全析丛书

概率论与数理统计

（浙大·第三版）

全析精解

赵选民 编

西北工业大学出版社

全析丛书

概率论与数理统计

（浙大·第三版）

全析精解

赵选民 编

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书重点对该教材的主要内容进行了诠释，并通过对大量有代表性的典型题目的分析和解答，揭示了概率论与数理统计的解题方法、解题规律和解题技巧。

本书可作为高等学校理工科和经济学科本、专科生学习概率论与数理统计的辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计全析精解/赵选民编．—西安：西北工业大学出版社，2004.8

（全析丛书）

ISBN 7-5612-1810-9

Ⅰ．概… Ⅱ．赵… Ⅲ．①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 067828 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：029－88493844

网 址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西丰源印务有限公司

开 本：850mm×1 168mm 1/32

印 张：13.3125

字 数：482 千字

版 次：2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

印 数：1～6 000 册

定 价：19.00 元

前言

概率论与数理统计是理工科、经济管理学科一门重要的基础课，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门必考科目。在概率、统计、随机过程的学习中，许多初学者深感内容难懂、习题难做。为了满足广大读者课程学习及考研复习准备的需要，根据作者多年从事概率统计课程教学以及考研辅导班讲课的经验，编写了本书。

本书基本上按照浙江大学编《概率论与数理统计》(第三版)的章节次序来编写。全书分为12章，内容包括随机事件及其概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，极限理论，样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析，随机过程的基本知识，马尔可夫链，平稳随机过程等。每章均设四个知识板块：

一、内容点睛；

二、常考题型；

三、课后习题精解；

四、练习题。

编者的目的，是想通过以上四个层次的学习与训练，帮助读者正确理解概率论与数理统计课程的基本概念，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析问题及解

决问题的能力。

全书由赵选民编写，由于水平所限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2004 年 5 月

于西北工业大学

目录

第1章 概率论的基本概念

1.1 内容点睛

(一)教学基本要求

(1) 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

(2) 理解事件概率的概念，了解概率的统计定义.

(3) 理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.

(4) 理解概率的公理化定义.

(5) 掌握概率的基本性质及概率的加法定理.

(6) 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概公式及贝叶斯(Bayes)公式.

(7) 理解事件独立性概念，会计算相互独立事件的有关概率.

(二)主要概念、重要定理与公式

(Ⅰ)随机事件及其运算

1. 随机试验

在概率论中将以下三个特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S，样本空间的元素，称为样本点.

3. 随机事件

称随机试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称事件，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

4. 事件间的关系及运算

(1) 若$A \subset B$，则称事件B包含事件A，这指的是事件A发生必导致事件B发生.

若$A \subset B$且$B \subset A$，即$A = B$，则称事件A与事件B相等.

(2) 事件$A \cup B = \{x \mid x \in A$或$x \in B\}$称为事件$A$与事件$B$的和事件，$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$称为$n$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件；称$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的和事件.

(3) 事件$A \cap B = \{x \mid x \in A$且$x \in B\}$称为事件$A$与$B$的积事件. $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$称为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件，$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$称为可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的积事件.

(4) 事件$A - B = \{x \mid x \in A$且$x \notin B\}$称为事件A与事件B的差事件.

(5) 若$A \cap B = \varnothing$，则称事件A与B是互不相容的或互斥的.

(6) 若$A \cup B = S$且$A \cap B = \varnothing$，则称事件A与事件B互为逆事件，又称事件A与事件B互为对立事件，A的对立事件记为$\overline{A}$，$\overline{A} = S - A$.

(7) 事件满足以下运算规律：

(i) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

(ii) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(iii) 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(Ⅱ) 随机事件的概率及其性质

1. 定义

设E是随机试验，S是它的样本空间，对于E的每一事件A赋于一实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

(1) 对于每一个事件A，有$P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(S) = 1$；

(3) 设 A_1, A_2, … 是两两互不相容的事件，即对 $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, i, $j = 1, 2, \cdots$，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 若 A_1, A_2, …, A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(4) 对于任意二事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地，对任意 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

(5) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

3. 古典概型

如果随机试验 E 具有下列特点：

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同. 则称这种概型为古典概型. 对古典概型，事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}$$

4. 条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

5. 乘法定理

设 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，$n \geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1})$$

6. 全概公式和贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

7. 事件的独立性及其概率计算

设 A，B 是两个事件，如果具有等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A，B 为相互独立的事件.

一般，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $i_k (i_k \leqslant n)$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件，且有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i)]$$

1.2 常考题型

例 1-1 设 A, B, C 是任意三个随机事件，则以下命题中正确的是(　　).

(A) $(A \cup B) - B = A - B$　　(B) $(A - B) \cup B = A$

(C) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$　　(D) $A \cup B = A\overline{B} \cup B\overline{A}$

解　由于 $(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B} \cup B\overline{B} = A\overline{B} = A - B$ 故选(A)，其余三个都是不对的，原因在于

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(B \cup \overline{B}) = A \cup B$$

$$(A \cup B) - C = (A \cup B)\overline{C} = A\overline{C} \cup B\overline{C} = (A - C) \cup (B - C)$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB = A\overline{B} \cup B\overline{A} \cup AB$$

例 1-2 设 A, B 是两个随机事件，若 $P(AB) = 0$，则下列命题中正确的

是(　　).

(A) A 和 B 互不相容(互斥);

(B) AB 是不可能事件;

(C) AB 不一定是不可能事件;

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

解 一个事件的概率为0,这个事件未必是不可能事件,一个事件的概率为1,该事件也未必是必然事件,因此(C) 正确,反例如下:随机地向[0, 1]区间内投点,令 ξ 表示点的坐标,设 $A=\{0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\}$, $B=\{\frac{1}{2}\leqslant\xi<1\}$,则 $AB=\{\xi=\frac{1}{2}\}$,由几何概率知: $P(AB)=0$,但 $AB\neq\varnothing$. 此例同时说明 A 与 B 是相容的,且 $AB\neq\varnothing$,所以(A),(B) 是不对的. (D) 也是错误的,反例如下:掷一枚均匀的硬币,设 A 表示出现正面,B 表示出现反面,则 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$,但 $AB=\varnothing$,从而 $P(AB)=0$.

例1-3 设 A, B 为两随机事件,则 $P(A-B)=($　　$)$.

(A) $P(A)-P(B)$　　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　　(D) $P(A)+P(\overline{B})+P(A\overline{B})$

解 因 $A-B=A-AB$,又 $AB\subset A$,故 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$,所以(C) 正确.

例1-4 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则下列式子正确的是(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

解 由已知,$AB\subset C$,则 $P(C)\geqslant P(AB)$,又 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$,所以(B) 正确,因此(A) 是错的,(C),(D) 显然不对.

例1-5 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则下列结论中正确的是(　　).

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　　(B) 事件 A 和 B 相互对立

(C) 事件 A 和 B 不相互独立　　　(D) 事件 A 和 B 相互独立

解 由 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,得 $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$,即

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

从而 $P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$，即

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

故 A 与 B 相互独立，所以(D)正确.

例 1-6 将 C, C, E, E, I, N, S 等 7 个字母随机地排成一行，那么恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率为______.

解 设 $A=\{$恰好排成英文单词 $SCIENCE\}$，这是一古典概型的概率计算问题. 基本事件总数为 7 个不同元素的全排列数，等于 $7!$，A 包含的基本事件总数为 $1\times2\times1\times2\times1=4$，因此

$$P(A)=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$$

例 1-7 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为______.

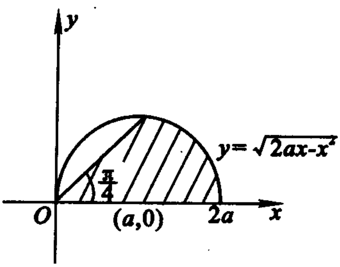

图 1-1

解 这是一几何概型的概率计算问题. $S=\{(x, y): 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 2a\}$，如图 1-1 所示. 在极坐标系下写为 $S=\{(r, \theta): r\leqslant 2a\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，设事件 $A=\{(r, \theta): r\leqslant 2a\cos\theta, 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{4}\}$，故

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

例 1-8 设随机事件 A, B 及和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$ 得，$P(AB)=0.4+0.3-0.6=0.1$，故

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$$

例 1-9 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，　$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(ABC)=\frac{1}{16}$，则 A，B，C 恰有一个发生的概率为______.

解 $P(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=$
$P(A-(B\cup C))+P(B-(A\cup C))+P(C-(A\cup B))=$
$P(A)-P(A\cap(B\cup C))+P(B)-P(B\cap(A\cup C))+P(C)-P(C\cap(A\cup B))=$
$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)-P(AB)-$
$P(BC)+P(ABC)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$
$P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC)=$
$\frac{3}{4}-2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

例 1-10 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为______.

解 设 A 表示“甲射击一次命中目标”的事件，B 表示“乙射击一次命中目标”的事件，则要求概率

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=$$
$$\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=\frac{6}{8}=0.75$$

例 1-11 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B，C 分别是将一枚骰子接连掷两次后先后出现的点数，求该方程有实根的概率和有重根的概率.

解 令 $A_1=\{$方程有实根$\}$，$A_2=\{$方程有重根$\}$，一枚骰子掷两次，其基本事件总数为 36，方程组有实根的充分必要条件是 $B^2-4C\leqslant0$ 即 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$；方程组有重根的充分必要条件是 $B^2-4C=0$，即 $C=\frac{B^2}{4}$. 易见：

B	1	2	3	4	5	6
使 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $C=\frac{B^2}{4}$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由上表可见，A_1 包含的基本事件总数为

$$1+2+4+6+6=19$$

A_2 包含的基本事件总数为 $1+1=2$，故由古典概型概率计算得

$$P(A_1)=\frac{19}{36},\ P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

例 1-12 一列火车共有 n 节车厢，有 $k(k\geqslant n)$ 个旅客上火车，并随意地选择车厢，求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

解 令 $A=\{$每一节车厢内至少有一个旅客$\}$，则 $\overline{A}=\{$至少有一个车厢无旅客$\}$，再令 $A_j=\{$第 j 个车厢无旅客$\}$，$j=1,2,\cdots,n$，则由古典概型概率的计算知 $P(A_j)=\dfrac{(n-1)^k}{n^k}$，$P(A_jA_i)=\dfrac{(n-2)^k}{n^k}$，$\cdots$，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=\dfrac{1}{n^k}$，$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(\varnothing)=0$，因此由概率的性质及加法公式得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=$$

$$1-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\cdots+(-1)^{(n-1)}C_n^{n-1}\frac{1}{n^k}$$

例 1-13 假设 n 张体育彩票中只有一张“中奖”，n 个人依次排队摸彩，求

(1) 已知前 $k-1(k\leqslant n)$ 个人都未“中奖”，求第 k 个人“中奖”的概率；

(2) 求第 $k(k\leqslant n)$ 个人摸彩时“中奖”的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 个人摸彩时中奖$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

(1) $P(A_k\mid\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})=\dfrac{1}{n-(k-1)}=\dfrac{1}{n-k+1}$

(2) $P(A_k)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=$

$$P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\cdots P(A_k\mid\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1})=$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

说明了抽签与顺序是无关的.

例 1-14 设有来自三个地区的考生的报名表分别是 10 份、15 份和 25 份，其中女生的报名表分别是 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份：

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率；

(3) 已知先抽到的一份是女生表，后抽到的一份是男生表的条件下，他们是来自第 2 个考区的概率.

解 设 $A_i=\{$报名表是第 i 个考区的$\}(i=1,2,3)$，$B_j=\{$第 j 次抽到

的报名表是男生表$\}(j=1,2)$，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},\ P(B_1\mid A_1)=\frac{7}{10}$$

$$P(B_1\mid A_2)=\frac{8}{15},\ P(B_1\mid A_3)=\frac{20}{25}$$

(1) 由全概公式得

$$P(\overline{B}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B}_1\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) 要求概率

$$P(\overline{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\overline{B}_1B_2)}{P(B_2)}$$

由抽签与顺序无关的原理得

$$P(B_2\mid A_1)=\frac{7}{10},\ P(B_2\mid A_2)=\frac{8}{15},\ P(B_2\mid A_3)=\frac{20}{25}$$

从而由全概公式得

$$P(B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

又　$P(\overline{B}_1B_2\mid A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},\ P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30}$

$P(\overline{B}_1B_2\mid A_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}$，由全概公式得

$$P(\overline{B}_1B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B}_1B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}$$

所以

$$P(\overline{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\overline{B}_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$$

(3) 由贝叶斯公式得

$$P(A_2\mid\overline{B}_1B_2)=\frac{P(A_2)P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)}{P(\overline{B}_1B_2)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{8}{30}}{\frac{2}{9}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0.4$$

例 1-15　设某型号的高射炮，每一门炮发射一发炮弹击中飞机的概率为 0.6，现在若干门炮同时发射，每门炮发射一发炮弹. 问欲以 99% 的把握击中来犯的一架飞机，至少需配置几门高射炮？

解　设需配置 n 门炮，$A_i=\{$第 i 门炮击 n 敌机$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=0.6$，且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，欲求 n.