

计算机代数系统 与大地测量数学分析

Computer Algebra System
and Mathematical Analysis
in Geodesy

边少锋 许江宁 编著



国防工业出版社

<http://www.ndip.cn>

本书由国家杰出青年科学基金(批准号 40125013)

武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金 WKL(99)0201
和访问学者基金

资助出版

计算机代数系统与大地测量 数学分析

Computer Algebra System and Mathematical Analysis in Geodesy

边少锋 许江宁 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书概括介绍了计算机代数与目前流行的计算机代数系统 Mathematica 和 Maple。这两种软件是当今具有代表性的计算机代数系统,可极其有效地提高科研和工程技术人员进行数学分析和代数推演等诸如此类数学问题的效率。本书结合大地测量实际,具体介绍了计算机代数系统在椭球大地测量、大地测量数据处理、物理大地测量、卫星大地测量等方面的应用。本书可作为测量学、大地测量学、地球物理学等相关专业大专院校师生、科研人员、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算机代数系统与大地测量数学分析/边少锋,许江宁编著. —北京:国防工业出版社,2004.4
ISBN 7-118-03373-1

I. 计... II. ①边...②许... III. 大地测量-应用软件 IV. P22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 119080 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14 $\frac{1}{4}$ 311 千字

2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月北京第 1 次印刷

印数:1—2500 册 定价:22.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

计算机代数系统是计算机科学与数学分析和代数推理相结合的产物。由于计算机代数系统在一定程度上可以使科学研究和工程技术人员从枯燥繁琐的数学分析和代数推理中解放出来,从而有效地提高工作效率,所以得到了比较广泛的应用。目前流行的计算机代数系统有 Mathematica、Maple、Mathcad 等。借助计算机代数系统,研究人员的注意力可着重放在解决问题的本质方面,并且计算机代数系统强大的可视化功能还会使枯燥的数学分析问题变得更生动有趣,也使研究人员更容易发现大量数据背后隐藏的规律。

编著者近几年在使用计算机代数系统从事大地测量和导航定位技术方面的研究工作中,深感计算机代数系统是解决有关数学分析问题强有力的手段之一。计算机代数系统与一般的计算机程序设计语言有一定联系,但两者的应用领域有所不同。计算机程序设计语言只适合于数值计算和软件开发,而 Mathematica、Maple 等计算机代数系统则可以直接用于数学分析、代数运算、数据分析和拟合、科学计算可视化等方面。因此,我们认为,为推广计算机代数系统这种解决数学问题的高效率手段和工具在大地测量领域的应用,有必要总结编著者近年来使用计算机代数系统的研究成果和经验,以期能对同行和广大读者有所启迪。相信读者通过阅读,可以体会出计算机代数系统在解决某些大地测量数学分析问题时所表现出来的无与伦比的魅力。

全书共分七章。第一章介绍了计算机代数和目前流行的几种计算机代数系统,第二章和第三章分别对 Mathematica、Maple 这两种计算机代数系统做了比较系统的介绍。后四章分别讨论了计算机代数系统在解决椭球大地测量、大地测量数据处理、物理大地测量和人卫大地测量数学分析问题中的应用。这四章除一小部分章节使用 Maple 外,其他章节主要是基于 Mathematica 计算机代数系统讨论的。事实上,Maple 在解决数学分析问题上也有与 Mathematica 同样出色、甚至更上乘的表现。

由于时间和篇幅的限制,对人卫大地测量只讨论了一些比较基本的问题,而从人卫大地测量摄动问题的复杂性来看,可能恰恰是计算机代数系统 Mathematica、Maple 最能显示其优越性的一个应用领域。

本书写作过程中,得到了国家自然科学基金委地球物理处于晟主任、武汉大学测绘与遥感信息工程国家重点实验室龚健雅副主任、张松波副主任、宋莉明秘书的关怀,得到了海军工程大学四系领导的关心与支持,书中插图由研究生金际航绘制,书稿校对由研究生纪兵完成,特此表示感谢。

最后,由于编著者学识水平有限和编写时间匆忙,书中难免有谬误之处,恳请各位读者同仁批评指正,电子邮件地址是 sfbian@sina.com,编著者将不胜感激。

编著者

2004 年 01 月于海军工程大学

符号说明

$\%$	专用符号,表示 Mathematica 上一次计算结果
-Graphics-	专用符号,表示 Mathematica 输出的图形
B, L	大地纬度、经度
X, Σ	子午线弧长、椭球总面积
e, e'	椭球第一偏心率、第二偏心率
M, N	子午圈曲率半径、卯酉圈曲率半径
$\mathbf{B}$	复数纬度
$\ * \parallel$	矩阵或向量范数
a, b	参考椭球长半径、短半径;矩形格网间距
ρ_i, α_i	卫星伪距、方位角
β, φ	基线纵摇角、航向角
m	中误差
F_x, F_y, F_z	引力在坐标轴三方向的引力分量
V	引力位
$i = \sqrt{-1}$	虚数单位
α_1, β_1	线性插值多项式系数
σ, σ_i	中央区积分域、划分后的子区域
$tc, t\xi, t\eta$	地形重力垂直方向改正和地形垂线偏差改正
G	牛顿引力常数
γ	欧拉常数,正常重力
$\Delta tc, \Delta t\xi, \Delta t\eta$	地形校正中央区积分贡献
ζ, ξ, η, L	高程异常、垂线偏差和重力垂直梯度
α_{ij}	多项式系数
$\Delta\zeta, \Delta\xi, \Delta\eta, \Delta L$	地球重力场泛函中央区积分贡献
T	扰动位
GM	牛顿引力常数与地球质量乘积项
C_{nm}, S_{nm}	扰动位球谐函数展开系数
$P_{nm}(x)$	Legendre 函数
$S(\Psi), V(\Psi)$	Stokes 函数、Vening Meinesz 函数
$J_m(x)$	m 阶 Bessel 函数
E, M, f	卫星轨道偏近点角、平近点角和真近点角
e	卫星轨道偏心率

J_2	地球引力场二阶项
i, Ω, ω	卫星轨道倾角、轨道升交点经度和近地点角距
F_{lpq}, G_{lpq}	倾角函数、偏心率函数
$\nabla^m f_n$	f_n 的 m 阶后向差分算子
黑正体字母:	计算机代数系统输入量、复变量或向量

目 录

第一章 计算机代数与计算机代数系统	1
§ 1.1 概述	1
§ 1.2 Mathematica 计算机代数系统	2
§ 1.3 Maple 计算机代数系统	3
§ 1.4 Mathcad 计算机代数系统	3
§ 1.4.1 Mathcad 工作窗口	4
§ 1.4.2 Mathcad 资源中心	5
§ 1.5 MATLAB 矩阵计算与代数系统	6
§ 1.5.1 MATLAB 工作界面	7
§ 1.5.2 MATLAB 演示窗口	8
§ 1.5.3 MATLAB 笔记本	8
第二章 Mathematica 计算机代数系统	10
§ 2.1 Mathematica 工作界面	10
§ 2.2 Mathematica 帮助系统	11
§ 2.3 Mathematica 数值类型与数学常数	12
§ 2.3.1 数的类型	12
§ 2.3.2 数学常数	13
§ 2.3.3 数值类型转换	14
§ 2.4 多项式运算	14
§ 2.4.1 多项式的展开	14
§ 2.4.2 取出多项式的部分元素	15
§ 2.4.3 有理多项式	16
§ 2.5 求极限与微分	18
§ 2.5.1 求极限	18
§ 2.5.2 微商(导数)	19
§ 2.5.3 全导数	19
§ 2.6 不定积分和定积分	20
§ 2.6.1 不定积分	20
§ 2.6.2 不定积分的计算范围	21
§ 2.6.3 定积分	22
§ 2.7 幂级数展开和运算	22
§ 2.7.1 级数展开	23

§ 2.7.2 幂级数的运算	24
§ 2.7.3 幂级数转换为一般表达式	25
§ 2.8 积分变换	26
§ 2.8.1 Laplace 变换	26
§ 2.8.2 Fourier 变换	27
§ 2.9 矩阵和线性代数	28
§ 2.9.1 矩阵的定义	29
§ 2.9.2 矩阵的加法、减法和乘法运算	30
§ 2.9.3 矩阵的转置和逆矩阵	30
§ 2.9.4 方程组求解	31
§ 2.10 矩阵分解、特征值和特征向量	31
§ 2.10.1 矩阵分解	32
§ 2.10.2 特征值和特征向量	33
§ 2.11 常用数值算法	34
§ 2.11.1 最小二乘拟合	34
§ 2.11.2 多项式插值	36
§ 2.11.3 非线性方程求根	36
§ 2.12 二维作图	38
§ 2.12.1 二维函数作图基本选择项	38
§ 2.12.2 其他特殊二维图形绘制	39
§ 2.13 三维作图	41
§ 2.13.1 三维效果图	41
§ 2.13.2 三维图形的坐标系统和视点	43
§ 2.13.3 三维效果图的表面效果	44
§ 2.13.4 等值线图 and 矢量图	45
§ 2.14 地图绘制	47
§ 2.15 常用函数参考	49
第三章 Maple 计算机代数系统	54
§ 3.1 Maple 操作界面	54
§ 3.2 Maple 在线帮助	55
§ 3.3 基本代数运算	56
§ 3.3.1 代数式化简、展开和因式分解	56
§ 3.3.2 分式运算	57
§ 3.3.3 数学式转换	58
§ 3.3.4 方程式求解	59
§ 3.3.5 超越方程的解	60
§ 3.4 二维函数作图	61
§ 3.4.1 一般函数曲线作图	61
§ 3.4.2 参数曲线作图	62

§ 3.4.3 数据点绘图	64
§ 3.4.4 极坐标作图	65
§ 3.4.5 绘图指令选项说明	65
§ 3.5 三维函数作图	68
§ 3.5.1 基本三维函数作图	68
§ 3.5.2 三维参数作图	68
§ 3.5.3 plot3d 指令选项	69
§ 3.6 其他一些特殊形式的绘图指令	70
§ 3.6.1 空间曲线绘图	70
§ 3.6.2 圆柱坐标和球坐标作图	71
§ 3.6.3 隐函数作图	72
§ 3.6.4 等值线与等密度图绘制	73
§ 3.6.5 矢量场与梯度图绘制	73
§ 3.6.6 复数映射绘图	74
§ 3.6.7 矩阵绘图	75
§ 3.7 矩阵与线性代数运算	76
§ 3.7.1 线性代数程序库 linalg	77
§ 3.7.2 矩阵的建立和基本运算	80
§ 3.7.3 特征值、特征向量及其他一些矩阵特殊运算	81
§ 3.8 微积分	81
§ 3.8.1 微分	81
§ 3.8.2 积分	82
§ 3.8.3 近似积分	84
§ 3.9 数列与级数	85
§ 3.10 统计学应用与拟合	86
§ 3.10.1 描述数据特征的指令	86
§ 3.10.2 统计分布	88
§ 3.10.3 曲线曲面拟合	91
第四章 计算机代数解椭球大地测量中的数学分析问题	92
§ 4.1 子午线弧长正解问题	92
§ 4.2 参考椭球上梯形图幅面积计算	94
§ 4.3 级数展开法解子午线弧长反问题	95
§ 4.3.1 类纬度变量	95
§ 4.3.2 微分方程展开为变量 x 的正弦的幂级数	96
§ 4.3.3 逐项积分得子午线弧长反解表达式	97
§ 4.4 两点 Hermite 法解子午线弧长反问题	98
§ 4.4.1 基本思路分析	98
§ 4.4.2 计算机代数下的进一步展开	99
§ 4.5 三点 Hermite 法解子午线弧长反问题	100

§ 4.5.1 中点 $x = \pi/4$, $B(x = \pi/4)$ 及其导数的确定	100
§ 4.5.2 利用插值条件确定待定系数	101
§ 4.6 三种子午线弧长反解公式分析与对比	101
§ 4.7 大地线的参数方程	102
§ 4.8 大地线 Legendre 级数展开, Gauss 平均引数展开	105
§ 4.9 复变函数表示的 Gauss 投影正解	107
§ 4.10 复变函数表示的 Gauss 投影反解	109
§ 4.11 复变函数表示的 Gauss 投影尺度比和子午线收敛角	110
§ 4.12 复变函数表示的 Gauss 投影算例	111
§ 4.13 椭球大地测量作图	113
第五章 计算机代数解大地测量数据处理中的数学分析问题	115
§ 5.1 阵列代数双二次、双三次插值	115
§ 5.1.1 双二次多项式插值	115
§ 5.1.2 双三次多项式插值	118
§ 5.2 高次多项式插值 Runge 现象, 切比雪夫多项式插值	121
§ 5.3 非线性函数线性化与误差方程组成	124
§ 5.4 误差传播定律与控制网优化设计	125
§ 5.5 典型图形平差	127
§ 5.6 三角锁网精度估算	131
§ 5.7 矩阵特征值、特征向量和矩阵范数计算	133
§ 5.8 确定协方差函数参数的代数准则	135
§ 5.8.1 准则 1—比值函数法	137
§ 5.8.2 准则 2—样条函数法	138
§ 5.8.3 算例	140
§ 5.9 确定点质量法质点埋藏深度的代数准则	141
§ 5.10 GPS 姿态测量误差分析	143
第六章 用计算机代数解物理大地测量数学分析问题	148
§ 6.1 柱体积分, 层间改正	148
§ 6.1.1 柱体积分	148
§ 6.1.2 层间改正	149
§ 6.2 矩形棱柱引力和引力位	150
§ 6.2.1 矩形棱柱的引力	150
§ 6.2.2 矩形棱柱的引力位	153
§ 6.3 球冠和球层冠引力位及引力	155
§ 6.3.1 球冠引力位和引力	155
§ 6.3.2 球层冠引力位和引力	156
§ 6.4 旋转椭球体在内部的引力和引力位	158
§ 6.4.1 基本积分式的导出	158
§ 6.4.2 用计算机代数计算与旋转椭球引力有关的定积分	159

§ 6.4.3 实变函数积分与复变函数	160
§ 6.5 地形校正中央区积分	161
§ 6.5.1 矩形域上的 8 分片线性插值地形校正积分	162
§ 6.5.2 菱形域上的 4 分片线性插值地形校正积分	165
§ 6.6 地球重力场泛函中央区奇异积分	168
§ 6.6.1 双二次多项式插值中央区奇异积分计算	168
§ 6.6.2 双三次多项式插值中央区奇异积分计算	172
§ 6.7 扰动位、扰动引力向量和扰动引力梯度张量的直角坐标表示	177
§ 6.7.1 扰动位二阶项的直角坐标表示	178
§ 6.7.2 扰动引力二阶项的直角坐标表示	179
§ 6.7.3 扰动位二阶项梯度张量的直角坐标表示	180
§ 6.8 绘全球或局部大地水准面和重力异常等值线图	181
§ 6.8.1 绘全球大地水准面等值线图	181
§ 6.8.2 绘全球重力异常等值线图	182
§ 6.9 Legendre 多项式, 连带 Legendre 函数和球面调和函数	183
§ 6.9.1 Legendre 多项式和连带 Legendre 函数定义与显示	183
§ 6.9.2 球面调和函数	185
§ 6.10 计算机代数解物理大地测量各问题举例	186
第七章 计算机代数解人卫大地测量中的数学分析问题	190
§ 7.1 椭圆运动的级数展开	190
§ 7.1.1 Bessel 函数	190
§ 7.1.2 偏近点角的展开	191
§ 7.1.3 真近点角的展开	192
§ 7.1.4 汉申函数	193
§ 7.2 三角多项式两种形式的转换, Legendre 函数向三角多项式的 转换	194
§ 7.2.1 三角函数倍角形式化为幂形式	194
§ 7.2.2 三角函数幂形式化为倍角形式	195
§ 7.2.3 连带 Legendre 函数转化为三角多项式	195
§ 7.3 一些函数的平均值	196
§ 7.3.1 一类含有三角函数特殊积分的计算	196
§ 7.3.2 平均值 $\overline{\cos qf}$ 的确定	197
§ 7.4 一阶项摄动, J_2 项	198
§ 7.4.1 部分轨道根数一阶项摄动	199
§ 7.4.2 部分轨道根数一阶长周期项摄动	200
§ 7.5 Kaula 理论与摄动函数展开	201
§ 7.6 倾角函数的确定	203
§ 7.7 偏心率函数的确定	204
§ 7.8 改型 Lagrange 线性解中的偏心率函数	205

§ 7.9 微分方程数值解法	206
附录	208
参考文献	209

Contents

Chapter I Computer Algebra and Computer Algebra Systems	1
§ 1.1 Introduction	1
§ 1.2 Computer Algebra System—Mathematica	2
§ 1.3 Computer Algebra System—Maple	3
§ 1.4 Computer Algebra System—Mathcad	3
§ 1.4.1 Mathcad's Working Windows	4
§ 1.4.2 Mathcad's Resource Center	5
§ 1.5 Matrix Computation and Computer Algebra System——MATLAB	6
§ 1.5.1 MATLAB's Working Windows	7
§ 1.5.2 MATLAB's Demo Program	8
§ 1.5.3 MATLAB's Notebook	8
Chapter II Computer Algebra System—Mathematica	10
§ 2.1 Mathematica's Working Window	10
§ 2.2 Mathematica's Help System	11
§ 2.3 Numerical Types and Mathematical Constants	12
§ 2.3.1 Numerical Types	12
§ 2.3.2 Mathematical Constants	13
§ 2.3.3 Conversions Between Numerical Types	14
§ 2.4 Polynomial Operations	14
§ 2.4.1 Polynomial Expansions	14
§ 2.4.2 Various Polynomial Operations	15
§ 2.4.3 Rational Polynomial	16
§ 2.5 Operations for Limit and Differentiation	18
§ 2.5.1 Limit Operation	18
§ 2.5.2 Differentiation	19
§ 2.5.3 Total Differentiation	19
§ 2.6 Infinite and Finite Integrals	20
§ 2.6.1 Infinite Integrals	20
§ 2.6.2 Specifications for Infinite Integrals	21
§ 2.6.3 Finite Integrals	22
§ 2.7 Expansions and Operations for Power Series	22
§ 2.7.1 Series Expansions	23

§ 2.7.2	Operation of Power Series	24
§ 2.7.3	Converting Power Series into General Expressions	25
§ 2.8	Integral Transform	26
§ 2.8.1	Laplace Transform	26
§ 2.8.2	Fourier Transform	27
§ 2.9	Matrix and Linear Algebra	28
§ 2.9.1	Matrix Definition	29
§ 2.9.2	Matrix Add, Subtraction and Multiplication	30
§ 2.9.3	Matrix Transpose and Inverse Matrix	30
§ 2.9.4	Solutions for Systems of Linear Equations	31
§ 2.10	Matrix Decomposition, Eigenvalues and Eigenvectors	31
§ 2.10.1	Matrix Decomposition	32
§ 2.10.2	Eigenvalues and Eigenvectors	33
§ 2.11	Common Numerical Algorithms	34
§ 2.11.1	Least Squares Fitting	34
§ 2.11.2	Polynomial Interpolation	36
§ 2.11.3	Non-Linear Equation Solutions	36
§ 2.12	Two Dimensional Plots	38
§ 2.12.1	Basic Options for Two Dimensional Plots	38
§ 2.12.2	Special Two Dimensional Plots	39
§ 2.13	Three Dimensional Plots	41
§ 2.13.1	Basic Options for Three Dimensional Plots	41
§ 2.13.2	Coordinate System and Viewpoint for Three Dimensional Plots	43
§ 2.13.3	Surface Light and Colors for Three Dimensional Plots	44
§ 2.13.4	Contour Plots and Vector Plots	45
§ 2.14	Map Projection and Plots	47
§ 2.15	Common Mathematica Operations	49
Chapter III	Introduction to Maple	54
§ 3.1	Maple Worksheet	54
§ 3.2	Maple Help on Line	55
§ 3.3	Basic Algebra Operations	56
§ 3.3.1	Simplifications, Expansions and Factor Decompositions for Algebra Expressions	56
§ 3.3.2	Rational Polynomials	57
§ 3.3.3	Conversions between Different Mathematical Expressions	58
§ 3.3.4	Equation Solutions	59
§ 3.3.5	Transcendental Function's Solutions	60
§ 3.4	Two Dimensional Plots	61
§ 3.4.1	General Function's Curve Plots	61

§ 3.4.2	Parametric Plots	62
§ 3.4.3	Data Point Plots	64
§ 3.4.4	Polar Coordinate Plots	65
§ 3.4.5	Specifications for Plot Optional Items	65
§ 3.5	Three Dimensional Plots	68
§ 3.5.1	Basic Three Dimensional Plots	68
§ 3.5.2	Three Dimensional Parametric Plots	68
§ 3.5.3	Plot3d Optional Items	69
§ 3.6	Plot Operations for Some Special Situations	70
§ 3.6.1	Space Curve Plots	70
§ 3.6.2	Plots by Cylinder and Spherical Coordinates	71
§ 3.6.3	Implicit Function Plots	72
§ 3.6.4	Contour and Con-Density Plots	73
§ 3.6.5	Vector Field and Gradient Plots	73
§ 3.6.6	Complex Function Plots	74
§ 3.6.7	Matrix Plots	75
§ 3.7	Matrix and Linear Algebra Computations	76
§ 3.7.1	Linear Algebra Program—linalg	77
§ 3.7.2	Matrix Definitions and Its Basic Operations	80
§ 3.7.3	Eigenvalues, Eigenvectors	81
§ 3.8	Differentiation and Integration	81
§ 3.8.1	Differentiation	81
§ 3.8.2	Integration	82
§ 3.8.3	Approximate Integration	84
§ 3.9	Number Sequence and Series	85
§ 3.10	Application of Statistics and Fitting	86
§ 3.10.1	Number Character of Data	86
§ 3.10.2	Statistical Distributions	88
§ 3.10.3	Curve and Surface Fitting	91

Chapter IV Solving Mathematical Problems

	in Ellipsoidal Geodesy with Computer Algebra	92
§ 4.1	The Expansion of Meridian Arc	92
§ 4.2	The Determination of a Trapezoidal Map Area on an Ellipsoid	94
§ 4.3	Inversion Problems of Meridian Arc in terms of Power Series	95
§ 4.3.1	Quasi-Latitude Variable x	95
§ 4.3.2	Expanding Differential Equation as a Power Series of x	96
§ 4.3.3	Getting the Expression through Integration	97
§ 4.4	Solving the Inverse Problem on Meridian Arc by Two Point Hermite Method	98
§ 4.4.1	Basic Concept	98

§ 4.4.2	Expansion in Terms of Computer Algebra	99
§ 4.5	Solving the Inverse Problem on Meridian Arc by Three Point Hermite Method ...	100
§ 4.5.1	Determination of Functional and Derivative Values at Mid-Point	100
§ 4.5.2	Determination of Unknown Coefficients	101
§ 4.6	Comparisons and Analysis of Three Methods	101
§ 4.7	Parametric Equations for Geodetic Line	102
§ 4.8	Legendre Series Expansion for Geodetic Line, Gauss Average Expansion	105
§ 4.9	Direct Solution of Gauss Projection by Complex Function	107
§ 4.10	Inverse Solution of Gauss Projection by Complex Function	109
§ 4.11	Expressions of Scale and Meridian Convergence Angle by Complex Function ...	110
§ 4.12	Computation Examples of Gauss Projection by Complex Function	111
§ 4.13	Ellipsoidal Geodesy Plots	113
Chapter V	Solving Mathematical Problems in Geodetic	
	Data Processing with Computer Algebra	115
§ 5.1	Bi-Quadratic and Bi-Cubic Polynomial Interpolation	115
§ 5.1.1	Bi-Quadratic Polynomial Interpolation137	115
§ 5.1.2	Bi-Cubic Polynomial Interpolation	118
§ 5.2	Runge Phenomena of Higher Polynomial Interpolation, Chebyshev Polynomial Interpolation	121
§ 5.3	Linearization of Non-Linear Function and Error Equations	124
§ 5.4	Error Estimation and Optimization of Control Networks	125
§ 5.5	Typical Figure Adjustments	127
§ 5.6	Precision Estimation of Triangular Networks	131
§ 5.7	Matrix Eigenvalues, Eigenvectors and Matrix Norms	133
§ 5.8	Algebra Rules for Parameters of Covariance Functions	135
§ 5.8.1	Criteria I—The Ratio Function Method	137
§ 5.8.2	Criteria II—Spline Method	138
§ 5.8.3	Computation Examples	140
§ 5.9	Algebra Rules for Depth of Mass Points	141
§ 5.10	Error Analysis Attitude Determination by GPS	143
Chapter VI	Solving Mathematical Problems in Physical Geodesy	
	with Computer Algebra	148
§ 6.1	Cylinder Integration, Bouguer Correction	148
§ 6.1.1	Cylinder Integration	148
§ 6.1.2	Bouguer Correction	149
§ 6.2	Potential and Gravitation of Rectangular Prism	150
§ 6.2.1	Potential of Rectangular Prism	150
§ 6.2.2	Gravitation of Rectangular Prism	153
§ 6.3	Potential and Gravitation of Spherical Cap and Spherical Layer Cap	155

§ 6.3.1	Potential and Gravitation of Spherical Cap	155
§ 6.3.2	Potential and Gravitation of Spherical Layer Cap	156
§ 6.4	Inner Potential and Gravitation of Reference Ellipsoid	158
§ 6.4.1	Derivation of Basic Integral Formula	158
§ 6.4.2	Determining the related Integrals in Terms of Computer Algebra	159
§ 6.4.3	Real Integral through Complex Function	160
§ 6.5	Innermost Integration of Terrain Corrections	161
§ 6.5.1	8 Piece Linear Interpolation and Integration	162
§ 6.5.2	4 Piece Linear Interpolation and Integration	165
§ 6.6	Innermost Integration for Gravity Field Functional	168
§ 6.6.1	Bi-Quadratic Interpolation and Integration	168
§ 6.6.2	Bi-Cubic Interpolation and Integration	172
§ 6.7	Expressions of Disturbing Potential, Gravity Vector and Gravity Gradient Tensor in the Rectangular Coordinates	177
§ 6.7.1	Expressions of the Second Order Disturbing Potential in the Rectangular Coordinates	178
§ 6.7.2	Expressions of the Second Order Disturbing Gravity in the Rectangular Coordinates	179
§ 6.7.3	Expressions of the Second Order Disturbing Gravity Gradient Tensor in the Rectangular Coordinates	180
§ 6.8	Contour Maps of Global Geoid and Gravity Anomalies	181
§ 6.8.1	Contour Map of Global Geoid	181
§ 6.8.2	Contour Map of Global Gravity Anomalies	182
§ 6.9	Legendre Polynomial, Associated Legendre Function and Spherical Harmonic Function	183
§ 6.9.1	Legendre Polynomial and Associated Legendre Function	183
§ 6.9.2	Spherical Harmonic Function	185
§ 6.10	Other Application of Computer Algebra in Physical Geodesy	186
Chapter VII	Solving Mathematical Problems in Satellite Geodesy with Computer Algebra	190
§ 7.1	Series Expansions of Elliptic Motion	190
§ 7.1.1	Bessel Function	190
§ 7.1.2	Expansions of Eccentric Anomaly	191
§ 7.1.3	Expansions of True Anomaly	192
§ 7.1.4	Hansen Functions	193
§ 7.2	Conversions of Trigonometric Polynomial, Conversions of Legendre Function to Trigonometric Polynomial	194
§ 7.2.1	Conversions of Multiple-Angles Formula	194