

724-16/11

怎样解小学数学应用题

赵振威 陆明德

ZENYANG JIEXIAOXUESHUXUEYINGYONGTI

江苏人民出版社

怎样解小学数学应用题

赵振威 陆明德

江苏人民出版社

怎样解小学数学应用题

赵振威 陆明德

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行 宜兴印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 $1/32$ 印张6.75 字数148,000

1980年12月第1版 1980年12月第1次印刷

印数1—110,000册

书号: 13100,064 定价: 0.49元

责任编辑 何震邦

编 者 的 话

应用题是小学数学教学中培养学生解决日常生活和生产中简单实际问题的重要内容。应用题与小学数学所有基础知识紧密相关，类型较多，方法灵活，是小学数学教学中的重点与难点之一。本书是以《全日制十年制学校小学数学教学大纲（试行草案）》与现行小学数学教材为主要依据，结合当前小学数学应用题教学的实际情况编写的。供小学数学教师、中等师范学校学生参考，也可供小学高年级学生以及小学数学爱好者阅读。

本书先介绍解答应用题必需的知识，在此基础上，对应用题的各类基本问题进行分析研究，为读者提供解答应用题的思维方法，解题途径以及进行运算的各种技能技巧。全书共分四章：预备知识；应用题的结构与解法；典型应用题的解法；分数、比例、求积应用题的解法。各章均配置了相当数量的典型例题和习题。

在编写过程中，曾得到葛德生同志的热忱帮助，在此谨致谢意。

我们限于水平，书中缺点错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

一九八〇年五月

目 录

第一章 预备知识	1
§ 1 算术数.....	1
§ 2 四则运算的意义.....	3
§ 3 四则运算的法则.....	5
§ 4 四则运算的相互关系.....	8
§ 5 运算定律和运算性质.....	13
§ 6 运算顺序和括号使用.....	18
第二章 应用题的结构与解法	25
§ 7 应用题的结构.....	25
§ 8 简单应用题和复合应用题.....	28
§ 9 简单应用题的基本类型.....	31
§ 10 解答简单应用题的一般步骤.....	37
§ 11 提高解答简单应用题能力的途径.....	40
§ 12 解答复合应用题的一般步骤.....	51
§ 13 分析法与综合法.....	59
§ 14 应用题的一题多解.....	66
§ 15 几种特殊思考方法.....	74
第三章 典型应用题的解法	87
§ 16 还原问题.....	87
§ 17 和差问题.....	92
§ 18 倍数问题.....	101

§19	归一问题	110
§20	平均问题	115
§21	盈亏问题	121
§22	匀速运动问题	126
§23	公约数、公倍数问题	135
第四章	分数、比例、求积应用题的解法	141
§24	分数应用题	141
§25	工程问题	159
§26	比例问题	168
§27	求积问题	188

第一章 预备知识

应用题是用语言或文字叙述的题目。题中围绕某一事实给出一些已知数，但没有现成的算式，要求我们自己想定适当的算法，列出算式把未知数解答出来。因此，从总体看，解答应用题，需要具备两个条件：一是懂得整数、分数四则运算的意义，能熟练地进行四则运算；二是熟悉常用的思维方法，能正确地分析各类应用题的数量关系。这两个条件是互相联系的，一般说来，只有深刻理解四则运算的意义，才能灵活地分析应用题的数量关系，选择恰当的计算方法。

本章从算术数入手，概略地讨论四则运算的意义和法则，四则运算的相互关系，四则运算的运算定律和运算性质，以及四则混合运算的顺序和括号使用等问题，为顺利解答应用题，提供必要的基础知识。

§ 1 算术数

在应用题中，常常用整数或分数来反映事物数量的多少。正确认识整数和分数的概念，对于理解应用题的题意很有帮助。

整数的概念起源于集合，是在计数过程中逐渐形成的。零(0)和自然数(如1, 2, 3, 4, 5, ...)都是整数。

分数的概念来源于“分”，是在量的度量过程中逐渐形成

的。把一个单位分成若干等分，表示其中的一份或几份这样的数，叫做分数。

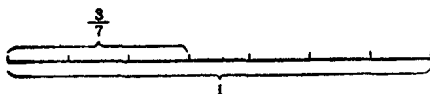


图 1—1

例如，画一条适当长的线段作为单位 1，把它分成七等分，从中取出三份，这三份就是全线段的七分之三(图1—1)，用分数表示，就是 $\frac{3}{7}$ 。

分母是 10、100、1000、… 的分数，叫做十进分数。一个十进分数，如果不写出它的分母，而根据十进位制的位值原则表示，就是小数。例如

$$3.719 = 3 \frac{719}{1000} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{9}{1000}.$$

↑
↑
↑

小数形式

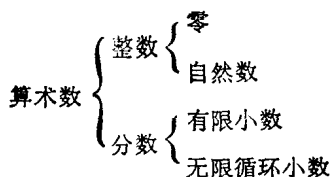
分数形式

小数在表示形式上和整数相似，也采用十进位制的位值原则；而从本质来说，就是分数。分数和小数是同一数量的两种不同的表示形式。任何一个分数，都可以用有限小数或无限循环小数来表示。例如

$$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0.625,$$

$$\frac{5}{7} = 5 \div 7 = 0.\dot{7}1428\dot{5}.$$

算术中的整数和分数，通常叫做算术数。从上面的讨论可以看出，算术数可以用下面的图解来划分：



§ 2 四则运算的意义

算术中的运算，有加法、减法、乘法、除法四种，简称四则运算。深刻理解四则运算的意义，有助于根据应用题的条件和问题，选择正确的计算方法。

1. 加法的意义 把两个或两个以上的已知数合并起来，求它们的和的运算方法，叫做加法。

例如： $17 + 28 = 45$ 。

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{加数} & \text{加数} & \text{和} \end{array}$

加法运算在算术数范围内是永远可以实施的。加法运算的结果是唯一的。

2. 减法的意义 已知两个加数的和与其中的一个加数，求另一个加数的运算方法，叫做减法。

例如： $45 - 28 = 17$ 。

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{被减数} & \text{减数} & \text{差} \end{array}$

减法运算在算术数范围内并不是永远可以实施的。只有在被减数大于或者等于减数的时候，减法才能进行。在可以相减的情况下，减法运算的结果是唯一的。

3. 乘法的意义 分两种情况进行考察：

(1) 一个数乘以整数，就是求若干个相同加数的和的简便运算。

例如：

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & = & 35 & \leftarrow \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & & & \uparrow & \\ & & & & & & & & & & & \text{和} & \\ & & & & & & & & & & & & \\ \rightarrow & 7 & & \times & & 5 & & = & 35 & \leftarrow \\ & \uparrow & & & & \uparrow & & & \uparrow & \\ & \text{被乘数} & & & & \text{乘数} & & & \text{积} \\ & (\text{因数}) & & & & (\text{因数}) & & & \end{array}$$

在一个数乘以整数的乘法中，相同的加数（如例题中的 7）叫做被乘数，相同加数的个数（如例题中的 5）叫做乘数，所得的结果（如例题中的 35）叫做积。乘数和被乘数又都叫做因数。

(2) 一个数乘以分数，就是求这个数的几分之几是多少。

例如： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ 。

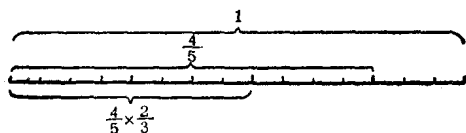


图 1-2

$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ ，就是求 $\frac{4}{5}$ 的 $\frac{2}{3}$ 是多少，也就是把 $\frac{4}{5}$ 作为全量，把它分为三等分，取出其中的两份（图1-2）。

乘法运算在算术数范围内是永远可以实施的。乘法运算的结果是唯一的。

4. 除法的意义 已知两个因数的积与其中的一个因数，求另一个因数的运算方法，叫做除法。

例如： $35 \div 5 = 7$ 。

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \text{被除数} & \text{除数} & \text{商} & \end{array}$$

在除法运算中，0 不能作除数。这是因为：

第一，如果除数是 0 而被除数不是 0，如 $3 \div 0$ ，根据除法的意义，就是要找一个数，使这个数与 0 相乘的积是 3，这是不可能的。因为任何数与 0 相乘的积总是 0，而不会等于 3。所以，在这种情况下，除法是不能实施的。

第二，如果除数是 0，被除数也是 0，即 $0 \div 0$ 。根据除法的意义，就是要找一个数，使这个数与 0 相乘的积是 0。由于任何数与 0 相乘的积总是 0，比如， $1 \times 0 = 0$ ， $2 \times 0 = 0$ ，等等。这样， $0 \div 0$ 的商就有无限多个，不能得到唯一确定的商。所以，这样的除法在初等数学中是没有实际意义的。

综上所述，不论被除数是不是 0，用 0 作除数去除它，或是除法不能实施，或是没有意义。

除法运算在算术数的范围内（除数不为 0），是永远可以实施的。除法运算的结果是唯一的。

§ 3 四则运算的法则

整数、小数四则运算的法则比较简单，这里略而不赘。下面重点讨论分数四则运算法则。

1. 分数加法法则 分数加法法则有四条：

(1) 同分母分数相加，用分子相加的结果作分子，原来的分母作分母；

(2) 异分母分数相加，先通分，然后相加；

(3) 带分数相加，可以把整数部分和分数部分分别相加，再把所得的两个数合并成一数；

(4) 所得的和如果是假分数，必须化成整数或带分数，

且分数部分必须化成最简分数。

$$\begin{aligned}\text{例 1} \quad & \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{25}{36} \\ &= \frac{27}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36} \\ &= \frac{68}{36} \quad (\text{这一步在实际计算时可以省略}) \\ &= 1\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 2} \quad & 2\frac{2}{15} + \frac{5}{7} + 13\frac{8}{21} \\ &= (2+13) + (\frac{2}{15} + \frac{5}{7} + \frac{8}{21}) \\ &= 15 + (\frac{14}{105} + \frac{75}{105} + \frac{40}{105}) \\ &= 15 + 1\frac{8}{35} \\ &= 16\frac{8}{35}.\end{aligned}$$

2. 分数减法法则 分数减法法则有四条:

(1) 同分母分数相减, 用分子相减的结果作分子, 原来的分母作分母;

(2) 异分母分数相减, 先通分, 然后相减;

(3) 带分数相减, 可以把整数部分和分数部分分别相减 (如果被减数的分数部分小于减数的分数部分, 可以从被减数的整数部分借 1, 化为假分数然后相减), 再把所得的两个数合并成一数。

(4) 所得的差的分数部分必须化为最简分数。

$$\begin{aligned}
 \text{例 3} \quad & \frac{5}{12} - \frac{2}{9} \\
 &= \frac{15}{36} - \frac{8}{36} \\
 &= \frac{7}{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 4} \quad & 121\frac{7}{33} - 107\frac{13}{44} \\
 &= (120 - 107) + (1\frac{7}{33} - \frac{13}{44}) \\
 &= 13 + (\frac{160}{132} - \frac{39}{132}) \\
 &= 13 + \frac{11}{12} \\
 &= 13\frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

3. 分数乘法法则 分数乘法法则有三条：

(1) 分数乘以整数或整数乘以分数，用整数与分数的分子相乘的积作分子，原来的分母作分母；

(2) 分数乘以分数，分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母。

(3) 乘数中如果有带分数，通常先把带分数化为假分数，然后相乘。

$$\text{例 5} \quad \frac{16}{81} \times 7 = \frac{112}{81} = 1\frac{31}{81}.$$

在作分数乘法的过程中，为了使计算简捷，可以先行约分。

$$\text{例 6} \quad 8\frac{12}{31} \times 9\frac{8}{13}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{20}{31} \times \frac{125}{13} \\
 &= \frac{2500}{31} \\
 &= 80 \frac{20}{31}.
 \end{aligned}$$

4. 分数除法法则 分数除法法则有三条：

- (1) 分数除以整数(0除外)，等于分数乘以这个数的倒数；
 (2) 一个数除以分数，等于这个数乘以原分数的倒数；
 (3) 除式中如果有带分数，可以把带分数先化为假分数，然后相除。

例 7 $\frac{15}{28} \div 10 = \frac{15}{28} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{56}.$

例 8 $20 \frac{5}{8} \div 13 \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{165}{8} \div \frac{55}{4} \\
 &= \frac{165}{8} \times \frac{4}{55} \\
 &= 1 \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

§ 4 四则运算的相互关系

1. 加法和减法的关系 由加法和减法的意义，可以推知下列关系式：

$$\text{加数} + \text{加数} = \text{和}; \quad (1)$$

$$\text{和} - \text{一个加数} = \text{另一个加数}. \quad (2)$$

$$\text{被减数} - \text{减数} = \text{差}; \quad (3)$$

$$\text{被减数} - \text{差} = \text{减数}; \quad (4)$$

$$\text{差} + \text{减数} = \text{被减数}. \quad (5)$$

从上面的关系式可以看出，加法所要求的数，是减法中的已知数；减法所要求的数，是加法中的已知数。因此，加法是减法的逆运算，减法也是加法的逆运算。也就是说，加法和减法互为逆运算。

2. 乘法和除法的关系 由乘法和除法的意义，可以推知下列一些关系式：

$$\text{因数} \times \text{因数} = \text{积}; \quad (6)$$

$$\text{积} \div \text{一个因数} = \text{另一个因数}. \quad (7)$$

$$\text{被除数} \div \text{除数} = \text{商}; \quad (8)$$

$$\text{被除数} \div \text{商} = \text{除数}; \quad (9)$$

$$\text{商} \times \text{除数} = \text{被除数}. \quad (10)$$

从上面的关系式可以看出，乘法所要求的数，是除法中的已知数；除法所要求的数，是乘法中的已知数。因此，乘法是除法的逆运算，除法也是乘法的逆运算。也就是说，乘法和除法互为逆运算。

3. 四则运算相互关系的应用 利用已知数和得数的关系式(1)——(10)，可以指导我们进行验算。加数与和的关系式(1)、(2)，可以验算加法；被减数、减数与差的关系式(3)、(4)、(5)，可以验算减法；因数与积的关系式(6)、(7)，可以验算乘法；被除数、除数与商的关系式(8)、(9)、(10)，可以验算除法。

例 1 计算 $16008 \div 58 = ?$

$$\begin{array}{r}
 276 \\
 58 \overline{) 16008} \\
 \underline{116} \\
 440 \\
 \underline{406} \\
 348 \\
 \underline{348} \\
 0
 \end{array}$$

要检验计算有没有错误，可以利用关系式(9)或(10)进行验算：

验算 1

$$\begin{array}{r}
 58 \\
 276 \overline{) 16008} \\
 \underline{1380} \\
 2208 \\
 \underline{2208} \\
 0
 \end{array}$$

验算 2

$$\begin{array}{r}
 276 \\
 \times 58 \\
 \hline
 2208 \\
 1380 \\
 \hline
 16008
 \end{array}$$

通过1、2验算的结果，都表明计算正确无误。

利用关系式(1)——(10)，还可以求得加法运算中未知的加数，减法运算中未知的被减数或者减数，乘法运算中未知的因数，除法运算中未知的被除数或者除数。

例 2 求下列各式中的未知数 x ：

(1) $126 + x = 243$;

(2) $x - \frac{11}{90} = \frac{5}{18}$ 。

解 (1) 利用关系式(2)，得

$$x = 243 - 126,$$

$$\therefore x = 117.$$

*在数学中，通常用符号“ $\therefore$ ”表示“所以”，用符号“ $\because$ ”表示“因为”。

(2) 利用关系式(5), 得

$$x = \frac{5}{18} + \frac{11}{90},$$

$$\therefore x = \frac{2}{5}.$$

例3 求下列各式中的未知数 x :

(1) $x \times 12 = 156$;

(2) $2\frac{3}{4} \div x = 9\frac{5}{8}$.

解 (1) 由关系式(7), 得

$$x = 156 \div 12,$$

$$\therefore x = 13.$$

(2) 由关系式(9), 得

$$x = 2\frac{3}{4} \div 9\frac{5}{8},$$

$$\therefore x = \frac{2}{7}.$$

例4 求下列各式中的未知数 x :

(1) $63 - (18 + x) = 15$;

(2) $2\frac{2}{3}x \div \frac{4}{5} = 25^*$.

解 (1) 把 $18 + x$ 看作一个数, 由关系式(4), 得

$$18 + x = 63 - 15,$$

$$\therefore 18 + x = 48.$$

*在含有字母的式子里, 数字和字母、字母和字母中间的乘号可以记作“ $\cdot$ ”, 或者省略不写, 数字要写在字母的前面。 $2\frac{2}{3}x$ 就是“ $2\frac{2}{3} \times x$ ”, 也可记作“ $2\frac{2}{3} \cdot x$ ”。