中等数学解题研究

（修订版）

首都师范大学数学系教材教法教研室编著

数学系

河南教育出版社

中等数学解题研究

（修订版）

首都师范大学数学系
教材教法教研室 编著

河南教育出版社

（豫）新登字03号

中等数学解题研究

（修订版）

首都师范大学数学系
教材教法教研室 编著

责任编辑 张国旺

河南教育出版社出版

（郑州农业路73号 邮编450002）

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 14.75印张 362千字

1994年5月第1版 1994年5月第1次印刷

印数 1—5,000册

ISBN 7-5347-1559-8/G·1173

定 价 7.90元

修订版前言

（一）

本书是为高等师范院校、教育学院、教师进修学院的数学教育系（科）所开设的《中等数学解题研究》必修课程而编写的教材。可供这些院校的师生进行教与学以及中学数学教师的继续教育、业务进修使用；亦可供从事中学数学教学与研究的数学教育工作者参考；更可以作为广大中学生课外活动的数学读物。

（二）

本课程于1984年初创，本书于1987年首次出版发行，至今经过了十年的教学实践。在高师数学教育的事业中，在培训教师、培养中学数学教师的解题能力、提高数学素质上，都发挥了一定的作用。这次修订稿保持了原稿的体系、特点和基本内容，吸收了十年来教学实践中积累的经验，进一步精化了内容、精选了问题、突出了解题的思想方法，并更新、充实和提高了各章的一些训练习题。全书各章的习题配置一律分A、B两组，A组为教学中的必做训练题；B组则是供给学有余力的学生进一步深入、提高的选做题。这样有利于因材施教，有利于教学效益的提高。

（三）

本修订稿是在原书稿和教学实践的基础上，根据我

教研室集体讨论、修订的本课程的“教学大纲”，由周春荔负责，并由连四清、李延林、周春荔分别执笔完成的。最后由李建才、周春荔对全书进行了审阅、定稿。全书由南宫慈云配图。

由于水平所限，书中不当之处，恳请指正。

编 者

1993年9月于首都师大

第一版前言

北京师范学院（注：现称首都师范大学）数学系教材教法教研室在全系教师们及系主任梅向明教授的支持下，从1984年开始，为本科一、二年级学生开设了一门数学教育专业课《中等数学解题研究》。此课程荣获1987年北京市高教局优秀教学成果一等奖。本书是在所用讲义的基础上，经过逐年修订充实，研究讨论后写成的。

课堂或课外做练习是各科教学过程中不可缺少的重要环节，解数学题更是数学特有的训练，对数学基础知识的复习与巩固，对培养和发展解决问题的能力，都有积极的意义。近年来，解数学问题作为数学教学论的一个科研专题，受到国内外数学工作者和数学教育专家的普遍关注，大有使这一课题科学化、理论化的趋势。著名的美国数学家和数学教育家波利亚(G·Polya)，对数学解题的研究形成的理论和一系列专著，深得中外数学教育家的赞许。

本书既是一本数学问题的选集，也是一本数学解题训练的手册。内容包括初等代数与函数、几何、综合问题三篇，数百个例题和习题，具有一定的代表性，着重探索解题的思想方法，所涉及的知识，对于大专院校的学生，中等学校数学教师，以及具有中等数学基础知识的读者，都是易于接受的。通过这些数学问题的钻研和练习，以期解决数量更多的各种问题。同时，有助于理解并掌握数学的精神实质，在科技、管理，特别是数学教

学工作中，发挥数学这一普遍适用的工具作用。本书还可以作为中等学校学生课外活动小组，或参加数学竞赛培训小组的参考书。

为了便于读者阅读，各部分自成体系，凡与解题有直接关系的重要概念和定理等知识，给出了适当的讲解或罗列。要求读者把主要精力放在灵活运用数学方法，培养逻辑思维和概括抽象能力上，从而掌握解题的思想方法。

本书是集体研究讨论的结果。代数部分由李建才、吴建平编写；初等函数部分由杨文智、孔国平、张景斌编写；几何部分由胡杞、李延林编写；综合问题部分由周春荔、方运加编写；最后全稿由米道生先生统一校订。全书由南宫慈云配图。

本书的编写是一次尝试，尚待通过今后教学实践的检验，考虑不周之处，在所难免，敬希广大读者尤其专业同行不吝指正。

在本书的编写中，我们曾参阅了一些有关的书籍和期刊，谨向原编著者致谢。

编　者

1987年3月于北京

目　　录

第一篇　初等代数与初等函数

第二篇　初等几何

第三篇　综合问题

第一篇　初等代数与初等函数

在中学数学中，代数与初等函数部分，重点研究数与式、方程（组）与不等式（组）、函数三大块内容．这是由于从总体上说，代数包含三类对象，第一类是数字和字母$\{A\}$；第二类是运算符号$\{O\}$；第三类是关系符号$\{R\}$．将这些对象进行不同的组合就构成代数的基本内容．

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\{A\}\text{—数字、字母、数及其数系发展}\\ \{O\}\text{—运算符号“}+\text{”、“}-\text{”、“}\times\text{”、“}\div\text{”}\end{array}\right\}\text{式子(函数)}\\ \{R\}\text{—关系符号“}=\text{”、“}\geqslant\text{”、“}\leqslant\text{”不等式}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{方程（组）}\\ \text{与}\\ \text{不等式（组）}\end{array}$$

基于以上分析，在这一部分中我们是按照

数——>方程、不等式——>函数

的系统来编排的，除了一些传统内容，象方程、不等式、函数的性质及应用以外，我们重点放在中学数学没有涉及或较少涉及的内容上，象整数的性质、复数在几何中的应用、函数周期性讨论、函数极值的初等解法等方面．目的在于深化知识，增加处理问题的途径，提高应用知识解决数学问题的能力．

第一章　初等代数

§1　整　数

一、概念及性质

形如…-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4，…的数称为整数．

整数通常分成三类：正整数、零、负整数．正整数也叫自然数，有时为了讨论问题方便，常常只研究自然数的性质，因为它与负整数只差一个负号，自然数有关的性质一般可推广到整数．

自然数有多种表示方法，其中最常使用的是十进制方法．每个自然数都能表示成 $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}$ 的形式，其中 a_n，a_{n-1}，…，a_1，c_0都是 0 到 9 之间的某个自然数，并且$a_n \neq 0$．如 90321．这种形式在解决问题时往往不方便，根据十进制的位置原则，自然数可写成和的形式，即

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

例如 $90321 = 9\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 1$．这种表示方法在处理一些问题，特别是整除问题时十分有用．

数的性质通常是与它们之间的运算相联系的．两个整数的和、差、积仍是整数，但它们的商却不一定是整数．例如$8\div 5$就不是整数，但是 $8\div 5 = 1 + \frac{3}{5}$．　　(1.1)

式(1.1)表明用 8 除以 5 时商 1，余 3．在此，还可将(1.1)式改写为 $8 = 5\times 1 + 3$．

一般地，我们有

定理 1 设 a 是非零整数，b 是任意整数，则可以唯一确定整数 q 和 r，使得

$$b=a\cdot q+r \quad (0\leqslant r<|a|).$$

其中 q 和 r 分别称为 b 除以 a 的商和余数.

由定理 1 可以对除法作出一种新的解释：所谓 b 除以 a，就是要找到另外两个整数 q 和 r，使得 $b=a\cdot q+r$，而且，有

$$0\leqslant r<|a|.$$

既然在整数范围内，除法不是总能实现的，就要引入一种新的与乘法有关的运算，以弥补这一不足，于是就要借助整除的概念.

定义1.1 设 a，b 是两个整数，其中 $a\neq 0$. 如果存在一个整数 q，使得

$$b=q\cdot a,$$

则称 a 整除 b，或 b 被 a 整除. 记作 $a\mid b$. 此时 a 叫做 b 的因数（或约数），b 叫做 a 的倍数. 例如 $3\mid 12$，$7\mid 245$. 如果 a 不整除 b，则记作 $a\nmid b$. 例如 $5\nmid 8$，$11\nmid -23$ 等.

由整除的定义及定理1.1可以得到一个重要的推论：

$a\mid b$ 的充分必要条件是 $r=0$，其中 r 为 b 除以 a 所得的余数.

整除概念是整数理论中的基本概念，它有许多重要性质：

设 a，b，c 均是整数，则

(1) $a\mid a$；

(2) $a\mid b$，$b\mid a \Longrightarrow a=b$ 或 $a=-b$；

(3) $a\mid b$，$b\mid c \Longrightarrow a\mid c$；

(4) $a>0$，$b>0$，$a\mid b \Longrightarrow a\leqslant b$；

(5) $a\mid b \Longrightarrow a\mid b\cdot c$；

(6) $a\mid b$，$a\mid c \Longrightarrow a\mid bx+cy$（其中 x，y 是整数）；

(7) $c\neq 0$，$a\cdot c \mid b\cdot c \Longrightarrow a \mid b$。

常见的整除判定方法，有

(1) 如果一个整数的最末一位数字能被 2 整除，那么这个整数必定能被 2 整除；

(2) 如果一个整数的最末一位数字是 0 或 5 ，那么这个数必定能被 5 整除；

(3) 如果一个整数的末两位数字组成的数能被 4 整除，那么这个数能被 4 整除；

(4) 如果一个整数的末位数是 0 ，那么这个整数必能被10整除；

(5) 如果一个整数的各位数字之和能被 3 (或 9) 整除，那么这数可被 3 (或 9) 整除。

(6) 把一个整数所有偶数位上的数字及其所有奇数位上的数字分别相加，再求出两个和的差，如果所得的差能被11整除，那么这个整数可被11整除。

分类是研究整数问题的基本方法。分类的方法一般需采用分类的标准。由定理1.1可知，按照余数的不同，可以对整数进行分类，最常见的分类就是把整数分为奇数和偶数。任何一个整数被 2 除的余数只可能是 0 或者 1 。被 2 除余数为 0 的一类整数为偶数，被 2 除余数为 1 的一类整数为奇数，分别可表示为 $2m$ 和 $2m+1$，其中 m 为整数。奇偶数具有很多性质，而且它们在解决实际问题中起着重要作用。

(1) 两个奇数的和 (差) 是偶数，两个偶数的和 (差) 是偶数；

(2) 如果两个整数的和 (差) 是偶数，那么这两个整数必同为奇数或同为偶数；

(3) 一个偶数和一个奇数之和 (差) 是奇数；

(4) 如果两个整数的和 (差) 是奇数，那么这两个整数必是

一奇一偶；

(5) 奇数个奇数的和（差）是奇数，偶数个奇数的和（差）是偶数；任意多个偶数的和（差）是偶数；

(6) 任意多个奇数的积是奇数；任意多个偶数的积仍是偶数；

(7) 如果 n 个整数的积是奇数，那么这 n 个数都是奇数，如果 n 个整数的积是偶数，那么这 n 个数中至少有一个是偶数.

研究问题总是由简单的开始，并希望复杂问题能与简单问题联系起来，整数问题的研究也是这样. 在自然数里，"1"是最简单的. 这不仅是因为1是第一个自然数、最小的自然数，而且由于其它自然数都可以用它来"表示". 即每一个自然数都等于一些"1"相加，如 $7=1+1+1+1+1+1+1$. 可见，所谓"1是最简单的"是指它在加法意义下的简单性. 对于乘法，1显然不具有这个性质，对乘法的简单数是所谓的素数.

定义 1.2 设 p 是一个自然数，如果

(1) $p>1$，

(2) p 除了1和 p 以外，再没有别的因数，那么 p 叫做素数或质数. 例如2，3，5，7等都是素数.

素数对乘法的简单性表现在：

定理 2 设 n 是一个自然数，那么它一定可以写成一些素数的乘积的形式，即

$$n=p_1p_2\cdots\cdots p_s.$$

其中 p_1，p_2，…，p_s 都是素数. 而且若要求 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_s$ 的话，这种表示方法是唯一的. 即如果 n 还可以写成

$$n=q_1q_2\cdots q_t,$$

其中 q_1，q_2，…，q_t 均是素数，而且 $q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_t$，那么可以推出 $t=s$，且 $q_i=s_i(i=1, 2, \cdots, s)$.

定理2在数论中被称作算术基本定理，它反映了素数在乘法

意义下的地位，是非常重要的。

二、基本例题

利用整除的定义及判别法是解答整除问题的基本方法，下面我们举例予以介绍。

例 1 证明：如果一个整数的各位数字之和能被 9 整除，那么这个数必定能被 9 整除。

分析：利用二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

和整数的表示方法，建立整数与其中的各位数字和的联系，然后利用整除的性质判定该整除问题。

证明：设 $N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$，而且 $9\mid a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$。

由二项式定理可知

$$\begin{aligned}N&=a_n\cdot(9+1)^n+a_{n-1}\cdot(9+1)^{n-1}+\cdots+a_1\cdot(9+1)+a_0\\&=a_n\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k 9^{n-k}+a_{n-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k 9^{n-k-1}\\&\quad+\cdots+a_1\cdot(9+1)+a_0\\&=(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)+a_n\cdot 9\cdot A_n+a_{n-1}\cdot 9\cdot A_{n-1}\\&\quad+\cdots+a_1\cdot 9,\end{aligned}$$

其中A_n，A_{n-1}，…均是整数。显见$9\mid N$。

例 2 设自然数 $\overline{62\alpha\beta427}$ 为99的倍数，试求α，β。

分析：条件给出的是自然数$\overline{62\alpha\beta427}$能被99整除。要求出 α，β，根据方程思想方法，必须根据这一整除性得出仅含有α，β的二个方程即可。

解：由 $99\mid\overline{62\alpha\beta427}$，得

$$9\mid\overline{62\alpha\beta427},\ 11\mid\overline{62\alpha\beta427}.$$

当 $9 \mid \overline{62\alpha\beta427}$ 时，根据整除判定方法，有

$$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9m\text{（}m\text{为自然数），}$$

即 $\alpha+\beta+3=9m_1$（m_1为自然数）。

由于$0\leqslant\alpha\leqslant9$，$0\leqslant\beta\leqslant9$，则有

$$3\leqslant\alpha+\beta+3\leqslant21,$$

从而 $\alpha+\beta=6$ 或 $\alpha+\beta=15$ ①

当 $11 \mid \overline{62\alpha\beta427}$ 时，同理可得

$\alpha-\beta=-2$ 或 $\alpha-\beta=9$ ②

结合①和②，由于$0\leqslant\alpha\leqslant9$，$0\leqslant\beta\leqslant9$，故只有

$$\alpha=2,\ \beta=4.$$

例 3 试证任意一个整数与它的各位数字和的差必能被 9 整除，并且它与它的各位数字作任意调整后所组成的整数的差也能被 9 整除。

证明：设$N=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0$。

由例 1 结果知道

$$N-(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)$$
$$=a_n\cdot9\cdot A_n+a_{n-1}\cdot9\cdot A_{n-1}+\cdots+a_1\cdot9,$$

其中A_n，A_{n-1}，…均是整数，于是

$$9 \mid N-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0).$$

即任一整数与其数字之和的差可被 9 整除。

再将a_0，a_1，…，a_n按任一种顺序排成整数$N'=\overline{a_0'a_1'\cdots a_n'}$。

令 $\delta=a_0+a_1+\cdots+a_n$，$\delta'=a_0'+a_1'+\cdots+a_n'$，则 $\delta=\delta'$。

由上述结果知：

$$9 \mid (N-\delta),\ 9 \mid (N'-\delta').$$

因$N-N'=(N-\delta)-(N'-\delta')$，所以$9 \mid (N-N')$。

奇偶分析法是解整数问题常用的方法。其实质就是将整数分类讨论，以实现问题的解答。

例 4 证明不存在整数m和n，使$m^2=n^2+1986$。

证明：（用反证法）设存在整数m和n，使

$$m^2=n^2+1986$$

成立，则有 $(m+n)(m-n)=1986$。

如果m和n同为奇数或同为偶数，则有$m+n$和$m-n$皆为偶数，于是 $4\mid(m+n)(m-n)$，

即 $4\mid 1986$。但 $4\nmid 1986$，矛盾！

如果m和n中有一个是奇数，另一个是偶数，则$m+n$和$m-n$均是奇数，它们的乘积$(m+n)(m-n)$必是奇数，而1986是偶数。矛盾！

所以不存在整数m和n，使$m^2=n^2+1986$。

例 5 如果直角三角形的三条边均是整数，则两条直角边长不可能都是奇数。

证明：（用反证法）设两直角边均是奇数，则一条直角边为$2p+1$，另一直角边为$2q+1$（其中p，q均为整数）。

由勾股定理，得

$$(2p+1)^2+(2q+1)^2=\text{斜边}^2$$

即
$$4\cdot(p^2+q^2+p+q)+2=\text{斜边}^2.$$

注意$4\nmid 4(p^2+q^2+p+q)+2$，而偶数的平方一定能被4整除，因此斜边不会是偶数。又奇数的平方还是奇数，从而斜边也不会是奇数，矛盾！所以两直角边不可能都是奇数。

例 6 奇数个整数的任意两个排列的对应项差的乘积一定是偶数。

分析：设a_1，a_2，a_3，…，a_{2k+1}和b_1，b_2，b_3，…，b_{2k+1}是已给的奇数个整数的任意两个排列。要证对应项差乘积为偶数，只要证至少有一对应项差为偶数即可。注意到

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2k+1}=b_1+b_2+\cdots+b_{2k+1}.$$

只要将此等式与对应项之差联系起来，问题就可能获得解决。

证明：设a_1，a_2，a_3，…，a_{2k+1}和b_1，b_2，b_3，…，b_{2k+1}是