐角,它满足 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,于是 $\theta=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

由此可知:对非零复数有

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \theta_1=\theta_2+2k\pi(k\text{ 为某整数},\theta_1、\theta_2\text{ 为 }z_1、z_2\text{ 的某辐角})\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2;\end{cases}$$

并且$|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

由直角坐标与极坐标的关系可知:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\theta=\tan(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

于是非零复数 z 也可表示为$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,复数 z 的这种表示称为复数 z 的三角表示式.复数 z 在直角坐标系下的表示式$z=x+\mathrm{i}y$ 称为代数表示式.

根据熟知的欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为复数的指数表示式,不难验证 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$.

主辐角 $\arg z(z\neq0)$与反正切 $\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$的主值 $\arctan\frac{y}{x}$的关系表示为：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第一、四象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\text{ 在第二象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & z\text{ 在第三象限}\end{cases}$$

例 1 求复数 $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$的主辐角.

解
$$z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$
$$\arg z=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big/\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

3. 复数的运算

① 加法

定义 5 设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则 z_1+z_2 称为 z_1 与 z_2 的和,且规定

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2).$$

这样规定的运算称为加法.可以验证复数加法满足交换律及结合律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

把复数看做向量,复数的加法即是向量的加法(如图 1.2).

观察图 1.2,可验证不等式$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$成立.

② 减法

定义 6 设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则 z_1-z_2 称为 z_1 与 z_2 的差,且规定

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2).$$

这样规定的运算称为减法,减法是加法的逆运算.

把复数看做向量,复数的减法即是向量的减法(如图 1.3).

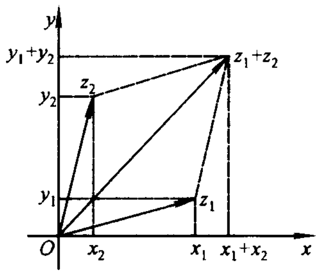

图 1.2

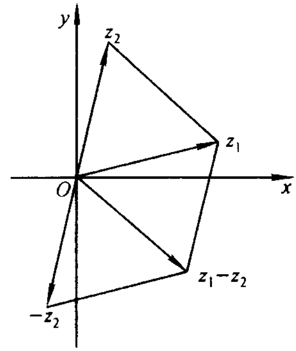

图 1.3

根据图 1.3,有不等式$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

$|z_1 - z_2|$表示点 z_1 与 z_2 的距离,一般记作 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

③ 乘法

定义 7 设复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则称

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

为 z_1 与 z_2 的积,这样规定的运算称为乘法.可以验证复数的乘法满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相乘,可按多项式乘法法则进行,只需将结果中的 i^2 换成 -1.

利用复数的指数表示式做乘法比较简单，不难验证

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

由上式可以看出：

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\ z_1 + \mathrm{Arg}\ z_2.$$

后一式应理解为等式两端所表示的是同样的一组值，即是两个相等的辐角集合.

把复数看做向量，$z_1 z_2$ 所对应的向量是把 z_1 对应的向量伸缩 $r_2 = |z_2|$ 倍，再旋转一个角度 $\theta_2 = \arg\ z_2$（如图1.4）. 当 $|z_2| = 1$，即 z_2 是单位复数时，只需旋转一个角度 $\theta_2 = \arg\ z_2$. 所以，一个复数乘以一个单位复数，几何上只相当于此复数所对应向量旋转一个角度.

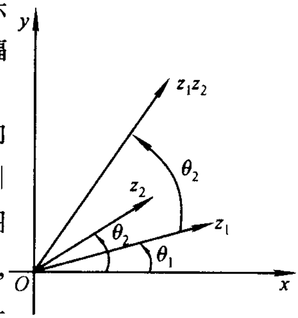

图 1.4

④ 除法

定义 8 设复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，$(z_2 \neq 0)$，则将满足关系 $z_2 z = z_1$ 的复数 z 称为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z = z_1/z_2$，这样规定的复数运算称为除法. 不难求出：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

事实上，

$$\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)(x_2 + iy_2)$$

$$= \frac{x_1 x_2^2 + y_1 y_2 x_2 - x_2 y_1 y_2 + x_1 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 + x_1 x_2 y_2 + y_1 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= x_1 + iy_1 = z_1,$$

所以

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

除法是乘法的逆运算. 除法的几何意义如图 1.5.

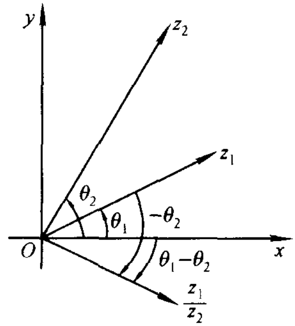

图 1.5

利用复数的指数表示式做除法也是比较简单的,不难验证:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\quad(z_2\neq 0).$$

显然, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2.$$

最后一个式子要理解为两个辐角的集合相等.

全体复数并引进上述四则运算后就称为复数域. 在复数域中,一切实数域中的代数恒等式都是成立的. 例如 $z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)\times(z_1-z_2)$, $(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$ 等仍成立. 复数域与实数域的一个不同点是,复数不能比较大小. 我们知道,向量是不能比较大小的,复数 z 作为复平面上的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来讲,也是不能比较大小的. 但是由于复数的模和主辐角都是实数,因而是可以比较大小的.

⑤ 复数的乘幂与开方

设非零复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,其正整数次幂 z^n 是 n 个相同因子的乘积,于是

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

当 $r=1$ 时,有棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

定义 9 若对于复数 z,存在复数 w 满足等式 $w^n=z$(n 为大于 1 的正整数),则称 w 为 z 的 n 次方根,记作 $\sqrt[n]{z}$,即

$$w=\sqrt[n]{z}.$$