中学数学奥林匹克丛书

数学奥林匹克解题研究

高中册

主　编：梅向明
副主编：张君达

ZHONG XUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

北京师范学院出版社

数学奥林匹克解题研究

中学数学奥林匹克丛书

数学奥林匹克解题研究

（高中册）

主编　梅向明　　　　副主编　张君达

作者　周春荔　王人伟　明之白　赵大悌

北京师范学院

1988年·

主　编：梅向明
副主编：张君达
编　委：（以姓氏笔划为序）
何裕新　张君达　周春荔
赵大悌　唐大昌　梅向明

中学数学奥林匹克丛书
数学奥林匹克解题研究
（高中册）
主编：梅向明　副主编：张君达
作者：周春荔　王人伟　明之白　赵大悌
*
北京师范学院出版社出版
（北京阜成门外花园村）
新华书店首都发行所发行
北京昌平兴华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：7.75　字数：169千
1988年7月北京第1版　1989年2月北京第2次印刷
印数：15,501—27,500册
ISBN　7-81014-180-5/G·170
定价：2.40元

前　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点. 反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊（公元前776年)，这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届“国际数学竞赛”，简称IMO (International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多，这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛。1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校。三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献.学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》.希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有许多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们，以及广大的专家和读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目　录

第一章　几个基本原则

如果要学会解数学问题，就应掌握一般的解题思路与方法。本章在这方面将集中介绍几种常用的数学思维原则，其中“抽屉原则”与“包含排除原理”在《组合基础》中已专门讲述，本章不再重复。下面只扼要介绍“极端性”原则、分类讨论原则和重迭原则。

§1　“极端性”原则

为了解决许多数学问题，考察某些“极端的”、“邻界的”元素——也就是取最大或最小量值的元素很有好处。考察极端的元素比如最大、最小距离，最大、最小边，最大、最小角，最大、最小面积的图形，得分最多的队员，得分最少的队员等等，都是“极端性”的具体体现。利用考察极端的元素来实现解题的方法称为“极端性”原则。当然作为一条原则，它只对相当一类问题起作用，而不应认为它是一般的最具普遍性的原则。

我们通过各类例题来了解并掌握这一原则的具体应用。

例 1　在平面上给出某个点集M，使得由M中每个点都是集M中某两点连结线段的中点。证明：集合M一定包含无穷多个点。

分析：假设集合M是有限点集，则集合M中的点两两之间的距离为有限个值，其中一定存在距离的最大值.为确定起见，不妨设A、B两点之间距离最大。依题设条件，点B应是某个线段CD的中点，其中C、D也是M中的点。若C在直线AB上，则D也应在直线AB上，且C、A在B同侧，则D、A在B异侧。这时$AD>AB$，则与AB最大矛盾。若C、D不在直线AB上，则如图1-1所示，延长AB到A'，使$BA'=BA$，连$A'D$，则$A'D=AC$。易得：

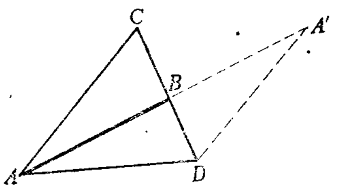

图1-1

$$AD+AC=AD+AD'>AA'=2AB.$$

这时AD或AC至少其中之一要大于AB(如若$AD\leqslant AB$，$AC\leqslant AB\Longrightarrow AD+AC\leqslant 2AB$)。不妨设$AC>AB$，这又与$AB$最大的选择相矛盾。

综上所述，集M为有限点集的假设不能成立，因此，M必是无限点集。

在上面的分析与证明中，取AB是具有最大长度的线段是至关重要的，它也是后面导致矛盾的焦点。有意识地选择最大长度的线段来解题就是体现了“极端性”的原则。

例 2　在$n\times n$的正方形棋盘上，放置的“车”遵循下列条件：如果某个小格是“自由”（这个小格上没放着“车”）的，则放在过这格的水平线与竖直线上的“车”的总数不少于n。证明：在棋盘上摆放有不少于$\frac{n^2}{2}$个“车”。

分析：这个问题是很难入手的，但学会运用“极端性”原则，就容易得多了，并可以本质上简化求解过程。

我们考察水平方向的n行与竖直方向的n列（如图1-2），在这$2n$条“线格”上一定有放置“车”数目最少的一排线格（如果有若干排放置“车”数目最少，则任择其中一排）.不妨设放置“车”数目最少的是一排水平线格，其上所放“车”的数目为k个。

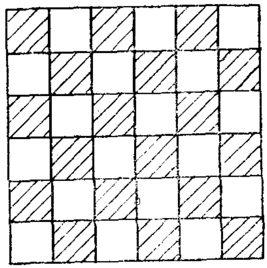

图1-2

如果$k\geqslant\frac{n}{2}$，则由n条水平线格每一条上都不少于$\frac{n}{2}$个“车”，所以棋盘上放置的“车”的总数不少于$n\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$个。

如果$k<\frac{n}{2}$，这时我们注意到这条水平线格上应有$n-k$个空格（没放“车”的格），而通过这些空格的每个竖直线格上应放置不少于$n-k$个“车”。因此，所有过这$n-k$个空格的竖直线格上放有不少于$(n-k)^2$个“车”.依据k的选择可知剩下的那k条竖直线格上都有不少于k个“车”。总计不少于k^2个“车”。因此，在棋盘上按竖直n列线格计数共放置着不少于$(n-k)^2+k^2$个车，下面我们只需证明$(n-k)^2+k^2\geqslant\frac{n^2}{2}$。

易知 $$[(n-k)^2+k^2]-\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2$$

$$=2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)=2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant 0$$

综上可知，在棋盘上有不少于$\frac{n^2}{2}$个“车”。

实际上我们可以构造“车”的放置法，当n为偶数时，能找到满足条件的恰好放$\frac{n^2}{2}$个“车”的放法。只需把“车”放在所有黑格上（或白格上）就足够了。如果n是奇数，因为$\frac{n^2}{2}$不是整数，所以遵循条件恰放$\frac{n^2}{2}$个“车”是不可能的，我们可以实现恰放$\frac{n^2+1}{2}$个“车”的放法。即一个“车”放在棋盘的一角，而其余的“车”放在同色格子中就可以了。

例 3　在平面上给定n个点，其中没有三点共线。证明：存在通过已知点中三个点的圆，它的内部不包含任何一个已知点。

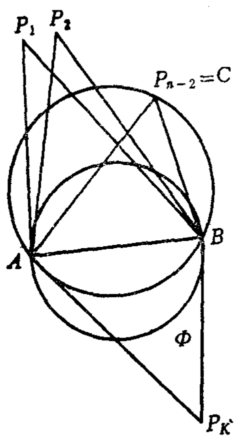

图1-3

分析：通过每三点画圆，得到某些圆的集合（其中有些圆可能重合就是一个）.需要证明，至少有一个圆它的内部不包含任何一个给定的点.为此，我们如下利用“极端性”原则。在这n个点中选择具有最小距离的两个点，不妨设这两点为A,B。以线段AB为直径画圆Φ，则其余$n-2$个给定点

与A、B的距离不小于$|AB|$(图1-3)，所以这$n-2$个点都位于Φ的外面.这时，将这$n-2$个点分别与点A、B连结，所得视角依大小顺序排为一列：$\angle AP_1B<\angle AP_2B<\cdots<\angle AP_{n-2}B$.以$P_{n-2}$为$C$点，过$A$、$B$、$C$作圆$\Psi$，则$\Psi$内没有任何一个给定的点。

例4 在平面上引$n(n\geqslant 3)$条直线，其中任二条不平行，任三条不共点。这n条直线分平面为若干个区域。证明：无论这n条直线如何取，都至少有一条，邻接它的平面区域中有一个是三角形。

证明 n条直线两两相交有C_n^2个交点，这些交点到每条直线的距离中一定有一个最小非零距离，设恰是点P到l_1有最小非零距离，不妨设P是直线l_2与l_3的交点，设l_2交l_1于Q，l_3交l_1于R，则$\triangle PQR$就是一个与直线l_1相邻接的三角形域（图1-4）。

我们只需证明不会再有其它直线通过$\triangle PQR$. 如若不然，设有l过$\triangle PQR$，由于不存在三线共点，所以l不过P、Q、R。则l与PR或PQ之一要相交，不妨设l交PR于M，那么M到l_1的距离将小于P到l_1的距离。这与P到l_1具有最小非零距离这一极端性的选择相矛盾。因此，$\triangle PQR$就是一个与直线l_1邻接的三角形域。

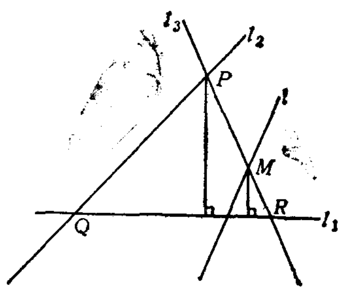

图1-4

例5 证明：不存在四个自然数x、y、z、u，满足方程$x^2+y^2=3(z^2+u^2)$。

分析：假设这四个自然数组存在，我们考察它们中使x^2+y^2最小的一组（如果有某些四自然数组，它们都有x^2+y^2最小，我们任选其中一组即可）。

设这四数组是a、b、c、d，由方程$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$可知，a^2+b^2是3的倍数。但容易证明，a^2+b^2被3整除的充要条件是a与b都被3整除（因为不被3整除的数的平方在被3除时余数总是1）。因此，可设$a=3m$，$b=3n$，所以

$$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2),$$

约去因子3，得$c^2+d^2=3(m^2+n^2)$，这样我们找到了四个自然数c、d、m、n满足已知方程，同时，这四个数满足关系式$c^2+d^2<a^2+b^2$。这与a^2+b^2是使x^2+y^2取最小值的选择相矛盾。因此，不存在a、b、c、d这样四个自然数，使得方程

$$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$$

成立。

例6　$n(n>3)$名乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同。试证明：总可以从中去掉一名选手，而使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同。

分析：如果去掉选手H，能使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同，那么，我们称选手H为可去选手。

我们的问题就是设法证明：存在可去选手。

设A是已赛过最多对手的选手（选极端!）。若不存在可去选手，于是A不是可去选手，故存在选手B、C，使当去掉A时，与B赛过的对手的集合和与C赛过的对手的集合

相同。从而，B和C不可能赛过，并且B和C中一定有一个（不妨设为B）与A赛过，而另一个（即C）未与A赛过。

又因C不是可去选手，故存在选手D、E，其中D与C赛过，而E未与C赛过。

显然，D不是A，也不是B。因为D与C赛过，所以，D也与B赛过。又因为B与D赛过，所以，B也与E赛过。但E未与C赛过，因而选手E只能是选手A。

于是，与A赛过的对手数就是与E赛过的对手数，它比与D赛过的对手数少1，此与关于A的假设矛盾，从而命题得证。

可见，本题中设A是已赛过最多对手的选手这一极端情况是非常重要的。

练 习 一

1. 证明：任意的凸五边形中都能找到三条对角线，由这三条对角线可以组成一个三角形。
2. 在一次乒乓球循环赛中，$n\,(n\geqslant 3)$名选手中没有全胜的。证明：一定可以从中找出三名选手A、B、C，有A胜B、B胜C、C胜A。
3. 由凸多边形的内点向它的边引垂线，证明：至少有一个垂线足位于它的边上而不在它的延长线上。
4. 证明：如果一个三角形的所有边都小于1，则它的面积小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$。

§2 分类讨论原则

一个复杂的问题可以分为有限数量的子问题，每个子问题逐一解决，则整个问题即获解决。这种解决问题的原则常称为分情况讨论或分类讨论原则。

分类讨论要求既不遗漏又不重复。因此要求把情况集合A分成有限个子集$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，使得

(1) $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$;

(2) $A_i \cap A_j = \Phi (i \neq j, i、j = 1, 2, \cdots, n)$。

其中Φ为空集，下同，换言之，分类讨论首先要对情况集合作一完全分划，然后证明：

对A_1　命题成立；

对A_2　命题成立；

……　…………

对A_n　命题成立。

由于$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$且$A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$，所以命题对A也成立。

如对全体自然数成立的命题，可以分奇、偶数两类进行讨论；对三角形证明的问题可以分直角三角形、锐角三角形、钝角三角形三类进行讨论。其实模n的剩余类就是以n为标准对整数集的分类，平面点集的染色也可看成是对平面上点的分类。“不会正确分类就不可能学好数学”。看来这话是很有道理的。

例 1　商店的糖果有 3 公斤与 5 公斤两种包装，数量极

为充足，保证供应．求证：凡购买 8 公斤以上的糖果时，都可以不用拆包．

分析：买 8 公斤只要给一包 3 公斤、一包 5 公斤的包装就可以了．买 9 公斤给 3 包 3 公斤的包装就可以了．买10公斤只要给 2 包 5 公斤的包装就可以了．

问题的实质是证明：对自然数$N\geqslant8$，一定存在非负整数m、n，使得

$$N=3m+5n.$$

这样我们就把问题数学化了．

为了证明，我们对N按模 3 分类讨论．

(1) $N=3k$ $(k>2)$，这时令 $m=k$，$n=0$，即有 $N=3k+5\times0$．也就是只需用k包 3 公斤糖果支付即可．

(2) $N=3k+1(k\geqslant3)$，这时令 $m=k-3$，$n=2$，即有$N=3(k-3)+2\times5$．也就是用$k-3$包 3 公斤糖果与两包 5 公斤糖果搭配支付即可．

(3) $N=3k-1(k\geqslant3)$，这时令 $m=k-2$，$n=1$，即有$N=3(k-2)+5\times1$．也就是用 $k-2$ 包 3 公斤糖果与一包 5 公斤糖果搭配支付即可．

综上讨论可知，对任意$N(N\geqslant8)$公斤糖果都可用 3 公斤包装与 5 公斤包装不拆包就可支付．

例 2 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线．如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分，试证这个曲线段的长度不小于 1．

分析：设正方形周界两点为M、N，则M、N的位置关系可分三种情况：在一组对边上；在一组邻边上；在同一边上．并且只有这三种情况．因此，我们的证明将依此进行分