教育部考试中心组编

根据修订后的2005年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学（二）

考试大纲解析

2005 电大版

中央廣播電視大學出版社

根据修订后的2005年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写
专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学(二)考试大纲解析

教育部考试中心组编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学(二)考试大纲解析／教育部考试中心组编.
—北京：中央广播电视大学出版社，2005.1
（专科起点升本科入学考试参考丛书）
ISBN 7-304-02998-6

Ⅰ.高… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008502 号

根据修订后的 2005 年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写
专科起点升本科入学考试参考丛书
高等数学(二)考试大纲解析
教育部考试中心组编

出版·发行：中央广播电视大学出版社
电话：发行部：010-68519502　　总编室：010-68182524
网址：http://www.crtvup.com.cn
地址：北京市海淀区西四环中路 45 号
邮编：100039
经销：新华书店北京发行所

印刷：北京印刷二厂　　**印数**：0001～15000
版本：2005 年 1 月第 1 版　　2005 年 1 月第 1 次印刷
开本：B5　　**印张**：21.5　　**字数**：415 千字

书号：ISBN 7-304-02998-6/G·976
定价：26.00 元

（如有缺页或倒装，本社负责退换）

前　言

2004 年 10 月，教育部高校学生司和考试中心组织专家对 2002 年编写的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》（以下简称《大纲》）进行了修订，修订后的《大纲》充分考虑了成人考生的特点，更加注重考查考生的基础知识和基本能力，同时适当考查考生分析问题和解决问题的能力。

针对《大纲》的上述修订情况，为帮助专升本考生复习备考，我们组织参加《大纲》修订的专家编写了各科《考试大纲解析》。这套书按照修订后《大纲》的体例和复习考试内容要求进行了深入的阐述和讲解，力求帮助考生全面了解和准确把握《大纲》的内容和要求，从而提高知识水平和能力水平。

本套丛书共 10 册，即《政治考试大纲解析》、《英语考试大纲解析》、《大学语文考试大纲解析》、《教育理论考试大纲解析》、《高等数学（一）考试大纲解析》、《高等数学（二）考试大纲解析》、《民法考试大纲解析》、《艺术概论考试大纲解析》、《生态学基础考试大纲解析》、《医学综合考试大纲解析》。

书中若有疏漏和不当之处，恳请读者指正。

教育部考试中心

2005 年 1 月

第一篇　复习内容

第二篇　分类试题解析

第一篇

复习内容

第一章　极限和连续

§1.1 极　　限

一、复习考试要求

1. 了解极限的概念(对极限定义中"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"、"$\varepsilon-M$"的描述不作要求),能根据极限概念了解函数的变化趋势. 掌握函数在一点处的左极限与右极限以及函数在一点处极限存在的充分必要条件.

2. 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会用等价无穷小量代换求极限.

4. 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

二、复习考试内容

(一) 数列的极限

1. 数列

按一定顺序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列,记作$\{x_n\}$,其中每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 为数列的一般项或通项,例如

(1)$1,3,5,\cdots,(2n-1),\cdots$

(2)$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(3)$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(4)$1,0,1,0,\cdots,\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2},\cdots$

都是数列.

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$.

2. 数列的极限

定义 对于数列$\{y_n\}$，如果当$n\to\infty$时，y_n无限地趋于一个常数A，则称当n趋于无穷大时，数列$\{y_n\}$以常数A为极限，或称数列收敛于A，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时})$$

否则，称数列$\{y_n\}$没有极限. 如果数列没有极限，就称数列是发散的.

数列极限的几何意义：将常数A及数列的项$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$依次用数轴上的点表示，若数列$\{y_n\}$以$A$为极限，就表示当$n$趋于无穷大时，点$y_n$可以无限靠近点$A$.

（二）数列极限的性质

定理 1.1 （惟一性） 若数列$\{y_n\}$收敛，则其极限值必定惟一.

定理 1.2 （有界性） 若数列$\{y_n\}$收敛，则它必定有界.

注意：这个定理反过来不成立，也就是说，有界数列不一定收敛.

定理 1.3 （两面夹定理） 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足不等式

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

定理 1.4 若数列$\{y_n\}$单调有界，则它必有极限.

下面我们给出数列极限的四则运算法则.

定理 1.5 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \pm y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \cdot y_n] = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = A \cdot B$

(3) 当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}$$

（三）函数极限的概念

1. 当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

(1) 当$x\to x_0$时$f(x)$的极限

定义 对于函数$y=f(x)$，如果当x无限地趋于x_0时，函数$f(x)$无限地趋于一个常数A，则称当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x)\to A \quad (\text{当 } x\to x_0 \text{ 时})$$

(2) 当$x\to x_0$时$f(x)$的左极限

定义 对于函数$y=f(x)$，如果当x从x_0的左边无限地趋于x_0时，函数

$f(x)$无限地趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数$f(x)$的左极限是 A，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

或

$$f(x_0 - 0) = A$$

例如函数 $$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

当 x 从 0 的左边无限地趋于 0 时，$f(x)$无限地趋于常数 1. 我们称：当 $x \to 0$ 时，$f(x)$的左极限是 1，即有

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1$$

(3)当 $x \to x_0$ 时$f(x)$的右极限

定义 对于函数 $y = f(x)$，如果当 x 从 x_0 的右边无限地趋于 x_0 时，函数$f(x)$无限地趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数$f(x)$的右极限是 A，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

或

$$f(x_0 + 0) = A$$

又如函数 $$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

当 x 从 0 的右边无限地趋于 0 时，$f(x)$无限地趋于常数 -1，因此有

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1) = -1$$

这就是说，对于函数 $$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时，$f(x)$的左极限是 1，而右极限是 -1（参看图 1-1），即

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

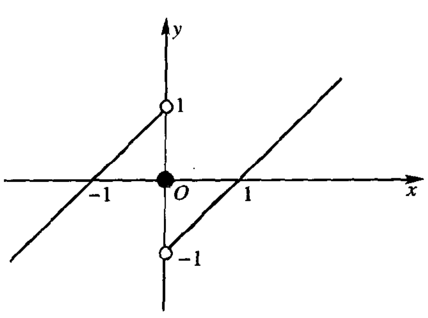

图 1-1

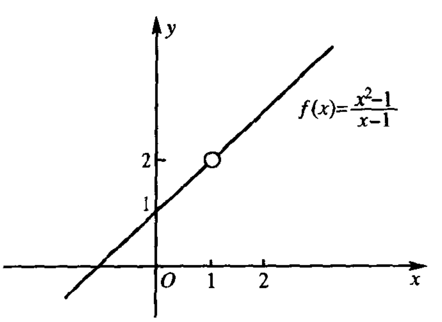

图 1-2

但是对于函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当$x\to 1$时，$f(x)$的左极限是2，右极限也是2（参看图1-2）.

显然，函数的左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与函数的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$之间有以下关系：

定理1.6 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限等于A的必要充分条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

这就是说：如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限等于A，则必定有左、右极限都等于A.

反之，如果左、右极限都等于A，则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

这个结论很容易直接由它们的定义得到.

以上讲的是当$x\to x_0$时$f(x)$的极限存在的情况. 对于某些函数的某些点x_0处，当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限也可能不存在.

2. 当$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

(1)当$x\to\infty$时$f(x)$的极限

定义 对于函数$y=f(x)$，如果当$x\to\infty$时，$f(x)$无限地趋于一个常数A，则称为$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

或 $$f(x)\to A\qquad(\text{当}x\to\infty\text{时})$$

(2)当$x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限

定义 对于函数$y=f(x)$，如果当$x\to+\infty$时，$f(x)$无限地趋于一个常数A，则称当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

这个定义与数列极限的定义基本上一样，只不过在数列极限的定义中，$n\to\infty$一定表示$n\to+\infty$，且n是正整数；而在这个定义中，则要明确写出$x\to+\infty$，且其中的x不一定是整数.

如函数$f(x)=2+\mathrm{e}^{-x}$，当$x\to+\infty$时，$f(x)$无限地趋于常数2，因此有

$$\lim_{x\to+\infty}(2+\mathrm{e}^{-x})=2$$

(3)当$x\to-\infty$时函数$f(x)$的极限

定义 对于函数$y=f(x)$，如果当$x\to-\infty$时，$f(x)$无限地趋于一个常数A，则称当$x\to-\infty$时，$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

又如函数$f(x)=2+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}(x<0)$，当$x\to-\infty$时，$f(x)$无限地趋于常数2，因

此我们说，当 $x\to-\infty$，函数 $f(x)=2+\frac{1}{\sqrt{-x}}$ 的极限是 2，即有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)=2$$

由上述 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的定义，不难看出：$x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，这表示当 $x\to+\infty$ 以及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 有相同的极限 A.

例如函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 无限地趋于常数 1：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 也无限地趋于同一个常数 1，因此称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=1+\frac{1}{x}$ 的极限是 1，记作

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

其几何意义如图 1-3.

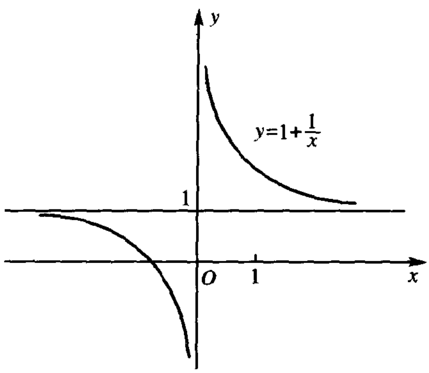

图 1-3

但是对函数 $y=\arctan x$ 来讲，因为有

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

即虽然当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限也存在，但这两个极限不相同，我们只能说，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\arctan x$ 的极限不存在.

（四）函数极限的性质

定理 1.7 （惟一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值必惟一.

定理 1.8 （夹逼定理） 设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内

(x_0 可除外)满足条件

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且有$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

注意:上述定理 1.7 及定理 1.8 对 $x \to \infty$ 也成立.

下面我们给出函数极限的四则运算法则.

定理 1.9 如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则

(1)$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

(2)$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)] = AB$

(3)当$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ 时

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

上述运算法则,不难推广到有限多个函数的代数和及乘积的情形,并有以下推论:

推论 设$\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, $\cdots$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$和$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,$c$ 为常数,n 为正整数,则

(1)$\lim\limits_{x \to x_0}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]$

$= \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

(2)$\lim\limits_{x \to x_0}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

(3)$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n$

用极限的运算法则求极限时,必须注意:这些法则要求每个参与运算的函数的极限存在,且求商的极限时,还要求分母的极限不能为零. 另外,上述极限的运算法则对于 $x \to \infty$ 的情形也都成立.

(五) 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量

定义 对于函数 $y = f(x)$,如果自变量 x 在某个变化过程中,函数 $f(x)$ 的极限为零,则称在该变化过程中,$f(x)$ 为无穷小量. 一般记作

$$\lim f(x) = 0$$

在微积分中,常用希腊字母 α, β, γ 来表示无穷小量.

这里说的"自变量 x 在某个变化过程中"是指当 $x \to x_0^-$,或 $x \to x_0^+$,或 $x \to x_0$,或 $x \to -\infty$,或 $x \to +\infty$,或 $x \to \infty$ 中的一个. 为了简单起见,我们并没有专门再提出数列,而把它归入函数之中,并且有时将数列与函数统称为变量.

定理 1.10 函数 $f(x)$ 以 A 为极限的必要充分条件是:$f(x)$ 可表示为 A 与一个无穷小量之和.

2. 无穷大量

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果自变量 x 在某个变化过程中，函数值的绝对值越来越大且可以无限地增大，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷大量.

3. 无穷小量与无穷大量的关系

无穷小量与无穷大量之间有一种简单的关系，见以下的定理.

定理 1.11 在同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

例如：当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ 是无穷大量，而当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{f(x)}=(x-1)^2$ 是无穷小量.

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=10^{-x}$ 是无穷小量，而当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{f(x)}=10^x$ 是无穷大量.

4. 无穷小量的基本性质

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

性质 2 有界函数（变量）与无穷小量的乘积是无穷小量；特别地，常量与无穷小量的乘积是无穷小量；

性质 3 有限个无穷小量的乘积是无穷小量；

性质 4 无穷小量除以极限不为零的变量所得的商是无穷小量.

5. 无穷小量的比较

定义 设 α,β 是同一变化过程中的无穷小量，即

$$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$$

1° 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$；

2° 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α 同阶的无穷小量；

3° 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小量，记为 $\alpha\leftrightarrow\beta$；

4° 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小量.

例如：

如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=1$，所以称 $(x+x^2)$ 与 x 是等价无穷小量（当 $x\to 0$ 时）.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{x}=3$，所以称 $(3x+x^2)$ 与 x 是同阶无穷小量（当 $x\to 0$ 时）.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=0$，所以称 x^3 是比 x^2 较高阶的无穷小量（当 $x\to 0$ 时）.

（六）两个重要极限

1. 第一个重要极限

第一个重要极限是指下面的求极限公式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

这个公式很重要，应用它可以计算三角函数的$\frac{0}{0}$型的极限问题.

2. 第二个重要极限

第二个重要极限是指下面的公式：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

其中 e 是个常数，叫自然对数的底，它的值为

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 495\ 045\cdots$$

这是一个数列的极限，它说明：当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限是 e. 它可以推广为函数的极限. 可以证明，对于连续性自变量 x 和 t，也有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

和

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$$

三、典型例题

例 1 写出下列各数列的通项（一般项），通过直接观察，指出收敛数列的极限值.

(1) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\cdots$

(2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\cdots$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{1},\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{10}}{3},\frac{\sqrt{17}}{4},\cdots$

(4) $2,6,12,20,30,42,56,72,\cdots$

解 (1) 通项 $y_n=\frac{1}{2n-1}$

可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0$

(2) 通项 $y_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0$

(3) 通项 $y_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 1$

(4) 通项 $y_n=n(n+1)$

可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to+\infty$，数列发散.

例 2 下列极限中存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

解 应选 B.

因为对于选项 A 来说，当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}\to+\infty$，极限不存在；对于选项 C 来说，当 $x\to 0$ 时，$(2^x-1)\to 0$，$\dfrac{1}{2^x-1}\to\infty$，极限也不存在；对于选项 D 来说，当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，虽然当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，但由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

所以应选 B.

例 3 下列极限中，不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 2}10^{\frac{1}{x-2}}=\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$

解 应选 C.

因为当 $x\to 2^-$ 时，$\lim\limits_{x\to 2^-}10^{\frac{1}{x-2}}=0$；当 $x\to 2^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 2^+}10^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$，所以 C 不正确. 而 A，B，D 显然正确.

例 4 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 必要充分条件　　D. 既非必要又非充分条件

解 应选 D.

由 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在的定义可知，它与 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是否有定义没有关系.

例 5 判断函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

即

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

所以当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

例 6 判定函数 $f(x)=2+10^{\frac{1}{1-x}}$ 当 $x\to 1$ 时的极限是否存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[2+10^{\frac{1}{1-x}}\right]=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[2+10^{\frac{1}{1-x}}\right]=+\infty$$

即当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的左极限不存在,所以当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

例 7 判定函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 因为当 $x\to 0^-$ 时,$\frac{1}{x}\to-\infty$,$\sin\frac{1}{x}$ 振荡无极限;当 $x\to 0^+$ 时,$\frac{1}{x}\to+\infty$,$\sin\frac{1}{x}$ 也振荡无极限. 所以当 $x\to 0$ 时,函数 $\sin\frac{1}{x}$ 振荡无极限(极限不存在).

例 8 判定当 $x\to 1$ 时,$f(x)=\frac{1}{x-1}$ 是无穷大量.

解 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

即当 $x\to 1$ 时,$f(x)$ 之绝对值越来越大且可以无限增大,所以当 $x\to 1$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

是无穷大量,即有

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$$

例 9 函数 $f(x)=10^{-x}$ 在什么变化过程中是无穷大量?

解 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}10^{-x}=+\infty$,所以当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)=10^{-x}$ 是无穷大量.

例 10 判定当 $x\to 1$ 时,$f(x)=(x-1)^2$ 是无穷小量.