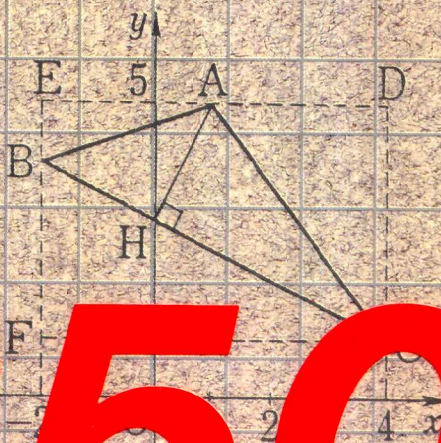


$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

高數題庫



3650

直線・二次函數與多項式

牛頓出版公司

直 線 方 程 式 與 二 元 一 次 不 等 式

● 平面坐標系 (題號 1~21)

1. 兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間之距離為

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特例：原點 O 與 $P(x_0, y_0)$ 之距離為

$$\overline{OP} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

2. 已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 若 P 為線段 $\overline{AB}$ 的 $m:n$ 內分點, 則 P 點之坐標為

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

特例： $\overline{AB}$ 之中點 M 的坐標為

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

3. 2. 的線段 $\overline{AB}$, 若 Q 為 $\overline{AB}$ 的 $m:n$ 外分點, 則

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right) (m \neq n)$$

◎ 直線的斜率與方程式 (題號 22~71)

1. 斜率為 m , y 軸截距為 b 之直線方程式為 $y = mx + b$
2. 與 y 軸平行之直線方程式為 $x = a$
3. 過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 之直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$
4. 過兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的直線方程式為

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2$$

$$\text{或 } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

5. 與 x 軸, y 軸之截距分別為 a , b 之直線方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad ab \neq 0$$

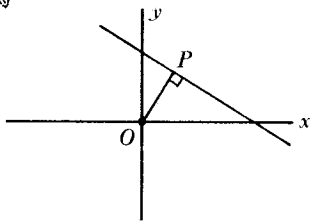
6. 若自原點 O 向直線作垂線, 垂足為 P , 且 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向之夾角為 α , 則直線方程式為

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p, \quad \overline{OP} = p$$

7. 直線的一般式為

$$ax + by + c = 0$$

其中 a, b 不同時為0



8. 兩直線的平行與垂直

設二直線 $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$, 則

(1) 平行條件: $m_1 = m_2, b_1 \neq b_2$

(2) 垂直條件: $m_1 m_2 = -1$

9. 點到直線之距離

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $ax + by + c = 0$ 之距離為

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

特例: 原點到直線 $ax + by + c = 0$ 之距離為 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10. 三角形的面積

(1) 設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 則

$$a \triangle ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 設 $\triangle ABC$, $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\angle ABC = \theta$, 則

$$a \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

(3) 設 $\triangle ABC$, 則

$$a \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

(4) 設 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, 則

$$a \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{其中 } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(5) 若 $\triangle ABC$ 之三邊長為 a, b, c ,外接圓及內切圓半徑分別為 R 及 r , 則

$$a \triangle ABC = \frac{abc}{4R} = rs, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

11. 直線系

(1) 過二直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 及 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 的交點之直線系為 $(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ (2) 與 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 平行之直線 $\Rightarrow$ 設為 $a_1x + b_1y + k = 0$ (3) 與 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 垂直之直線 $\Rightarrow$ 設為 $b_1x - a_1y + k = 0$

12. 角平分線

(1) 兩相交直線 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 之交角的平分線爲

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(2) 應用：求內心與旁心時，可利用角平分線。

13. 對稱及其應用

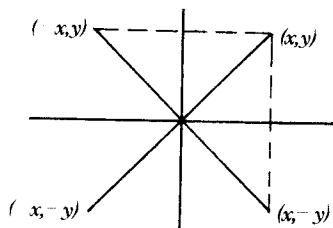
(1) 坐標之對稱

 $f(x, y) = 0$ 的圖形對稱於① x 軸 $\Leftrightarrow f(x, -y) = 0$ 與 $f(x, y) = 0$ 同義② y 軸 $\Leftrightarrow f(-x, y) = 0$ 與 $f(x, y) = 0$ 同義③ 原點 $\Leftrightarrow f(-x, -y) = 0$ 與 $f(x, y) = 0$ 同義

(2) 圖形的對稱關係

對於 $f(x, y) = 0$ 之圖形而言

① 以 $(x, -y) \xrightarrow{\text{代}} (x, y)$ ，代入 $f(x, y) = 0$ 所得之方程式
若與 $f(x, y) = 0$ 同義，則 $f(x, y) = 0$ 之圖形對稱於 x 軸。



② 以 $(-x, y) \xrightarrow{\text{代}} (x, y)$ ，代入 $f(x, y) = 0$ 所得之方程式
若與 $f(x, y) = 0$ 同義，則 $f(x, y) = 0$ 之圖形對稱於 y 軸。

③ 以 $(-x, -y) \xrightarrow{\text{代}} (x, y)$ ，代入 $f(x, y) = 0$ 所得之方程式若
與 $f(x, y) = 0$ 同義，則 $f(x, y) = 0$ 之圖形對稱於原點。
餘類推。

(3) 對稱點與投影點

設 $P(x_0, y_0)$, $L: ax + by + c = 0$, 則

① 自 P 作 L 之投影點為

$$\left(x_0 - a \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right)$$

② P 關於 L 之對稱點為

$$\left(x_0 - 2a \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - 2b \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right)$$

● 線型函數

凡能表成下列型式

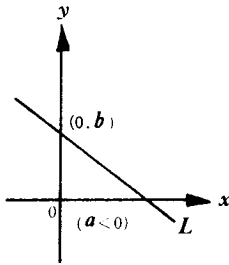
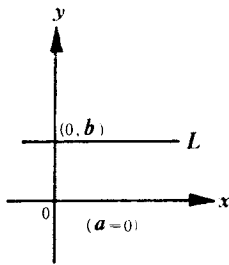
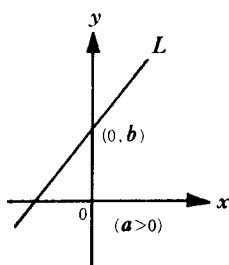
$$y = ax + b \text{ 或 } f(x) = ax + b$$

的函數，均叫線型函數，其中 a, b 為常數， x 為自變數， y 為因變數。

當 a, b 為實常數，定義域為 R 時，線型函數 $y = ax + b$ 的圖形顯然為過點 $(0, b)$ 且斜率為 a 的直線 L

由下圖可看出

1. 若 $a > 0$ ，則當 x 值增加 $d (d > 0)$ 時， y 值必增加 ad 。
2. 若 $a = 0$ ，則無論 x 值如何變動， y 值恆為一常數 b 。
3. 若 $a < 0$ ，則當 x 值增加 $d (d > 0)$ 時， y 值必減少 ad 。



● 二元一次不等式與線性規畫 (題號 72~81)

1. 二元一次不等式之幾何解釋

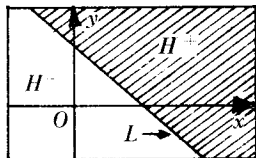
(1) 直線 $L: ax + by + c = 0, b \neq 0$,

可將坐標平面分割成三部分

① 半平面 $H^+ : ax + by + c > 0$

② 直線 $L : ax + by + c = 0$

③ 半平面 $H^- : ax + by + c < 0$



(2) 性質：設 $f(x, y) = ax + by + c$ ，其中 a, b 不同時為 0， $f(x, y) = 0$ 表直線 L ， L 將平面 E 分割成二個半平面 H^+ ， H^- ，則

① 當點 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 在不同半平面時，則

$$f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$$

② 當點 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 在同一半平面時，則

$$f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) > 0$$

2. 線性規畫

(1) 一個數學應用問題，若條件與二元一次聯立不等式（稱限制條件）有關，而所要求發生最大或最小的函數（稱目標函數）為線性函數，解答這類問題稱為線性規畫。

(2) 解題步驟

① 所求之值為一次之極值解法

- 先作出領域之圖形 $\Rightarrow$ 多邊形區域。
- 求頂點坐標（解方程式）。
- 以頂點代入所求式 $\Rightarrow$ 求出極大、極小。

② 所求之值非一次之極值解法：

- $x^2 + y^2$ 表與原點距離最遠時有極大值。
- $\frac{Y-b}{X-a}$ 表 (X, Y) 到 (a, b) 之斜率。

1 I III ★

已知三點 $A(5, 4)$, $B(3, -2)$, $C(1, 2)$, 則 $\triangle ABC$ 之形狀為何?

【詳解】 $\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4+2)^2 = 40$
 $\overline{AC}^2 = (5-1)^2 + (4-2)^2 = 20$
 $\overline{BC}^2 = (3-1)^2 + (-2-2)^2 = 20$
 $\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{20}$
 且 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$
 $\therefore \triangle ABC$ 為等腰直角三角形

2 I III ★

設 $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$, 在 x 軸及 y 軸上各找一點, 使與 A, B 兩點等距離。

【詳解】 設 x 軸及 y 軸上之點分別為 $P(x, 0)$ 及 $Q(0, y)$, 則

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (0-3)^2 = (x-2)^2 + (0-4)^2 \\ (0+1)^2 + (y-3)^2 = (0-2)^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3}, y = 5$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{3}, 0\right), Q(0, 5)$$

【另解】 設 $P(x, y)$ 與 A, B 兩點等距離, 則

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow 3x + y = 5$$

此直線為 $\overline{AB}$ 之垂直平分線

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$x=0 \Rightarrow y=5$$

$$\therefore \text{兩點爲} \left(\frac{5}{3}, 0 \right) \text{與} (0, 5)$$

3 I 三 ★

求與兩點 $A(1, -2)$, $B(3, 1)$ 等距離的點集合的方程式。

【詳解】 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

過 M 且與 $\overline{AB}$ 垂直之直線即爲所求

$$\because \overline{AB} \text{ 之斜率 } = \frac{-2-1}{1-3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{故所求爲 } y + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x-2)$$

$$\Rightarrow 4x + 6y - 5 = 0$$

4 I 三 ★

求與三點 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 5)$ 等距離的點。

【詳解】 設所求之點爲 $P(x, y)$

$$\because \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\because \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$$

$$\therefore x + y^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$$

$$\Rightarrow x + 5y - 13 = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{由} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{聯立得 } (x, y) = \left(2, \frac{11}{5}\right)$$

5 I III ★★

設一正三角形以 $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ 兩點為頂點，求第三頂點 C 之坐標。

【詳解】 設 $C(x, y)$

$$\because \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\therefore \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 25 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + (y-4)^2 = 25 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得

$$-6x + 8y = 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

將 $\textcircled{3}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得

$$(x-3)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{7}{8}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x - 39 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{2} \text{ 代入 } \textcircled{3} \text{ 得}$$

$$y = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

故 C 點坐標為

$$\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

6 I 三 ★★

設 M 為 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 之中點

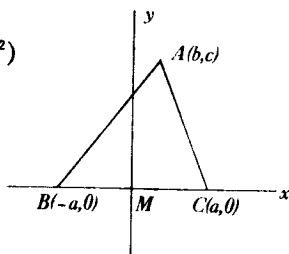
證明 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 。 [中線定理]

【證明】 以 $\overline{BC}$ 邊為 x 軸，設 $A(b, c)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= (b+a)^2 + c^2 + (b-a)^2 + c^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2)\end{aligned}$$

$$\text{又 } 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = 2(b^2 + c^2 + a^2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ &= 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)\end{aligned}$$



研究 若 M 為 $\triangle ABC$ 之邊 $\overline{BC}$ 的中點

且 $\overline{AM} = \overline{BM}$ ，則

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} \quad (\text{請同學自行證明之})$$

則上述定理變為

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{BM}^2) = 4\overline{BM}^2 = \overline{BC}^2$$

此即所謂的畢氏定理

7 I 三 ★★

已知長方形 $ABCD$ 及任意點 P

證明 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 。

【證明】(-) 以 $\overline{BC}$, $\overline{BA}$ 分別為 x 軸及 y 軸

設 $A(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$ 及 $P(x, y)$

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 - ax - by) + a^2 + b^2 \dots\dots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 - ax - by) + a^2 + b^2 \dots\dots ②\end{aligned}$$

由①, ②知

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$$

【證明】(二) 利用中線定理

設對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於

一點 M , 則 $\triangle PAC$ 中,

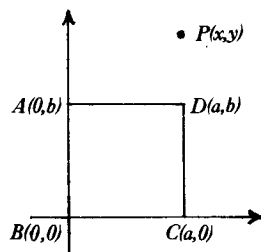
根據中線定理

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2)$$

同理, $\triangle PBD$ 中

$$\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = 2(\overline{PM}^2 + \overline{BM}^2)$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$$



【證明】(三) $\because \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 &= |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{PB}|^2 + 2\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA} + |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 \\ &\quad + 2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC} + |\overrightarrow{DC}|^2 \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA} &= 2(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (-\overrightarrow{DC}) \\ &= -2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC} - 2|\overrightarrow{DC}|^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= -2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC} - 2|\overrightarrow{DC}|^2 \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

由①, ②知

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2$$

$$\text{故 } \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$$

8 1 三 ★★

設 $A(-1, -1)$, $B(3, 5)$, $C(2, 8)$, $D(0, 0)$, 若下列兩條件成立：

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

試求 P 點的坐標。

【詳解】 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ ①

$\overline{PA}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ ②

由①-②得

$$\overline{PB}^2 - \overline{PD}^2 = \overline{PD}^2 - \overline{PB}^2$$

$$\Rightarrow \overline{PB}^2 = \overline{PD}^2$$

由①+②得

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$$

設 $P(x, y)$, 則

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-8)^2$$

上兩式整理得

$$x + 3y = 11$$

$$3x + 5y = 17$$

$$\therefore x = -1, y = 4$$

故 $P(-1, 4)$

9 I 三 ★★

三角形 ABC 與同一平面上的點 P ，當 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 為最小時，求 P 點的坐標。

【詳解】 設 $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$, $P(x, y)$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \\
 &\quad + (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 \\
 &= 3x^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3)x + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 3y^2 \\
 &\quad - 2(b_1 + b_2 + b_3)y + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\
 &= 3\left(x - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^2 \\
 &\quad + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{3} \\
 &\quad - \frac{(b_1 + b_2 + b_3)^2}{3}
 \end{aligned}$$

當 $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, $y = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$ 時

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 最小

$\therefore P = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right)$ 為 $\triangle ABC$ 之重心

10 I 三 ★★

兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 試推導線段 $\overline{AB}$ 之內分點及外分點的比為 $m:n$ 的公式。

【詳解】 如圖示：若 P 為內分點且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$

並設 A, P, B 在 x 軸上之垂足分別為 A', P', B' ,

且 $\overline{OA'} = x_1$, $\overline{OP'} = x$, $\overline{OB'} = x_2$

$$\because \overline{AA'} \parallel \overline{PP'} \parallel \overline{BB'}$$

$$\therefore \overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB}$$

$$= m : n$$

$$\Rightarrow (x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$$

$$\Rightarrow m(x_2 - x) = n(x - x_1)$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

$$\text{同理, } y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

若 P 為 $\overline{AB}$ 之外分點，如圖示

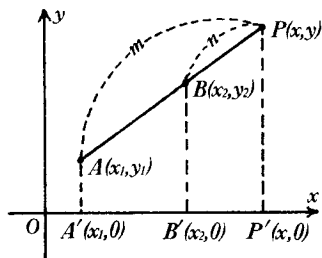
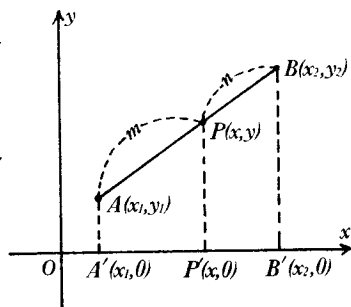
$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB}$$

$$= m : n$$

$$\Rightarrow (x - x_1) : (x - x_2) = m : n$$

$$\Rightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$$

$$\text{同理: } y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$$



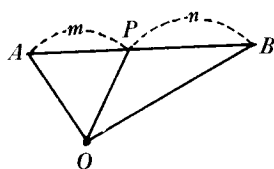
【另解】 如圖

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}$$



$$\begin{aligned} \therefore (x, y) &= \frac{n}{m+n}(x_1, y_1) + \frac{m}{m+n}(x_2, y_2) \\ &= \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right) \end{aligned}$$

若P為外分點時，同理可得

$$P = (x, y) = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$$

研 究

由外分點公式

$$x = \frac{mx_2 + (-n)x_1}{m + (-n)}, y = \frac{my_2 + (-n)y_1}{m + (-n)}$$

此式係由內分點公式中的 n 以 $(-n)$ 取代之因此，對於任意數 $m, n (m+n \neq 0)$

$$\text{公式 } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \text{ 中}$$

(1) 若 m, n 同號，點 (x, y) 表 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的連線段 $m:n$ 的內分點。(2) 若 m, n 異號，則表比為 $|m|:|n|$ 的外分點。

11 I III ★

證明 兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的中點為

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

【證明】 此為內分點，且 $m : n = 1 : 1$

由內分點公式得

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

12 I III ★★

求下列點的坐標

(1) 原點 O 及點 $A(-2, 3)$ ，求 A 關於 O 的對稱點。

(2) 求點 $C(-3, 4)$ 關於 $B(1, -1)$ 的對稱點。

【詳解】 (1) 設對稱點為 $P(x, y)$

$$\text{則 } O = \frac{1}{2}(P + A)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= 2O - A \\ &= 2(0, 0) - (-2, 3) \\ &= (2, -3) \end{aligned}$$

(2) 設對稱點為 $Q(x, y)$

$$\text{則 } B = \frac{1}{2}(C + Q)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= 2B - C \\ &= 2(1, -1) - (-3, 4) \\ &= (5, -6) \end{aligned}$$