五年 高考试题透视

WUNIANGAOKAO
SHITITOUSHI
SHUXUE

2000~2004

5 数学

（全国卷）

王继延　张白翎　苏建民　林少安　徐明杰　编

上海科技教育出版社

SHUXUE

图书在版编目(CIP)数据

五年高考试题透视. 数学. 全国卷/王继延等编.
2版. —上海:上海科技教育出版社,2004.8
ISBN 7-5428-3300-6

Ⅰ.五... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第035596号

五年高考试题透视
数　　学
(全国卷)
王继延　张白翎　苏建民　林少安　徐明杰　编

策　　划: 4+1工作室
出版发行: 世 纪 出 版 集 团
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路393号　邮政编码200235)
网　　址: www.ewen.cc
www.sste.com
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 江苏启东市人民印刷有限公司
开　　本: 787×1092　1/16
字　　数: 230 000
印　　张: 9.5
版　　次: 2004年8月第2版
印　　次: 2004年8月第2次印刷
印　　数: 10 001-20 000
书　　号: ISBN 7-5428-3300-6/O・342
定　　价: 13.00元

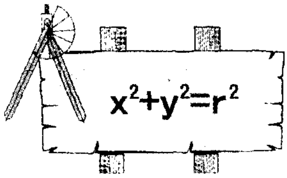
本社邮购地址: 上海市康健路106号
邮政编码: 200235
电　　话: 021—64700526
如有印装质量问题,请与承印厂调换

前言

上海市中小学第二期课程改革已进入整体试验阶段.这次课程改革的核心是改变以往由学生适应课程的被动局面,给学生留出了很大的发展空间,使学生在学习上有了更多的自主权,但同时也对学生自学能力的培养提出了更高的要求.根据新课程标准编写的高中物理必修教材已经在部分学校试用,为了及时给学生提供自主学习的资源,我们在认真研究了新课程标准的基础上编写了本书,供高中一年级学生使用.

本书的定位是巩固基础、拓展分流,即一方面围绕核心内容,解剖难点,点拨方法,帮助学生加深对基本概念的理解,培养学生分析问题、解决问题的能力;另一方面在必修教材的基础上适当拓宽,以满足不同学生的兴趣和需要,帮助有志于在物理学科方面进一步发展的学生自我提高,为将来的学习打下必要的基础.结合这次课程改革精神和实际情况,我们在编写时遵循以下几个原则:自学与指导相结合,基础性与先进性相结合,系统性与专题性相结合,接受性与探究性相结合.虽然本书与上海的必修教材基本同步,但我们在编写中力图处理好教育部制定的普通高中物理课程标准和上海市中学物理课程标准之间的关系,立足上海,面向全国,力求兼容.

尽管我们作了很大努力,但限于时间和水平,本书的缺点和不完善之处在所难免,恳请使用本书的师生予以指正.



2000 年高考试题点评及拓展

考题 1

设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是(　　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

出题背景 本题考查应用集合和映射知识解题的能力.

解题思路 依题意有 $2^n+n=20$,由 20 与 2^n 都是偶数,知 n 为偶数,所以排除 B、D;当 $n=2$ 时,$2^n+n\neq20$,故选 C. 解题过程中对 $2^n<20$ 估值,采用排除法、代入法,简化了运算.

考题拓展

◆ **1－1** 点(x,y)在映射 f 下的象是点$(2x-y,2x+y)$,则点$(4,6)$在 f 下的原象是(　　).

(A) $\left(\frac{5}{2},1\right)$　　(B) $(1,3)$　　(C) $(2,6)$　　(D) $(-1,-3)$

◆ **1－2** 已知 $f(x)=\frac{3x-7}{2}$且 $f(a)=4$,则 $a=$________.

考题 2

在复平面内,把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$,所得向量对应的复数是(　　).

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $-2\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$　　(D) $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

出题背景 本题考查复数的向量表示和复数乘法的几何意义.

解题思路 利用乘法的几何意义.所得向量对应的复数$=(3-\sqrt{3}\mathrm{i})\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-2\sqrt{3}\mathrm{i}$,

本题若注意复数对应的点的位置特殊$\left(\text{在第四象限,与 } x \text{ 轴正方向夹角为} \frac{\pi}{6}\right)$,可通过图形判断所求复数必在虚轴负半轴上,故选B,解法更为简捷.

考题拓展

2－1 在复平面内,Rt△ABC的直角顶点C对应的复数为-2,30°角的顶点A对应的复数为$-5+\sqrt{3}\mathrm{i}$,则点B对应的复数是____________.

2－2 复平面内,点A对应复数为1,点B对应复数为$3-\mathrm{i}$,将向量$\overrightarrow{AB}$绕点A按顺时针方向旋转90°,并将模扩大到原来的2倍,得向量$\overrightarrow{AC}$,则C点对应的复数为(　　).

(A) $2-4\mathrm{i}$　　(B) $-2+4\mathrm{i}$　　(C) $-1-4\mathrm{i}$　　(D) $-1+4\mathrm{i}$

考题3

一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$,这个长方体对角线的长是(　　).

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 6　　(D) $\sqrt{6}$

出题背景 本题考查长方体性质以及分析、计算能力.

解题思路 解法一:直觉、观察、判断求解.由三个面的面积分别是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$,且$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$,知有一条棱长为1,则有另两条棱长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$,所以对角线长为$\sqrt{1+2+3}=\sqrt{6}$,故选D.

解法二:从目标式整体考虑运算.设长方体从一个顶点出发的三条棱长分别为a、b、c,则$ab=\sqrt{2}$,$bc=\sqrt{3}$,$ac=\sqrt{6}$,三式相乘,得$a^2b^2c^2=6$,$\therefore abc=\sqrt{6}$.将此式分别除以上述三式,得$a=\sqrt{2}$,$b=1$,$c=\sqrt{3}$,$\therefore\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6}$.

长方体性质是经常考查的知识点,计算中要针对目标,注意选择运算方法,这是考查运算能力的一个重点,应加以重视.

考题拓展

3－1 一个长方体的所有棱长的和为48,表面积为94,则这个长方体对角线的长是(　　).

(A) 50　　(B) $5\sqrt{2}$　　(C) 25　　(D) 5

◆ **3－2** 已知 P、A、B、C 在同一球面上且 PA、PB、PC 两两互相垂直，若 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，则此球半径为（　　）.

(A) 50　　(B) $5\sqrt{2}$　　(C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　(D) 5

考题4

已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是（　　）.

(A) 若 α、β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(B) 若 α、β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

(C) 若 α、β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(D) 若 α、β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

出题背景 本题考查象限角概念和三角函数的单调性，以及简单的推理能力.

解题思路 利用正弦函数、余弦函数和正切函数在各个象限上的单调性，取 α、$\beta\in[0,2\pi]$，采取分析或图象求解.

解法一：取特殊值，由 $\sin\alpha>\sin\beta$，取 $\alpha=60°$，$\beta=30°$，则 $\cos60°<\cos30°$，排除 A，同理易排除 B、C，故选择 D.

解法二：利用正、余弦函数图象求解.

解法三：借助单位圆，利用正弦线、余弦线、正切线求解.

考题拓展

◆ **4－1** 设 α、β 都是第二象限角，且 $\sin\alpha<\sin\beta$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $\tan\alpha<\tan\beta$　　(B) $\cot\alpha>\cot\beta$　　(C) $\cos\alpha<\cos\beta$　　(D) $\sec\alpha<\sec\beta$

◆ **4－2** 设 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin17°+\cos17°)$，$b=2\cos^2 13°-1$，$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则（　　）.

(A) $c<a<b$　　(B) $b<c<a$　　(C) $a<b<c$　　(D) $b<a<c$

考题5

函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是（　　）.

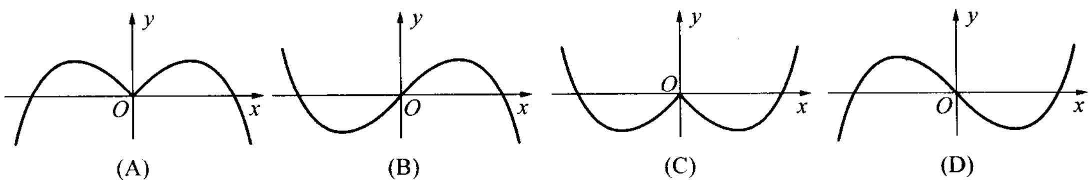


图 2000－1

出题背景 本题考查函数的图象和奇偶性，以及考生识图的能力.

解题思路 易知 $y=-x\cos x$ 为奇函数，故其图象必关于原点对称，排除 A、C；当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y<0$，故选 D.

考题拓展

◆ **5－1** 如图 2000－2 所示，虚线部分是四个象限的角平分线，实线部分是函数 $y=f(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 只可能是（　　）.

(A) $x\sin\frac{1}{x}$　　(B) $x\cos\frac{1}{x}$

(C) $x^2\sin\frac{1}{x}$　　(D) $x^2\cos\frac{1}{x}$

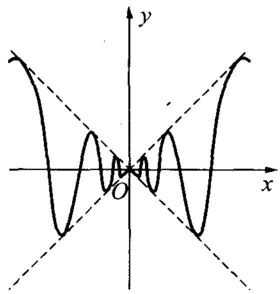


图 2000－2

◆ **5－2** 若一个三角函数 $y=f(x)$ 既在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数，又是以 π 为最小正周期的偶函数，则这样的一个三角函数的解析式是________________.

（注：填上你认为正确的一个解析式即可，不必考虑所有可能的情形）

考题 6

《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税　率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500～2000 元的部分	10%
超过 2000～5000 元的部分	15%

某人 1 月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于（　　）.

(A) 800～900 元　　(B) 900～1200 元

(C) 1200～1500 元　　(D) 1500～2800 元

出题背景 本题考查分段函数及考生运用有关数学知识解决实际问题的能力.

解题思路 依题意分析估计各收入范围内的纳税款的范围.

若某人当月工资、薪金所得为 1200，可算得应纳税款为(1200－

800)×5%=20(元),若某人当月工资、薪金所得为1500,可算得应纳税款为500×5%+200×10%=45(元).

因20<26.78<45,故选C.

本题在数据的设计上注意给考生以信息提示,培养考生的"数感",引导考生用"估算"解决问题.运算能力是思维能力与运算技能的结合,它不仅包括准确计算,还包括近似计算与估算.

考题拓展

◆ **6-1** 在本埠投寄平信,每封信不超过20g时付邮费0.80元,超过20g而不超过40g时付邮费1.60元,依次类推,每增加20g须增加邮费0.80元(信的质量在100g以内).如果某人寄一封信的质量为72.5g,那么他应付邮费(　　).

(A) 2.4元　　(B) 2.8元　　(C) 3元　　(D) 3.2元

◆ **6-2** 某城市出租汽车统一价格,凡上车起步价为6元,行程不超过2km者均按此价收费;行程超过时,按每$\frac{1000}{1.8}\approx 556$m加收1元(相当于每公里1.8元),另外,遇到塞车或等候时,汽车虽没行驶,仍按每6分钟折算1km,折算的路程与行驶路程合并收费,并且不足556m的余数也加收1元.陈先生坐了一趟这种出租汽车,车费17元,车上仪表显示等候时间为12分钟,那么陈先生此趟行程介于(　　).

(A) 7~9km　　(B) 9~11km　　(C) 5~7km　　(D) 3~5km

考题7

若$a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$,则(　　).

(A) $R<P<Q$　　(B) $P<Q<R$

(C) $Q<P<R$　　(D) $P<R<Q$

出题背景

本题考查均值不等式性质、对数函数性质及对数运算.

解题思路

由不等式性质易得$\sqrt{\lg a\cdot\lg b}<\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,

又$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$,∴　$\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)>\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,故选B.

本题也可通过赋予a、b特殊值来求解.如取$a=100$,$b=10$,则此时$P=\sqrt{2}$,$Q=\frac{3}{2}$,$R=\lg\frac{110}{2}>\lg\frac{100}{2}=2-\lg 2>Q$,至此,序已排定,故选B.

考题拓展

◆ **7－1**　已知 $0<a<1,b>1$ 且 $ab>1$，则下列不等式中成立的是(　　).

(A) $\log_b \frac{1}{b}<\log_a b<\log_a \frac{1}{b}$　　(B) $\log_a b<\log_b \frac{1}{b}<\log_a \frac{1}{b}$

(C) $\log_a b<\log_a \frac{1}{b}<\log_b \frac{1}{b}$　　(D) $\log_b \frac{1}{b}<\log_a \frac{1}{b}<\log_a b$

◆ **7－2**　已知函数 $f(x)=2^x$，若 $a<b$，记 $P=\sqrt{f(a)\cdot f(b)}$，$Q=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$，$R=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则(　　).

(A) $R<P<Q$　　(B) $P<Q<R$

(C) $Q<P=R$　　(D) $R=P<Q$

考题8

以极坐标系中的点(1,1)为圆心、1为半径的圆的方程是(　　).

(A) $\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\rho=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$　　(D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

出题背景　本题考查圆的极坐标方程.

解题思路　解法一：设 $P(\rho,\theta)$ 为圆上任一点，在直角三角形中有 $\rho=2\cos(1-\theta)$，即为所求圆的极坐标方程，故选C.

解法二：因圆心为(1,0)、半径为1的圆的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，将此圆绕极点逆时针旋转1弧度得圆 $\rho=2\cos(1-\theta)$，即为所求圆的极坐标方程.

解法三：代入法. 易知点(2,1)在所求圆上，代入检验，只有C项满足.

圆的极坐标方程是高考的常考知识点，对极坐标，考试说明只要求掌握点、直线和圆的极坐标方程，应注意把握，不要随意拔高要求.

考题拓展

◆ **8－1**　以极坐标中的点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 为圆心、1为半径的圆的方程是(　　).

(A) $\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\rho=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$　　(D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

◆ **8－2** 在极坐标系中，圆 $\rho=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 的圆心的极坐标是__________.

考题 9

一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是（　　）.

（A）$\frac{1+2\pi}{2\pi}$　（B）$\frac{1+4\pi}{4\pi}$　（C）$\frac{1+2\pi}{\pi}$　（D）$\frac{1+4\pi}{2\pi}$

出题背景 本题考查圆柱的侧面积、全面积和侧面展开图等基本概念、性质及计算技能.

解题思路 设圆柱底面半径为 r，正方形边长为 a，则 $2\pi r=a$，$S_{全}=2\pi\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}+a^2$，$\therefore\ \frac{S_{全}}{S_{侧}}=\frac{1+2\pi}{2\pi}$，故选 A.

考题拓展

◆ **9－1** 圆柱的轴截面是边长为 5 的正方形 $ABCD$，从 A 到 C 在圆柱侧面上的最短距离是（　　）.

（A）10　（B）$\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}$　（C）$5\sqrt{2}$　（D）$5\sqrt{\pi^2+1}$

◆ **9－2** 已知圆柱的轴截面是正方形，侧面积和体积分别为 S 和 V，设 $S^3=t$，则函数 $V=f(t)$ 的图象是（　　）.

（A）一条射线　（B）抛物线的一部分

（C）一个幂函数的图象　（D）半圆

考题 10

过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是（　　）.

（A）$y=\sqrt{3}x$　（B）$y=-\sqrt{3}x$　（C）$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$　（D）$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

出题背景 本题考查直线和圆的基本知识，直线与圆的位置关系.

解题思路 解法一：（数转形，几何方法）数形结合，当直线与圆相交（切）时，应注意平面几何性质的灵活运用. 因圆心为（－2，0），半径为 1，直线与圆相切，故切线倾斜角为 30°，故斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 C.

解法二：(待定系数法)设直线 $y=kx$，由线圆相切得 $\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$（或由直线与圆联立方程组，只有一个根，判别式 $\Delta=0$），解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，而获解.

考题拓展

◆ **10－1** 直线 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 在第一象限内有两个不同的交点，则 m 的取值范围是(　　).

(A) $1<m<2$　　(B) $\sqrt{3}<m<3$

(C) $1<m<\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{3}<m<2$

◆ **10－2** 已知圆 C：$x^2+y^2=1$，点 $A(-2,0)$ 及点 $B(2,a)$，从 A 点观察 B 点，要使视线不被圆 C 挡住，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$　　(B) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(C) $\left(-\infty,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　(D) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

考题11

过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于(　　).

(A) $2a$　　(B) $\frac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\frac{4}{a}$

出题背景 本题考查抛物线性质及简单计算和逻辑推理能力.

解题思路 解法一：(间接法)当 $PQ/\!/x$ 轴时，$p=q=\frac{1}{2a}$，$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=4a$. 故选 C.

解法二：(通法)依题设得焦点 $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线 $y=-\frac{1}{4a}$，可设直线 PQ：$y=kx+\frac{1}{4a}$，代入抛物线方程得 $x^2-\frac{k}{a}x-\frac{1}{4a^2}=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=\frac{k}{a}$，$x_1x_2=-\frac{1}{4a^2}$，$p=|PF|=y_1+\frac{1}{4a}=\frac{1+2akx_1}{2a}$，$q=|QF|=y_2+\frac{1}{4a}=\frac{1+2akx_2}{2a}$，$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2a}{1+2akx_1}+\frac{2a}{1+2akx_2}=\cdots=4a$，故选 C.

解法三：把问题放到极坐标系中解决. 在极坐标系中，设抛物线方程为 $\rho=\frac{m}{1-\cos\theta}$，其中

$m=\frac{1}{2a}$，则$\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|QF|}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1-\cos\theta}{m}+\frac{1+\cos\theta}{m}=\frac{2}{m}=4a$，故选 C.

由此可见，解选择题要注意从选择支提供的信息进行分析，选取特殊解法，不要“小题大做”，这便是不同能力层次的区分.

解题中的失误大致表现在两方面，一方面不善于在极坐标系中考虑问题，使计算过程太长而出错；另一方面，没有认真从抛物线 $y=ax^2$（而不是 $y^2=ax$）方程中准确地得出焦点与准线间距离是$\frac{1}{2a}$. 这里既有基础不巩固的原因，又有缺乏创新意识的原因.

考题拓展

◆ **11－1** F_1、F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点，过 F_1 作倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线与椭圆交于 P、Q 两点，则$\triangle F_2PQ$的面积为（　　）.

(A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　(B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}-1$　　(C) $\frac{4}{3}$　　(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

◆ **11－2** 过椭圆$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>0)$的焦点 F 作一直线交椭圆于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别为 p、q，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$等于（　　）.

(A) $\frac{4}{a}$　　(B) $\frac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $2a$

考题12

如图 2000－3，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为（　　）.

(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　(B) $\arccos\frac{1}{2}$

(C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

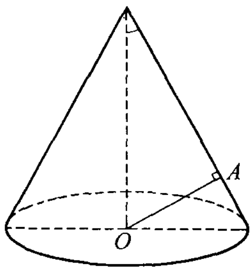


图 2000－3

出题背景 本题考查圆锥概念、性质等基础知识及计算能力、空间想像能力、分析问题和解决问题的能力.

解题思路 由题设中体积关系，割分求解. 作 $AD\perp SO$ 于 D，设$\angle ASD=\theta$，则$\angle AOB=\theta$，$AO=R\cos\theta$，$AD=\frac{AO^2}{R}=R\cos^2\theta$，依题意得 $V_{剩}=\frac{1}{2}V_{锥}$，

$\therefore$ $V_{剩}=\frac{1}{3}\pi AD^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi(R\cos^2\theta)^2h=\frac{1}{2}V_{锥}=\frac{1}{6}\pi R^2h$，$\therefore\cos\theta=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，故选 D.

考题拓展

◆ **12－1** 在一足够大的纸板上剪去一个边长为 3 的等边三角形，这样纸板上就有一个洞，再把纸套在一个底半径为$\sqrt{3}$、高为 8 的圆锥上，使纸板面与圆锥底面平行，这样能穿过纸板面的圆锥体积是(　　).

(A) 4π　　(B) 3π　　(C) 2π　　(D) π

◆ **12－2** O 是矩形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，以直线 CD 为轴旋转这个矩形所得的圆柱体的体积为 V，其中以 OA 为母线的圆锥的体积为$\frac{V}{4}$，则以 OB 为母线的圆锥的体积等于(　　).

(A) $\frac{V}{4}$　　(B) $\frac{V}{9}$　　(C) $\frac{V}{12}$　　(D) $\frac{V}{15}$

考题 13

乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有________种(用数字作答).

出题背景 本题考查乘法原理、排列的概念及其运算能力.

解题思路 第一步安排 3 名主力队员到指定位置，有 A_3^3 种方法，第二步安排 7 名非主力队员中的 2 名到指定位置，有 A_7^2 种方法，故共有 $A_3^3A_7^2=252$ 种.

考题拓展

◆ **13－1** 从集合 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$ 中任取两个不同的数分别作为对数的底数和真数，所得对数值的集合共有______个元素.

◆ **13－2** 用 0，1，2，3，4，5 组成无重复数字的六位数，奇数数字要连在一起，偶数数字也要连在一起的有______个.

考题 14

椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上的动点. 当$\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是________.

出题背景　本题考查椭圆性质，以及逻辑推理能力和计算能力.

解题思路　借助图形，观察$\angle F_1PF_2$的变化规律，由$\angle F_1PF_2=90^\circ$时点P的横坐标判定得解.

解法一：先求使$\angle F_1PF_2=90^\circ$时P点坐标，由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x^2+y^2=5\end{cases}$得$|x|=\dfrac{3}{\sqrt5}$.再利用数形结合的方法求使$\angle F_1PF_2$为钝角时点$P$横坐标的取值范围，即$\left(-\dfrac{3}{\sqrt5},\dfrac{3}{\sqrt5}\right)$.

解法二：设$P(x,y)$，易得

$$|PF_1|^2=(x+\sqrt5)^2+y^2=\frac{5}{9}x^2+2\sqrt5x+9,$$

$$|PF_2|^2=\frac{5}{9}x^2-2\sqrt5x+9,$$

在$\triangle F_1PF_2$中，有$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2\left(\dfrac{5}{9}x^2+9\right)-20}{2|PF_1||PF_2|}$.

令$2\left(\dfrac{5}{9}x^2+9\right)-20<0$，得$-\dfrac{3\sqrt5}{5}<x<\dfrac{3\sqrt5}{5}$.

本题对考生思维层次、运算能力要求较高，解题途径较多，考生易因方法选择不当或运算能力不佳而导致失分.

考题拓展

◆ **14－1**　设P是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$上一点，$F_1$、$F_2$是椭圆的两个焦点，则$\cos\angle F_1PF_2$的最小值是________.

◆ **14－2**　E、F是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，$l$是椭圆的一条准线，点$P$在$l$上，则$\angle EPF$的最大值是________.

考题 15

设$\{a_n\}$是首项为1的正项数列，且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，则它的通项公式是$a_n=$__________.

出题背景　本题考查数列通项公式以及考生的推理运算能力.

解题思路　观察发现已知等式是关于a_n和a_{n+1}的二次齐次式，可灵活处理求解.

解法一：由已知等式因式分解，得$[(n+1)a_{n+1}-na_n]\cdot(a_{n+1}+a_n)=0$，故 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ $=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}a_{n-1}=\cdots=\frac{1}{n+1}$，故 $a_n=\frac{1}{n}$.

解法二：在已知等式中令 $n=1$，则 $a_2=\frac{1}{2}$；令 $n=2$，则 $a_3=\frac{1}{3}$；猜想 $a_n=\frac{1}{n}$，代入等式得 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. 故猜想正确.

考题拓展

◆ **15－1**　若数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$ 且 $a_{n+1}=a_n^2$（n 是正整数），则数列的通项 $a_n=$______.

◆ **15－2**　已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$（$n\in\mathbf{N}$），则数列的通项 $a_n=$______.

考题 16

如图 2000－4，E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是__________.（要求：把可能的图的序号都填上）

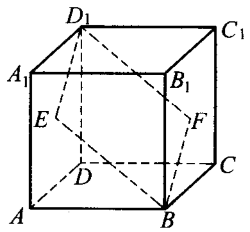


图 2000－4

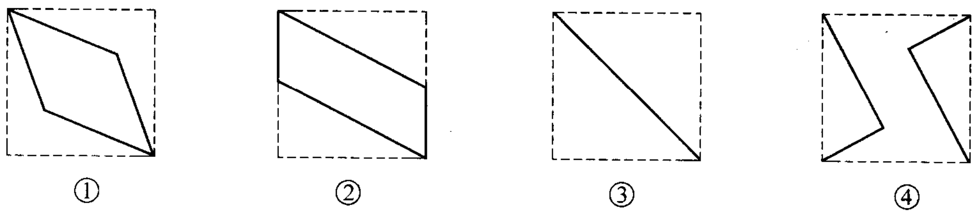


图 2000－5

出题背景　本题考查图形在平面上的射影及考生的空间想像能力.

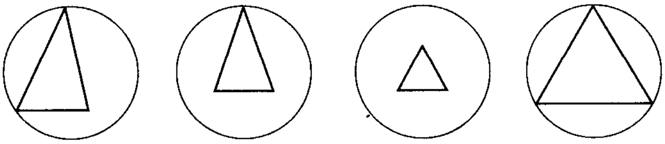
解题思路　四边形 D_1EBF 在正方体上、下、前、后四个面上的射影均为②，在正方体左右两个面上的射影为③，应填②、③.

本题实质上是“视图”问题，在工程技术中有广泛应用，它们的考查为考生展现创新意识开拓了空间.

考题拓展

◆ **16－1**　正四面体内接于一个球，用过球心的平面去截此正四面体和球，其截面画法

不正确的是(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

图 2000 - 6

◆ **16－2** 过正三棱锥一侧棱及其外接球的球心 O 所作截面如图 2000 - 7,则它的侧面三角形的顶角为(　　).

(A) 60°　　(B) 90°

(C) 120°　　(D) $\arccos\frac{1}{4}$

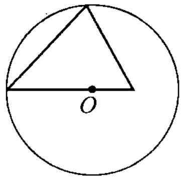


图 2000 - 7

考题 17

已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1, x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ) 当函数 y 取得最大值时,求自变量 x 的集合;

(Ⅱ) 该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

出题背景 本题主要考查三角函数的图象的平移、伸缩变换的性质和方法,考查考生利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力.解第(Ⅱ)题时需表达准确(包括次序、用词和数据),书写规范.

解题思路 设问提供的信息是应先把这个函数变形为一个角的三角函数形式,由函数式的结构特征,采用倍角公式与和角公式.

(Ⅰ) 整理,得 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$,当函数 y 取得最大值时,自变量 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(Ⅱ) 将函数 $y=\sin x$ 依次进行如下变换:(先平移变换,再伸缩变换)

(i) 把函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$,得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象;

(ii) 把得到的图象上各点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象;

(iii) 把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(横坐标不变),得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象;

(iv) 把得到的图象向上平移$\frac{5}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$的图象；

综上得到函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1(x\in \mathbf{R})$的图象.

本题也可以先进行伸缩变换，再进行平移变换.

能否准确地陈述函数的平移、伸缩变换，体现考生对几何变换的理解深度以及数学语言的转化表述能力.

考题拓展

◆ **17－1** 已知函数 $y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x, x\in \mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(2) 该函数的图象可由函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x(x\in \mathbf{R})$的图象经过怎样的变换得到？

◆ **17－2** 已知函数 $y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x, x\in \mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(2) 该函数的图象可由函数 $y=\sin x(x\in \mathbf{R})$的图象经过怎样的变换得到？