九章丛书

概率论与数理统计

习题集

主编　苏志平
编写　九章系列课题

中国建材工业出版社

概率论与数理统计习题集

主编　　苏志平
编写　　九章系列课题组

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题集/苏志平主编. - 北京:中国建材工业出版社,2004.2

ISBN 7-80159-590-4

Ⅰ.概… Ⅱ.苏… Ⅲ.①概率论-高等学校-习题②数理统计-高等学校-习题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第010700号

【内容简介】本书按照概率论与数理统计学科的要求分为:考试重点及考纲要求、重点知识网络图解、内容提要、疑难问题解答、常考题型精析、自我测验题及其答案、历年全国硕士研究生"概率论与数理统计"部分入学考试试题及答案、概率统计常用数值表几个部分。

本书适合于在校大学生及考研同学作为参考书,也可供自学者和科技工作者使用。

概率论与数理统计习题集

主编　苏志平

出版发行:中国建材工业出版社
地　　址:北京市西城区车公庄大街6号院3号楼
邮　　编:100044
经　　销:全国各地新华书店
印　　刷:北京理工大学印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/32
印　　张:13.5
字　　数:412千字
版　　本:2004年2月第1版
印　　次:2004年2月第1次印刷
印　　数:1~6000册
书　　号:ISBN 7-80159-590-4/G·105
定　　价:15.00元

前　言

《概率论与数理统计》是大学教学课程的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是研究生入学考试的一门必考科目，为了帮助在校大学生以及考研同学掌握其知识精华和解题技巧，提高应试能力，我们根据国家教委审定的高等院校“高等数学”课程教学大纲，融学习指导和考研辅导为一体编写了此书。

本书共分为八个版块：

一、考试重点及考纲要求——指出了学习和考试的内容要求，列出了本章应掌握的基本概念，重要的定理和公式。突出必须掌握的核心知识，便于学生了解本章的内容和掌握的程度。

二、重点知识网络图解——提纲挈领掌握知识全过程，使学生对各个概念、性质、定理以及相关关系有更深刻的认识，使知识更加系统化。

三、内容提要——使学生明确本章的重点、难点，对其知识进行了高度的归纳和总结。

四、疑难问题解答——本部分就学者在学习过程中遇到的一些问题，作了相应的解答，以便学者更好的学习。

五、常考题型精析——本部分收集了各类典型题，方便同学多见多练。本书在其解题过程中还增加了“思路点拨”这一部分，以便于学者能更好的理解和掌握。

六、自我检测题及其答案——本书的各章自测题就是在学生对各章内容有了全面了解之后，给同学一个检测、巩固的机会，对各种题型有个深刻的了解。同例题一样，本部分也添加了“思路点拨”内容，便于学者更好的学习和总结。

七、历年全国硕士研究生“概率论与数理统计”部分入学考试试题及答案——本书分类筛选了近年来相关的考研真题并加以分析，使读者能真正、全面地衡量自己对这门学科的整体掌握程度，并对全国硕士研究生入学考试中的概率统计试题的形式能有一定的了解，便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

八、概率统计常用数值表——便于学者们在学习过程中对相关知识的查询。

由于编者水有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评，指正。

编者

2004 年 2 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、考试重点及考纲要求

考试重点

1. 随机事件与样本空间；

2. 事件的关系运算，样本空间划分的定义；

3. 概率的定义和概率的基本性质；

4. 古典概型、条件概率；

5. 概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式；

6. 事件的独立性，独立重复试验。

考纲要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算；

2. 了解概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质，会计算古典概型的概率；

3. 掌握概率的加法公式，乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式；

4. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算；

5. 理解独立重复试验的概率，掌握计算有关事件概率的方法。

二、重点知识网络图解

- 随机事件及其概率
  - 事件及关系和运算
    - 样本空间，事件的定义
    - 事件之间的关系（$\subset$，$=$，$\cup$，$\cap$，$-$，互斥，对立）
    - 关系运算律
  - 概率的定义和性质
    - 定义
      - 统计定义
      - 古典定义
      - 公理化定义
    - 性质（可加性，单调性，连续性等）
  - 概率的计算
    - 古典概率：$P(A)=\dfrac{m}{n}$
    - 几何概率：$P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 的子区域的度量 }S_A}{\text{样本空间的度量 }S}$
    - 条件概率：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow$
      - 乘法公式：$P(AB)$
      - $=P(A)P(B|A)$
      - $=P(B)P(A|B)$
    - 全概公式：$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$
    - 贝叶斯公式：$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$，$(k=1,2,\cdots,n)$
  - 独立试验序列概型
    - 事件的独立性：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
    - 贝努利概型：$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$，$(k=0,1,\cdots,n)$

三、内容提要

（一）排列、组合

1. 乘法原理　完成一件事情有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事情共有 $m=m_1m_2\cdots m_n$ 种方法。

2. 加法原理　完成一件事情有 n 类方法，只要选择任何一类方法中的

一种方法这件事就可以完成。若第一类方法有 m_1 种,第二类方法有 m_2 种,…,第 n 类方法有 m_n 种,并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法中任何两种都不相同,那么完成这件事共有 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法。

3. 排列 从 n 个不同元素中无放回地取出 m 个($m\leqslant n$)元素,其不同的排列总数为

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

当 $m=n$ 时称为全排列,其总数为

$$A_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

规定 $0!=1$。

4. 有重复的排列 从 n 个不同的元素中有放回地抽取 m 个元素,其排列总数为

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m个}=n^m$$

5. 不全相异元素的全排列 若 n 个元素中,有 m 类($1<m\leqslant n$)本质不同的元素,而每类元素中分别有 $k_1,k_2,\cdots,km$ 元素($k_1+k_2+\cdots k_m=n$, $1<k_i<n,i=1,2,\cdots,m$),则 n 个元素全部取出的排列为不全相异元素的一个全排列,其排列的种类为

$$N=\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_m!}$$

6. 组合 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合,其总数为

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

组合性质(1)$C_n^m=C_n^{n-m}$

(2)$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

(二)随机事件及其运算

1. 样本点 随机试验的一个结果,记为 ω。

2. 随机事件 某些样本点构成的集合,记为 $A,B,\cdots$ 简称事件。

3. 基本事件 由单个样本点构成的集合。

4. 必然事件(样本空间) 由全体样本点构成的集合,记为 S。

规定不包含任何样本点的集合称为不可能事件,记为 $\varnothing$。

5. 事件 A 与 B 的交 事件 A 与 B 同时发生的事件,记为 $A\cap B$ 或 AB。

6. 事件 A 与 B 的并　事件 A 与 B 至少有一个发生的事件,记为 $A\cup B$。

7. 事件 A 与 B 的差　事件 A 发生但事件 B 不发生的事件,记为 $A-B$。

8. 事件 A 的逆事件　$\bar{A}=S-A$。

9. 事件 A 与 B 为互不相容事件(互斥事件)　事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$。

10. 事件 A 包含 B　事件 B 发生必定导致事件 A 发生,记为 $B\subseteq A$。

(三)概率的基本性质

设含有 n 个样本点的样本空间 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n\}$,且每个样本点的概率都是 $1/n$,则包含有 k 个样本点($k\leqslant n$)的事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

(1)$P(S)=1,P(\varnothing)=0$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

若　$AB=\varnothing$,则　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

若　$B\subseteq A$,则　$P(A-B)=P(A)-P(B)$

(3)$P(\bar{A})=1-P(A)$

(4)$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)$

$$+\sum_{i\neq j,i\neq k,k\neq j}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

若　$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(四)条件概率及概率的乘法定理

1. 事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率 $P(B|A)$ 定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\quad(P(A)>0)$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad(P(A)>0)$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0)$$

3. 乘法公式推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots$$
$$P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

(五)全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相容事件,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$。则对任意事件 B 的概率均有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

2. 贝叶斯公式

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}\quad(i=1,\cdots,n)$$

(六)随机事件的独立性

1. 事件 A 与 B 相互独立　若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A 与 B 相互独立。

2. 性质　若 A,B 相互独立,则:

(1)$\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也分别相互独立

(2)$P(A|B)=P(A)\quad(P(B)>0)$

$P(B|A)=P(B)\quad(P(A)>0)$

3. 推广　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

(七)贝努利(Bernoull)概型

设一次试验的结果只有 A 及 $\bar{A}$ 两个,且事件 A 发生的概率$P(A)=$ $(0<P<1)$,做 n 次独立重复试验,则在 n 次重复试验中事件A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}\quad(k=0,1,2\cdots n)$$

四、疑难问题解答

1. 如何通过已知事件表达其他事件?

答　设 A、B、C 为已知事件,则

(1)"A发生而B与C都不发生"可表示为$A\bar{B}\bar{C}$或$A-B-C$,或 $A-(B\cup C)$。

(2)“A 与 B 都发生而 C 不发生”可表示为 $AB\bar{C}$，或 $AB-C$，或 $AB-ABC$。

(3)“A、B、C 三事件都发生”可表示为 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$。

(4)“A、B、C 三事件都不发生”可表示为 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$，或$\overline{(A\cup B\cup C)}$。

(5)“A、B、C 三事件至少有一发生”可表为 $A\cup B\cup C$，或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$。

(6)“A、B、C 中至少有两个发生”可表为 $AB\cup BC\cup AC$，或 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$。

(7)“A、B、C 中不多于一个发生”表为 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\cup A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$ 或$(\overline{AB\cup BC\cup AC})$。

(8)“A、B、C 中不多于两个发生”表为$\overline{ABC}$或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$。

(9)“A、B、C 中恰好有一个发生”表为：$A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$。

(10)“A、B、C 中恰发有两个发生”可表为：$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$，或 $AB\cup BC\cup AC-ABC$。

2. 在实际应用中，如何判断两事件的独立性？

答　在实际应用中，对于事件的独立性，我们常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，由试验的独立性来判断事件的独立性。或者说根据问题的实质，直观上看一事件发生是否影响另一事件的概率来判断。例如：甲、乙两名射手在相同条件下进行射击，则“甲击中目标”与“乙击中目标”两事件是独立的。

如果对实际问题中的事件还难以判断它们是否独立。则需要利用统计资料进行分析，再来判断是否符合事件独立性的条件。

3. 如何使用全概率公式和贝叶斯公式？

答　全概率公式是应用广泛的一个公式。它把事件 A 的概率（不太好求），分成几个比较容易计算的概率之和，看似繁琐，实则简单。在分析问题的过程中，A 可视为$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ 的子事件，或者把 B_i 看成 A 发生的原因，A 是结果，而 $P(B_i)$及 $P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$是较易求得的。从而可由“原因”求出“结果”。

贝叶斯公式有时称为后验概率公式，它实际上是条件概率。是在已知结果发生的情况下，求导致结果的某种原因的可能性大小。比如求 $P(B_1|A)$，当 $P(A)$（常用全概率公式计算）。$P(B_1)$，$P(A|B_1)$较易求得时，就要

用贝叶斯公式,它是由"结果"求"原因"。

4. 条件概率 $P(B|A)$ 与积事件的概率 $P(AB)$ 有何区别?

答 $P(AB)$表示在样本空间 S 中,计算 AB 发生的概率,而 $P(B|A)$ 表示在缩减的样本空间 S_A 中,计算 B 发生的概率。用古典概率公式,则用

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S_A\text{ 中基本事件数}}$$

一般说来,$P(B|A)$比 $P(AB)$大。初学者在计算条件概率问题时,有时比较容易将积事件概率与条件率混淆。这时须弄清:条件概率一定是在某事件已发生的条件下该事件发生的概率。

5. 两事件 A、B 相互独立与 A,B 互不相容这两概念有何关系? 对立事件与互斥事件有何联系与区别?

答 我们说两个事件相互独立,其实质是一个事件 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现没有关系。

而说 A、B 互不相容,则是指 B 的出现必然导致 A 的不出现,或 A 的出现必然导致 B 的不出现,即 $AB=\varnothing$,从而 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现密切相关。

那种认为"两事件相互独立必定互不相容"的认识是错误的。因为当在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的条件下,若 A、B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)(B)>0$,而若 A、B 互不相容,则 $P(AB)=0$,两种概念出现矛盾。

说明在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的情况下,相互独立不能互不相容。

因此,在一般情况下,相互独立与互不相容(即互斥)是两个互不等价,完全不同的概念。对立事件与互斥事件的联系与区别是:

(1)两事件对立,必定互斥,但互斥未必对立。

(2)互斥的概念适用于多个事件,但对立概念只适用于两个事件。

(3)两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生,即至多只能发生其中一个,但可以都不发生。而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生。

6."n 个事件相互独立"与"n 个事件两两独立"是否一回事?

答 不是的,后者只是前者的条件之一,由前者可以推出后者,但反过来不行。

7. 后验概率与先验概率有何区别?

答 贝叶斯公式中,已知事件 B_i 的概率 $P(B_i)$称为"先验概率",它是试验前根据以往经验确定的一种假设概率,现在进行了一次试验,如果事件

A 确实发生了,则对于事件 B_i 的概率应予以重新估计,也就是在事件 A 发生之后,再来判断事件 B_i 发生的概率 $P(B_i|A)$,称之为"后验概率"。

由于后验概率的计算仍以先验概率为基础,所以两者有一定的联系。但后验概率是在试验之后事件 A 确已发生的情况下,来分析它各种原因 B_i 的概率,因而一般来讲,有利于 A 发生的那些原因的概率就会增大,而不利于 A 发生的那些原因的概率就会减小。

8. 什么是"实际推断原理"? 它有什么作用? 它与小概率事件有什么关系?

答　概率很小的事件称为小概率事件。但是可以证明,有随机试验中某一事件 A 出现的概率 $\varepsilon>0$ 不论多么小,只要不断地、独立地重复试验,则事件 A 迟早会出现的概率为 1。

设 A_k 为 A 于第 k 次试验中出现,则 $P(\bar{A}_k)=1-\varepsilon$,在前 n 次试验中,A 至少出现一次的概率为 $P_n=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-(1-\varepsilon)^n$ 当 $n\to\infty$ 时,$P_n\to1$。

然而在实践中,人们总结到"概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的",这一经验称为"实际推断原理"。根据实际推断原理,如果小概率事件在一次试验中竟然发生了。我们就有理由怀疑该事件是小概率事件的正确性。

五、常考题型精析

【例 1-1】　设 A、B、C 是三个事件,用 A、B、C 表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A、B、C 至少有一个发生;

(3) A、B、C 至少有一个不发生。

【思路点拨】　利用事件间的关系与运算,将已知事件 A、B、C 恰当地联系起来。

【解题过程】　(1) $A\bar{B}\bar{C}$

(2) $A+B+C$

或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$　或 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$

(3) $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

或 $\overline{ABC}$　或 $\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

【例1－2】 设A、B是两个事件，那么事件"A、B都发生"，"A、B不都发生"、"A、B都不发生"中，哪两个是对立事件？

【思路点拨】 A、B不都发生就是A与B不能同时发生。

事件的对立定义：事件A与B不能同时发生，但必须有一个发生，即A、B满足中且$A+B=S$，称A与B是对立的(成互逆的)事件，记为$\bar{A}=B$或$\bar{B}=A$

解 上述三事件可分别表示为AB、$\overline{AB}$、$\bar{A}\bar{B}$。若AB与$\bar{A}\bar{B}$是对立事件，由定义应有$AB=\overline{\bar{A}\bar{B}}$，但$\overline{\bar{A}\bar{B}}=A\cup B\neq AB$，所以"$A$、$B$都发生"与"$A$、$B$都不发生"不是对立事件。而$\overline{\overline{AB}}=AB$所以"$A$、$B$都发生"与"$A$、$B$"不都发生"是对立事件。

【例1－3】 设A、B为随机事件，$P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.2$求$P(\overline{AB})$

【思路点拨】 解答本题的关键是将$A-B$改写为$A-B=A-AB$，而$AB\subset A$，则有$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$。

解 由于$A-B=A-AB$，且$AB\subset A$，所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

于是 $$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$$

因此 $$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$$

【例1－4】 设A、B为两个随机事件，证明：

$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$。

【思路点拨】 证明本题的关键是将$P(A\cup B)-1$写成$P(A\cup B)-1=-(1-P(A\cup B))$。而$1-P(A\cup B)\geqslant 0$，从而得到要证明的不等式。

利用到的关系式$P(A)+P(\bar{A})=1$，$P(B)+P(\bar{B})=1$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

证明 因为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，而$P(AB)\geqslant 0$

所以 $$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

又 $$AB\subset A\cup B$$

故 $$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

又由于 $$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})=P(A)+P(B)-1$$

$$=P(AB)+P(A\cup B)-1=P(AB)-(1-P(A\cup B))\leqslant P(AB)$$

总之，有$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

【例1－5】 设事件A与事件B相互独立，$P(A)=P(\bar{B})=\alpha-1$，