全国各类成人高等学校招生考试
应试指导及模拟试题丛书

专科起点升本科

高等数学（一）

王海英　李　广　编著

清华大学出版社

全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书

专科起点升本科

高等数学(一)

王海英　李　广　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书紧密结合2002年最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》,采取同步练习的形式,对高等数学的内容进行梳理,使考生在掌握基本内容的基础上对考试的重点内容进一步复习、巩固、检验、提高。模拟试题全部按照新大纲的试卷结构和题型要求进行编写,使考生在熟悉新题型的同时强化了考试重点内容,并附有2002年的全真试卷供考生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/王海英,李广编著.—北京:清华大学出版社,2003
(全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书)专科起点升本科
ISBN 7-302-06443-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①王… ②李… Ⅲ.高等数学－成人教育:高等教育－升学参考资料
Ⅳ.013－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第018891号

出 版 者:清华大学出版社　　地　址:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编:100084
社 总 机:010-62770175　　客户服务:010-62776969
责任编辑:苗建强
封面设计:秦　铭
版式设计:仝昌林
印 刷 者:北京密云胶印厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　本:185×260　印张:20.5　字数:470千字
版　次:2003年9月第1版　2003年9月第1次印刷
书　号:ISBN 7-302-06443-1/O·288
印　数:1～5000
定　价:25.00元

前　　言

为了帮助参加全国各类成人高等教育专科段的广大考生顺利通过全国各类成人高等学校专科起点升本科入学考试，我们特组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授按照新大纲编写了复习考试系列配套教材——《全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书》。本套丛书包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《教育理论》、《文艺理论》和《医学综合》共9册。

本书紧密结合2002年最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，采取同步练习的形式，对高等数学的内容进行梳理，使考生在掌握基本内容的基础上对考试的重点内容进一步复习、巩固、检验和提高。模拟试题全部按照新大纲的试卷结构和题型要求进行编写，使考生在熟悉新题型的同时强化了考试重点内容，书末附有2002年的全真试卷供考生参考。而且根据《复习考试大纲》的要求、命题难易比例和考试题型比例设计了"考纲要求"、"知识精解"、"典型题解析"和"同步训练与参考答案"四部分内容。

考纲要求——对最新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细地阐述，起到对大纲内容的延伸、细化作用。

知识精解——对考试大纲涵盖的全部内容，包括考核的基本知识点、重点、难点和综合运用点一一进行了阐述，让考生对基本内容有更多的了解和把握。

典型题解析——同时精选了典型试题，力求突出考试内容的要求、考试题型的了解以及解题技巧的训练。

同步训练与参考答案——为了让考生了解和掌握各章节的内容，每章都以强化练习题的方式覆盖所有考纲考点，以利于考生的复习和备考，体现了最新考试题型，并对试卷命题的特点和趋势有宏观的把握。

本书由王海英、李广总编，其他编写人员还有张文红、王瑛红、金晓威、赵春民、陈启顺、王晓堂、王春光等，这些教师都工作在教学第一线，具有很高的教学理论和丰富的实践经验。

限于作者水平，书中疏漏之处欢迎同行和读者批评指正。

编者

2003年4月

目　　录

第1章 函数、极限、连续

1.1 函 数

1.1.1 考纲要求

1. 理解函数的概念，会求函数的表达式及定义域、函数值；会求分段函数的定义域、函数值；会画简单的分段函数的图像.

2. 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图像），会求单调函数的反函数.

4. 熟练掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程.

5. 掌握基本初等函数的性质及其图像.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

1.1.2 知识精解

1.1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

给定两个实数集 D 和 M，若有一个对应法则 f，使得对任意的 $x\in D$，都存在唯一的 $y\in M$ 与之对应，则称 f 是定义在实数集 D 上的函数，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围，即实数集 D 称为函数的定义域. 对于 D 中任意的 x，根据对应法则，f 所对应的 M 中的数 y，称为 f 在点 x 的函数值，记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$W = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subseteq M,$$

称 W 为函数的值域.

注 当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，才认为它们是同一个函数.

2. 分段函数

在定义域的不同部分用不同的表达式来描述的函数称为分段函数.

对于分段函数，不管它分成几段，都代表一个函数，而不是几个函数. 求分段函数的值域，应该从自变量的不同部分分段计算. 例如，符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数，对应法则 f 为：若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)=1$；若 $x=0$，则 $f(0)=0$；若 $x\in(-\infty,0)$，则 $f(x)=-1$. 它的图像如图 1-1 所示.

注 (1)在分段函数中,所有表达式对应的自变量集合的并集即为该分段函数的定义域.

(2)定义域的各段最多只能在端点处重合,重合时,对应的函数值应该相等.

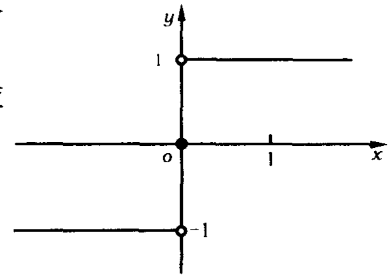

图 1-1

3. 函数的表示法

函数的表示法主要有三种:解析法、列表法和图像法.

(1)解析法

用数学式表示自变量和因变量之间对应关系的方法称为解析法,也叫公式法. 例如$f(x)=x^2+1$,$f(x)=3\sin x$ 都是用解析法表示的函数.

(2)列表法

在实际应用中,常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,如对数表、三角函数表、平方表等. 用表格来表示函数的方法称为列表法.

(3)图像法

对于函数 $y=f(x)$,对其定义域内任一点 x,都对应一个 y 值. 在平面直角坐标系 xOy 中,以这样一对 x,y 为坐标确定一个点$P(x,y)$. 当 x 在其定义域内变动时,点 P 的轨迹称为函数 $y=f(x)$的图像.

当然,如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线至多只有一个交点,那么这条曲线表示一个单值函数. 当自变量值等于曲线上点的横坐标时,对应的函数值为该点的纵坐标. 可见函数可由坐标平面上的曲线来表示. 这种表示函数的方法称为图像法.

4. 隐函数

如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出,则称 y 为 x 的隐函数. 相对于隐函数,我们称解析表达式 $y=f(x)$确定的函数为显函数. 例如,方程 $xy+y-1=0$ 能确定一个定义在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$上的隐函数 $y=f(x)$. 我们能从这个方程中将 y 解出来,这个函数也就表示为显函数的形式:

$$y=\frac{1}{1+x}$$

注 (1)并不是任一方程都能确定出隐函数. 例如方程 $x^2+y^2+C=0$,当 $C>0$ 时,不能确定任何函数 $f(x)$,使得 $x^2+(f(x))^2+C=0$. 只有当 $C\leqslant 0$ 时,才能确定隐函数.

(2)即使方程能确定隐函数,也不一定能用显函数解析式表达.

1.1.2.2 函数的性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,对 D 内任意两点x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,若有

(1)$f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 上单调增加;

(2)$f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 上单调减少.

注 单调增加和单调减少统称为单调. 我们说"$f(x)$为单调函数"是指 $f(x)$为其定义域上的单调函数.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$),如果对于任意的 $x\in D$,有

(1) $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数;

(2)若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数.

注 (1)讨论函数奇偶性的前提是自变量的取值范围是以原点为中心的对称区间(或者集合) D. 这时对任意 $x\in D$, $f(x)$ 有意义;则 $-x\in D$, $f(-x)$ 也有意义.

(2)两个奇(偶)函数的和仍为奇(偶)函数;两个奇(偶)函数的积必为偶函数;奇函数和偶函数的积必为奇函数.

(3)奇函数图像关于原点对称,偶函数图像关于 y 轴对称.

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $M>0$,使对任意 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $f(x)$ 在 D 上有界;若对任何 $M>0$,总存在 $x_0\in D$,使得 $|f(x_0)|>M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

注 有界函数的"界"不是唯一的. 例如, $f(x)=\sin x$,取 $M=1$,则对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $|f(x)|\leqslant 1$. 当然,取 M 为大于1的任何数,也满足 $|f(x)|\leqslant M$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T(T\neq 0)$,使得对任意 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且满足 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的一个周期.

显然,若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $2T,3T,\cdots$ 也是 $f(x)$ 的周期. 在周期函数的所有周期中有一个最小的周期,称这个周期为 $f(x)$ 的最小正周期. 周期函数的最小正周期是唯一的,通常称函数的最小正周期为周期.

1.1.2.3 反函数

设已知函数 $y=f(x)$, $x\in D$,若对 $f(x)$ 的值域 W 中的每一个值 y_0,在 D 中有且只有一个值 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$,则按此对应法则,得到一个定义在 W 上的函数,称这个函数为 $f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in W$,习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$, $x\in W$.

可见, $f(x)$ 也为 $f^{-1}(x)$ 的反函数,且 $f(x)$ 的定义域、值域分别与 $f^{-1}(x)$ 的值域、定义域相同. $f^{-1}(f(x))=x, x\in D$; $f(f^{-1}(x))=x, x\in W$.

函数 $f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在 xOy 坐标平面上关于直线 $y=x$ 对称.

注 不是所有的函数都存在反函数,如函数 $y=C$ (C 为常数)即不存在反函数.

1.1.2.4 函数的四则运算

给定两个函数: $f(x), x\in D_1$; $g(x), x\in D_2$,记 $D=D_1\cap D_2$. 若 $D_1\cap D_2=\varnothing$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 当 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$ 时,定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积如下:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)+g(x), \quad x\in D; \\ G(x) &= f(x)-g(x), \quad x\in D; \\ H(x) &= f(x)\cdot g(x), \quad x\in D. \end{aligned}$$

在 D 中去掉 $g(x)=0$ 的点,令 $D^*=\{x\,|\,x\in D \text{ 且 } g(x)\neq 0\}$,当 $D^*\neq\varnothing$ 时,可以定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D^* 上的商:

$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D^*.$$

1.1.2.5 复合函数

设有两个函数 $y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E$.如果 $E^*=\{x\mid g(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$,则对任意 $x\in E^*$,x 通过 g 对应 D 中唯一的一个值 u,u 又通过函数 f 对应唯一的值 y.这样就确定了一个定义在 E^* 上,以 x 为自变量、y 为因变量的函数,称为由函数 f 和 g 复合运算得到的复合函数,记为 $y=f(g(x)),x\in E^*$.

注 并不是任意两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$都能复合成 y 为 x 的函数,只有当 $E^*=\{x\mid g(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$,即 $D\cap g(E)\neq\varnothing$时,两个函数才能够进行复合.例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$,可以看出,不论 x 取什么值,相应的 u 值一定不小于 2,但是使得 $y=\arcsin u$ 有意义的 u 值必须满足$|u|\leqslant 1$,所以 $\arcsin(x^2+2)$是无意义的,故而 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

1.1.2.6 基本初等函数的性质和图像

1. 幂函数

函数 $y=x^u$(u 为常数)称为幂函数.它的定义域要根据 u 的值而定.但不论 u 取什么值,幂函数 $y=x^u$ 在$(0,+\infty)$内都有意义.在 $y=x^u$ 中,$u=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时是最常见的幂函数.图 1-2、图 1-3、图 1-4 所示都是常见幂函数的图像.

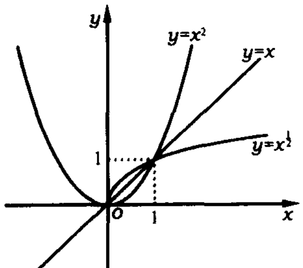

图 1-2

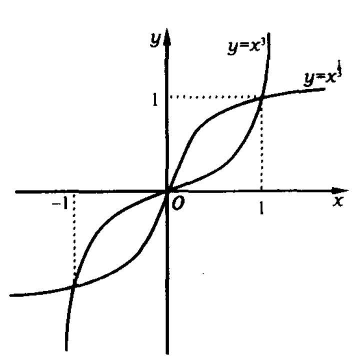

图 1-3

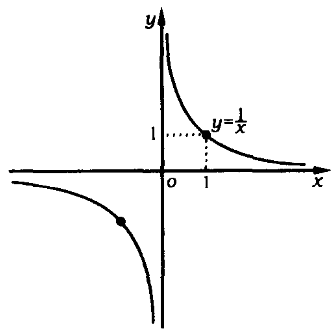

图 1-4

2. 指数函数

函数 $y=a^x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$)称为指数函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

若 $a>1,y=a^x$ 单调增加;若 $0<a<1,y=a^x$ 单调减少,$y=a^x$ 的值域是$(0,+\infty)$.因此指数函数的图像总是在 x 轴上方,且通过点(0,1),如图 1-5 所示.

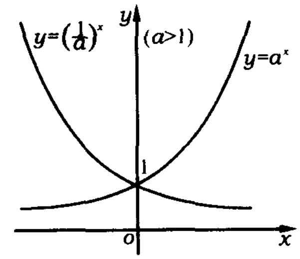

图 1-5

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作 $y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$),称为对数函数,它的定义域(即 $y=a^x$ 的值域)为$(0,+\infty)$.

若 $a>1$，$y=\log_a x$ 单调增加；若 $0<a<1$，$y=\log_a x$ 单调减少，$y=\log_a x$ 的值域（即 $y=a^x$ 的定义域）为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,1)$ 内函数值为负，图像在 x 轴下方；在 $(1,+\infty)$ 内函数值为正，图像在 x 轴上方，图像过点 $(1,0)$. 函数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像与函数 $y=\log_a x$ 的图像关于 x 轴对称. 对数函数的图像如图1-6 所示.

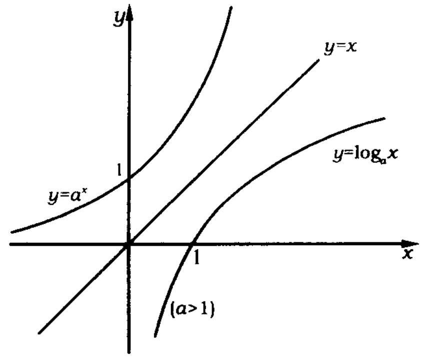

图 1-6

4. 三角函数

(1)正弦函数

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 它为有界函数、奇函数、$T=2\pi$ 的周期函数. 从而 $y=\sin x$ 的图像应界于直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，且关于原点对称，在每个周期内图像相同，如图 1-7 所示.

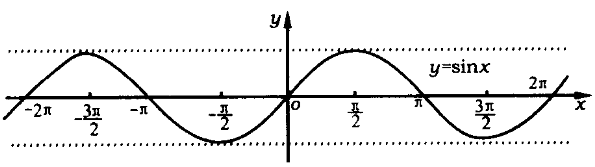

图 1-7

(2)余弦函数

函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 它为有界函数、偶函数、$T=2\pi$ 的周期函数. 从而 $y=\cos x$ 的图像界于直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，且关于 y 轴对称，在每个周期内图像相同，如图 1-8 所示.

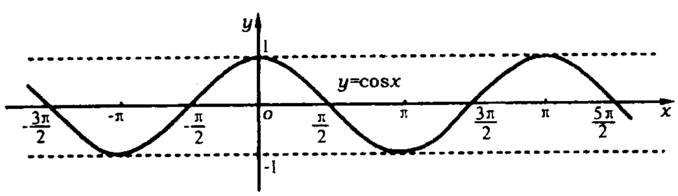

图 1-8

(3)正切函数

函数 $y=\tan x$ 称为正切函数. 它的定义域为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它为奇函数、$T=\pi$ 的周期函数. $y=\tan x$ 的图像关于原点对称，如图1-9 所示.

(4)余切函数

函数 $y=\cot x$ 称为余切函数. 它的定义域为 $(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它为奇函数、$T=\pi$ 的周期函数. 从而 $y=\cot x$ 的图像关于原点对称，如图1-10

所示.

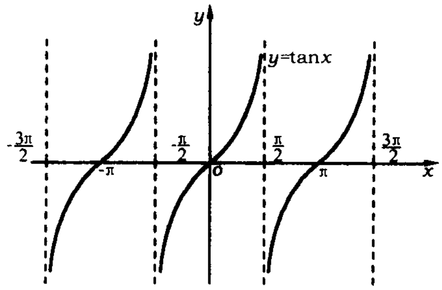

图 1-9

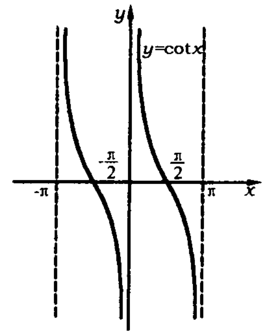

图 1-10

(5)正割函数

函数 $y=\sec x$ 称为正割函数，$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，它的定义域为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是偶函数、$T=2\pi$ 的周期函数. 它的图像较少用到，在此从略.

(6)余割函数

函数 $y=\csc x$ 称为余割函数，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 它的定义域为 $(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是奇函数、$T=2\pi$ 的周期函数. 它的图像较少用到，在此从略.

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数. 由于三角函数在它们的定义域内不是单调的，所以它们的反函数都是多值函数. 为了避免多值性，通常限制它的值域，使其成为单值的，这样的单值分支仍称为反三角函数.

(1)反正弦函数和反余弦函数

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数分别为：

$$\text{反正弦函数 } y=\arcsin x,\quad \text{反余弦函数 } y=\arccos x.$$

它们的定义域都为 $[-1,1]$，$y=\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$y=\arccos x$ 的值域为 $[0,\pi]$.

$y=\arcsin x$ 是奇函数、单调递增函数；$y=\arccos x$ 是单调递减函数. 它们的图像分别如图 1-11 和图 1-12 所示(图中的实线部分).

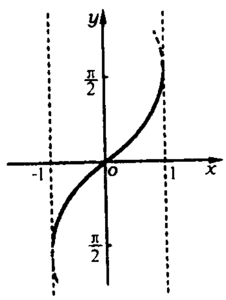

图 1-11

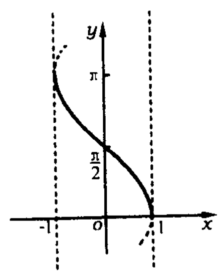

图 1-12

(2)反正切函数和反余切函数

正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的反函数分别为：

$$\text{反正切函数 } y=\arctan x,\quad \text{反余切函数 } y=\operatorname{arccot} x.$$

它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，$y=\arctan x$ 的值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\operatorname{arccot} x$ 的值域为 $(0,\pi)$.

$y=\arctan x$ 是奇函数、单调递增函数；$y=\operatorname{arccot} x$ 是单调递减函数. 它们的图像分别如图 1-13 和图 1-14 所示(图中的实线部分).

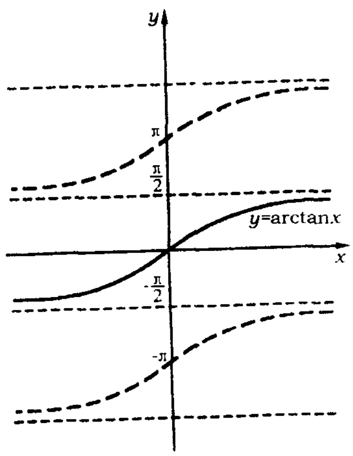

图 1-13

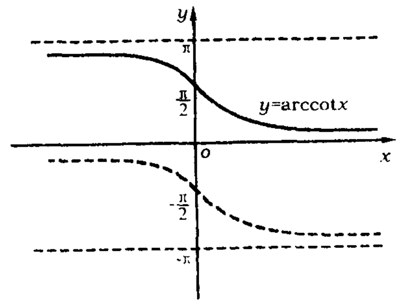

图 1-14

(3)反正割函数和反余割函数

反正割函数和反余割函数较少用到，在此从略.

6. 初等函数的概念

上面介绍的五种函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个表达式来表示的函数，称为初等函数.

1.1.3　典型题解析

本部分的主要目的是讲解基本题型，总结解题的基本思路和基本方法. 下面根据重要考点讲述本节主要内容.

1.1.3.1　考查函数的基本概念

【例 1.1】　下列表达式中可以认作 y 是 x 的函数有哪些？

(1) $y=5$　　(2) $x^2+y^2+2xy-x=3$

(3) $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=t^2+5 \end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases} x-3 & x\geqslant 0 \\ 4x+5 & x<0 \end{cases}$

【解析】　函数的定义是解决这类问题的重要依据.

(1)当自变量 x 的值变动时，变量 y 的值并不一定随 x 的变化而变化，即 y 有可能总取

同一个值.如 $y=5$,表达式中没有出现 x,但是这个表达式可以解释为不论 x 取什么值,y 所对应的值总是 5.因此由函数定义可知,$y=5$ 表示函数.事实上,对于任意常数 C 来说,$y=C$也表示一个函数.

(2)在函数的解析表示法中也没有限定对应关系必须用 $y=f(x)$来表示,它们的依赖关系可能是某个方程 $F(x,y)=0$,此时称 y 为x 的隐函数.因此可以将 y 认作是由$x^2+y^2+2xy-x=3$ 确定的 x 的函数.

(3)在函数的对应关系中没有限定依赖关系必须是 x 与y 的直接关系,如果 x,y 通过第三个变量联系起来,如 $x=\varphi(t)$,$y=\varphi(t)$也可以称为参数方程表示的函数.因此可以将 $\begin{cases}x=3t+4\\y=t^2+5\end{cases}$认作是由参数方程确定的函数.

(4)在函数的解析表示法中并没有限定一个函数只能用一个解析式来表示,因此完全可能出现用两个、三个或更多解析表达式才能表达一个函数的情况,称为分段函数,因此 $y=\begin{cases}x+3 & x\geqslant 0\\4x+5 & x<0\end{cases}$为 x 的函数.

1.1.3.2 求函数的定义域

【例 1.2】 下列各组函数中,表示同一个函数的有(　　).

A. $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$

B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $g(x)=x-1$

C. $f(x)=\sqrt{x(x+1)}$与 $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$

D. $f(x)=\sqrt{x^2}$与 $g(x)=|x|$

【解析】 选项 A 中,$f(x)$的定义域与 $g(x)$的定义域完全一致,都是$(-\infty,+\infty)$.但 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$,很明显,$f(x)$与 $g(x)$的值域是不一样的,因此 $f(x)$与 $g(x)$不是同一个函数,应排除 A.

选项 B 中,$f(x)$的定义域为 $x\neq -1$,而 $g(x)$的定义域却是$(-\infty,+\infty)$.由此可见,$f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,从而不是同一个函数.

选项 C 中,$f(x)$的定义域为 $x(x+1)\geqslant 0$,即$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\end{cases}$,解得 $f(x)$定义域为$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\end{cases}$,解得 $g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$,它们的定义域不同,因而不是同一个函数.

选项 D 中,$f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,且对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x)=g(x)=|x|$,所以它们是同一个函数.

本题正确答案应为 D.

小结 本题考查函数的基本概念.在函数的定义里,要注意两点:一个是对应关系,一个是定义域.如果它们的对应关系和定义域一致,两个函数即可以看成是同一个函数.

【例 1.3】 函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 在(　　)内表示同一个函数.

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$　　　　D. $(-\infty,+\infty)$

【解析】 注意 $f(x)=\ln x^2$ 的定义域为 $x^2>0$，即 $x\neq 0$；而 $g(x)=2\ln x$ 的定义域为 $x>0$. 当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x^2=2\ln x=g(x)$. 因此，当 $x>0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数. 因此 C 为正确答案.

【例 1.4】 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-6x+5}$ 的定义域.

A. $-2\leqslant x\leqslant 2$　　　　B. $-2\leqslant x\leqslant 1$ 及 $1\leqslant x\leqslant 5$

C. $-2\leqslant x\leqslant 5$　　　　D. $-2\leqslant x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$

【解析】 由于函数表达式中偶次方根号下的表达式必须大于或等于零，即 $4-x^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 由于函数表达式中分母不能为零，即 $x^2-6x+5\neq 0$，因此 $x\neq 1, x\neq 5$. 综合起来有 $-2\leqslant x<1$，及 $1<x\leqslant 2$.

小结 函数的定义域是指使函数有定义的、变量 x 所允许的取值范围，因此求定义域常常是排除那些使函数没定义的点. 通常对于由解析表达式表达的函数所要求的是：

(1)分式中的分母不能为零；

(2)偶次方根号下的表达式不能取负值；

(3)对数的真数必须大于零；

(4)取反正弦、反余弦的值的绝对值不能大于 1；

(5)取正切的角不能为 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（k 为整数）；

(6)对于实际问题则需保证其有符合题意的实际意义.

【例 1.5】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(3x)$　　　(2) $f(x^2-1)$　　　(3) $f(\sin x+1)$

【解析】 (1)令 $t=3x$，根据题意，$f(t)$ 的定义域为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，从而应该满足 $0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$，即 $0<3x\leqslant\dfrac{1}{2}$，解得 $0<x\leqslant\dfrac{1}{6}$，所以函数 $f(3x)$ 的定义域为 $\left(0,\dfrac{1}{6}\right]$.

(2)同样，由 $0<x^2-1\leqslant\dfrac{1}{2}$，解得 $-1<x\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $\left(-1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

(3)同样，由 $0<\sin x+1\leqslant\dfrac{1}{2}$，得 $-1<\sin x\leqslant-\dfrac{1}{2}$，解得 $2k\pi-\dfrac{5}{6}\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi-\dfrac{\pi}{6}$ 且 $x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 所以函数 $f(\sin x+1)$ 的定义域为 $\left[2k\pi-\dfrac{5}{6}\pi,2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\right]$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

1.1.3.3 函数表达式的运用

【例 1.6】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=$______.

【解析】 由于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，可知函数的依赖关系式为 $f(*)=\dfrac{1}{f(*)}$. 因此当 $x\neq 0$ 时

$$f[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$