21世纪高等院校教材

高等数学

赵文玲　付夕联
徐　峰　孙锦萍　主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高 等 数 学

赵文玲 付夕联
徐 峰 孙锦萍 主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书主要内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程等. 本书内容系统、全面，概念清晰，语言简明、易懂，并有大量的例题和习题，便于读者理解和掌握相关的内容. 本书每部分还增加了在经济中的应用.

本书可作为本科院校文科各专业（包括管理、经管）的教学用书，也可作为高职理工科学生的高等数学教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵文玲，付夕联，徐峰，孙锦萍主编. —北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-013536-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①赵…　②付…　③徐…　④孙…　Ⅲ. 高等数学
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 062536 号

责任编辑：胡华强 李鹏奇 / 责任校对：包志虹
责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2004年8月第一次印刷　印张：21 3/4
印数：1—3 000　字数：415 000

定价：27.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　言

随着社会、经济以及人文哲学数学化进程的日益加速，高等院校文科专业的学生开设高等数学课程迫在眉睫，为了适应高等院校培养精文知理的应用型、复合型高级文科专门人才，高等院校文科高等数学教材建设就成为一项首要任务. 文科高等数学教育的宗旨是通过数学知识技术的教育，提高文科学生的数学文化修养，培养学生的量化思维能力. 正是在这样思想的指导下，我们编写了本教材，在编写教材的过程中，我们对传统教材作了删繁就简，避难从易的处理，在保证科学性的基础上，注重概念、定理等基础知识的直观性描述和解释，减少定理、公式等繁杂的证明过程，强调学生基本运算能力的培养，适量增加高等数学在经济领域中的应用，努力做到通俗易懂.

本教材的编写分工是：付夕联第 1 章、第 2 章，张永凤第 3 章，徐峰第 4 章、第 5 章，谭成波第 6 章，赵文玲第 7 章，孙锦萍第 8 章，梁振英第 9 章，陈学友第 10 章，李亿民第 11 章，王政第 12 章，最后由主编校对、修改定稿.

本教材在编写过程中，得到山东理工大学教材科、数学与信息科学院的领导、老师的支持与帮助，特别是在本教材初稿的试用中，任课教师们提出了许多宝贵意见，在此表示感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在一些不足，敬请广大师生批评指正.

编　者

2004 年 7 月

目　录

第 1 章　函数与极限

所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，而极限则是刻画变量无限变化趋势的一种数学模型，高等数学就是用极限方法研究函数有关性质的. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　函　　数

1.1.1　区间、邻域

1. 区间

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$a$ 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地有

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

以上区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度，这些区间如闭区间 $[a,b]$ 和开区间 (a,b) 在数轴上的表示如图 1-1(a)和(b)所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c)和(d)所示.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

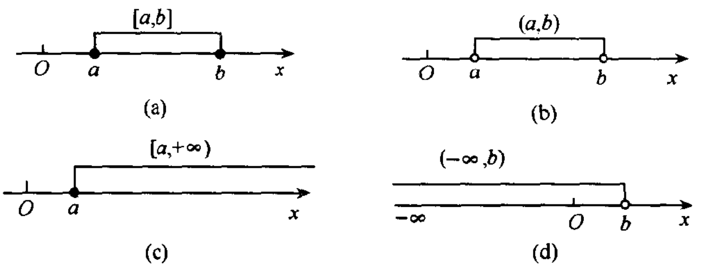

图 1-1

2. 邻域

邻域也是经常用到的一个概念，所谓邻域就是指点 x_0 附近的全体实数组成的开区间，即数集

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

点 x_0 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

如果把该邻域的中心 x_0 挖掉，则称为点 x_0 的去心的 δ 邻域，即集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}\text{，记作 }\mathring{U}(x_0,\delta).$$

1.1.2 函数概念

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

不难看出，函数是由定义域与对应法则所确定的，因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都分别相同时，它们才表示同一函数，而与自变量及因变量用什么字母表示无关，例如 $y=f(x)$ 也可用 $y=f(\theta)$ 表示，而表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“φ”，“F”，等等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，而函数 $y=\ln(x-1)+\sqrt{2-x}$ 的定义域则是 $(1,2]$.

根据函数对应法则类型的不同，函数有不同的表示法，通常有解析法（也叫公式法）、图像法和表格法三种，最常用的是解析法，即运用运算符号将自变量与相关的常量联结成一个式子，这种方法的优点在于能做具体运算，并有利于理论研究.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总有唯一一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 在本书中，如果没有特别说明，函数都是指单值函数.

有些函数在其定义域上的对应法则不能由一个式子表示，而是在定义域的不同范围内由不同式子来表示，这样的函数叫做分段函数.

例 1.1.1 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,+\infty)$. 当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=1+x$. 例如，$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$. 这函数的图形如图 1-2 所示.

例 1.1.2 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$，把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=Z$. 它的图形如图 1-3 所示，这个图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这个函数称为取整函数.

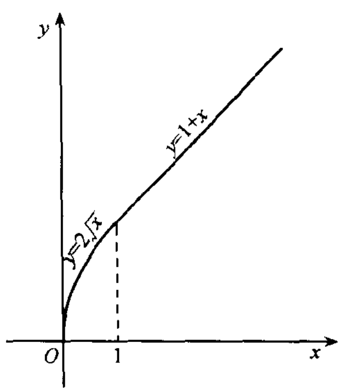

图 1-2

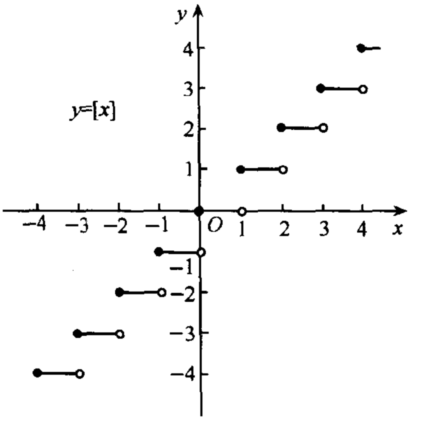

图 1-3

1.1.3　函数的几种性质

研究函数常常涉及到函数的一些基本性质．如有界性、单调性、奇偶性和周期性．这些性质不是所有函数所共有的．

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$．如果存在一个正数 M，使得对任意 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界．

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界，但在 $(1,2)$ 上有界．

2．函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．单调增加和单调减少函数统称为单调函数．

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在 $(-\infty,+\infty)$ 上函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数．

3．函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）．如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数．如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数．

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数；$f(x)=x^3$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的；而奇函数的图形关于原点是对称的.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

1.1.4 反函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，在 D 中有使 $y=f(x)$的唯一的 x 值与之对应，则其对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 W 上的函数 $x=f^{-1}(y)$叫做 $y=f(x)$的反函数，或称它们互为反函数.

按照习惯，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$记作 $y=f^{-1}(x)$.

不难发现，函数 $y=f(x)$的定义域 D 和值域 W 是反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域和定义域.

由上面的定义知道，单值函数未必存在反函数，但如果函数 $y=f(x)$在其定义域上是单调函数，则其反函数必存在.

函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在同一坐标系内的图形关于直线 $y=x$ 对称.

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围.

(1)$2<x\leqslant 6$； (2)$x\geqslant 0$； (3)$x^2<9$； (4)$|x-3|\leqslant 4$.

2. 求函数
$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$
的定义域和值域.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\lg x^2$， $g(x)=2\lg x$； (2)$f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$， $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

4. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{3x+2}$； (2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3)$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(4)$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(5)$y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(6)$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$.

5.设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$$

求$\varphi(\frac{\pi}{6})$，$\varphi(\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-2)$，并作出函数$y=\varphi(x)$的图形.

6.下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)$y=x^2(1-x^2)$；　(2)$y=3x^2-x^3$；

(3)$y=x(x-1)(x+1)$；　(4)$y=\sin x-\cos x+1$.

7.试证下列函数在指定区间内的单调性.

(1)$y=x$，　$(-1,0)$；(2)$y=\lg x$，　$(0,+\infty)$；

(3)$y=\sin x$，　$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

8.下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，指出周期.

(1)$y=\cos(x-2)$；　(2)$y=\cos 4x$；

(3)$y=x\cos x$；　(4)$y=\sin^2 x$.

9.求下列函数的反函数.

(1)$y=3x-1$；　(2)$y=\frac{x+1}{x-1}$；

(3)$y=\sqrt[3]{x+1}$；　(4)$y=\frac{ax+b}{cx+d}$　$(ad-bc\neq 0)$.

10.设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，这些函数中的多数，我们已经比较熟悉，这里只作简单复习.

1. **幂函数** $y=x^{\mu}$（μ为常数）

该函数的定义域视μ的不同而不同，但无论μ为何值，它在$(0,+\infty)$内总是有定义的，其图形总经过点$(1,1)$.

2. **指数函数** $y=a^x(a>0,且\ a\neq1)$

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$. $a>1$ 时，函数单调递增；$a<1$ 时，函数单调递减. 指数函数的图形总在 x 轴的上方，且通过点$(0,1)$.

以常数 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots$为底的指数函数记作

$$y=\mathrm{e}^x.$$

3. **对数函数** $y=\log_a x(a>0,且\ a\neq1)$

对数函数是指数函数的反函数，由此即知对数函数的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $a<1$ 时，函数单调减少，对数函数的图形总在 y 轴的右边，且必过$(1,0)$点.

以 e 为底的对数函数叫做自然对数，简记作

$$y=\ln x.$$

4. **三角函数**

常用的三角函数有

$$正弦函数\quad y=\sin x\quad（图\ 1\text{-}4），$$

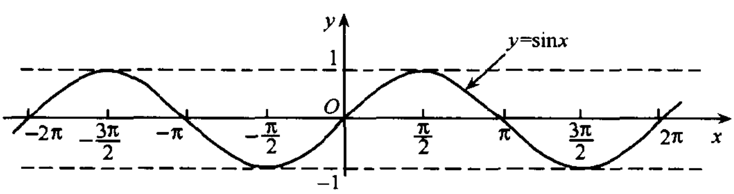

图 1-4

$$余弦函数\quad y=\cos x\quad（图\ 1\text{-}5），$$

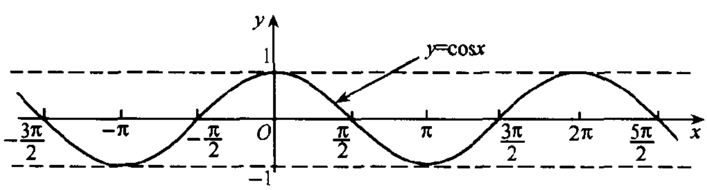

图 1-5

$$正切函数\quad y=\tan x\quad（图\ 1\text{-}6），$$

$$余切函数\quad y=\cot x\quad（图\ 1\text{-}7）.$$

正弦函数和余弦函数的定义域都是区间$(-\infty,+\infty)$，值域都是闭区间$[-1,1]$，且都是以 2π 为周期的周期函数.

正切函数的定义域为

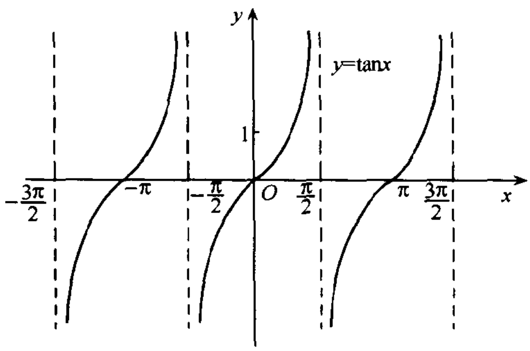

图 1-6

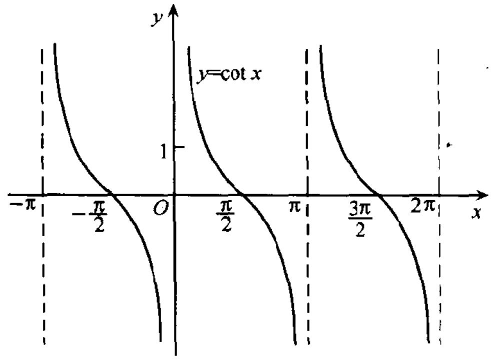

图 1-7

$$D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

余切函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

两个函数的值域都是区间$(-\infty,+\infty)$,且都是以 π 为周期的周期函数.

此外,还有另外两个三角函数,即

$$\text{正割函数}\quad y=\sec x,$$

$$\text{余割函数}\quad y=\csc x.$$

正割函数是余弦函数的倒数,即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}.$$

余割函数是正弦函数的倒数,即

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数.

5. 反三角函数

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，在它们的定义域上并不存在反函数,但是如果把自变量 x 都限制在某一区间内,就能保证这些函数在这一区间上是单调函数,从而存在反函数,于是有

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$ (图 1-8). 反正弦函数的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

类似地,反余弦函数记作 $y=\arccos x$(图 1-9). 反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$.

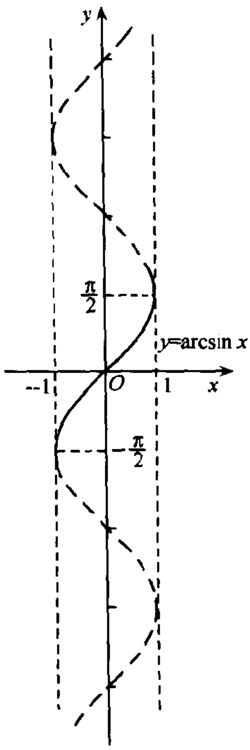

图 1-8

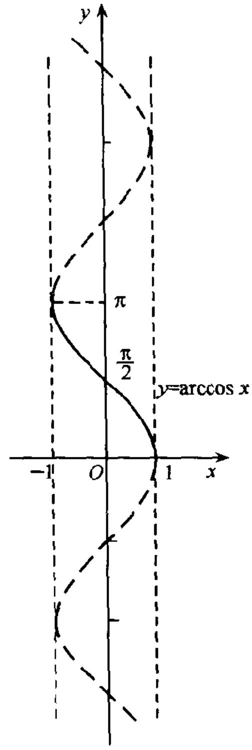

图 1-9

反正切函数记作 $y=\arctan x$(图 1-10). 反正切函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数记作 $y=\operatorname{arccot} x$(图 1-11). 反余切函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$.

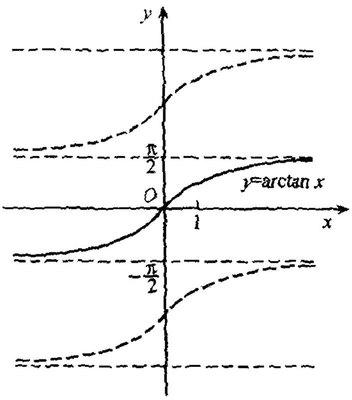

图 1-10

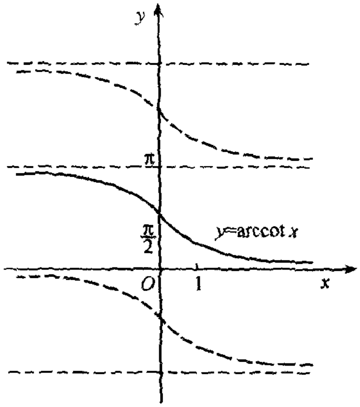

图 1-11

1.2.2　复合函数，初等函数

1. 复合函数

进行函数研究时，把某些函数看作是由几个函数复合而成的复合函数，这样对函数的研究会带来方便. 下面先看一个具体例子.

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示 y 是 x 的函数，它的定义域为$[-1,1]$. 如果我们引进辅助变量 u，把这函数的对应法则看作是这样的：首先，对于任意 $x\in[-1,1]$，通过函数 $u=1-x^2$ 得到对应的 u 值；然后，对于这个 u 值，通过函数 $y=\sqrt{u}$ 得到对应的 y 值. 这时，我们便说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，辅助变量 u 则称为中间变量. 一般地，有

定义 1.2.1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，且 W_2 与 D_1 的交集非空，则 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

有些复合函数的中间变量可以两个或更多. 比如，函数 $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$ 和 $v=x^2+1$ 复合而成的，这里有两个中间变量 u 和 v.

把一个复合函数分成不同层次的函数，叫做复合函数的分解. 合理分解复合函数，在微积分中有着十分重要的意义. 分解的步骤是从外向里，评判分解合理与否的准则是，观察各层次函数是否为基本初等函数或有理分式函数. 比如 $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$ 分解的各层次函数 $y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$，$u=\lg v$，$v=x^2+1$，依次为幂函数、对数函数和多项式函数，这样的分解是合理的.

必须注意，不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数，例如，$y=\arcsin u$