

中央人民政府高等教育部推薦  
高等學校教材試用本

# 學力材料

上 冊 第二分冊

Н. М. БЕЛЯЕВ 著 王光遠等譯

中央人民政府高等教育部推薦  
高等學校教材試用本



# 材 料 力 學

上 冊 第二分冊

H. M. 別遼耶夫著 王光遠等譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 ( Государственное издательство технико-теоретической литературы ) 出版的別遼耶夫 ( Н. М. Беляев ) 著“材料力學”( Сопротивление материалов ) 1951 年第七版修正增訂本譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

本書分上下兩冊出版。

參加本書翻譯和互校工作的為哈爾濱工業大學王光遠(第一篇)、張守鑫(第二篇)、楊文鵠(第三篇)、干光瑜(第四篇)、顧震隆(第五篇)、和黎紹敏(第六篇)。

## 材 料 力 學

上 冊 第 二 分 冊

王 光 遠 等 譯

---

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中 國 圖 書 發 行 公 司 發 行

商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷

(64943A2)

---

1953 年 5 月 初 版 版 面 字 數 187,000

印 數 1—21,000 定 價 洋 11,500

## 中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯繫實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

## 第二分冊目錄

### 第四篇 樑的彎曲及其強度的校核

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 第十二章 關於彎曲時強度校核的問題及其解法 .....              | 237 |
| § 69 彎曲變形的概念 樑支座的裝置 .....                | 237 |
| § 70 樑內應力的性質 彎矩和切力 .....                 | 243 |
| § 71 連續荷重 切力和彎矩之間的微分關係 .....             | 249 |
| § 72 彎矩圖及切力圖的作法 .....                    | 251 |
| § 73 Q 圖和 M 圖在荷重情形較複雜時的作法 .....          | 260 |
| § 74 Q 圖和 M 圖作法的正確性之檢驗 .....             | 272 |
| § 75 作圖時力作用之疊加法 .....                    | 275 |
| § 76 作彎矩圖與切力圖的圖解法 .....                  | 276 |
| 第十三章 彎曲時垂直應力的計算及樑強度的校核 .....             | 282 |
| § 77 純彎曲時材料工作情況之實驗研究 .....               | 282 |
| § 78 彎曲時垂直應力之計算 虎克定律與在彎曲時之位能 .....       | 285 |
| § 79 已得之結果對於校核樑的強度之應用 .....              | 293 |
| 第十四章 平面圖形的慣性矩之計算 .....                   | 296 |
| § 80 對於簡單斷面的慣性矩和斷面係數之計算 .....            | 296 |
| § 81 計算複雜斷面的慣性矩的普遍方法 .....               | 302 |
| § 82 對諸平行軸的慣性矩之間的關係 如果這些平行軸中之一是重心軸 ..... | 304 |
| § 83 在軸旋轉時慣性矩間的關係 .....                  | 306 |
| § 84 主慣性軸和主慣性矩 .....                     | 309 |
| § 85 中心慣性矩的最大值與最小值 .....                 | 314 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| § 86 計算垂直應力的公式在非對稱斷面情況下的推廣 ..... | 315 |
| § 87 慣性橢圓 .....                  | 316 |
| § 88 計算面積的慣性矩之近似法 .....          | 318 |
| § 89 非對稱斷面樑的計算之例題 .....          | 321 |
| § 90 例題 .....                    | 325 |

## 第五篇 彎曲時強度的總校核

### 第十五章 樑內切應力和主應力的計算 .....

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 91 長方形斷面樑內的切應力(儒拉夫斯基公式) ..... | 331 |
| § 92 工字形樑的切應力 .....             | 338 |
| § 93 圓斷面樑及空心樑內的切應力 .....        | 341 |
| § 94 按照主應力校核強度 .....            | 343 |
| § 95 主應力之方向 .....               | 349 |
| § 96 彎曲中心 .....                 | 353 |
| § 97 按照許可荷重選擇斷面 .....           | 358 |

### 第十六章 組合樑的計算 .....

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| § 98 鉚接樑的斷面選擇 .....       | 364 |
| § 99 按照垂直應力校核樑的強度 .....   | 358 |
| § 100 按照切應力校核樑的強度 .....   | 373 |
| § 101 按照主應力校核樑的強度 .....   | 374 |
| § 102 樑內的鉚釘計算 .....       | 375 |
| § 103 鉚接樑的斷面選擇及強度校核 ..... | 378 |
| § 104 木組合樑的計算 .....       | 381 |

### 第十七章 鋼筋混凝土樑的計算 .....

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| § 105 按照實用應力計算鋼筋混凝土樑 ..... | 384 |
|----------------------------|-----|

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 106 按照許可荷重計算鋼筋混凝土樑 | 387 |
| § 107 彎曲理論的發展        | 389 |

## 第六篇 彎曲時樑變形的求法

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 第十八章 求變形的解析法                 | 391 |
| § 108 撓度與樑斷面的旋轉              | 391 |
| § 109 撓曲軸的微分方程式              | 393 |
| § 110 一端固定的樑的撓曲軸微分方程式的積分     | 395 |
| § 111 雙支樑撓曲軸微分方程式的積分         | 400 |
| § 112 在兩段內對樑撓曲軸微分方程式的積分      | 403 |
| § 113 在幾段內樑撓曲軸微分方程式之組成和積分的方法 | 409 |
| § 114 具有中間鉸的樑的微分方程式的積分       | 414 |
| § 115 力作用的疊加法                | 417 |
| § 116 彎曲時的微分關係               | 419 |
| 第十九章 彎曲時計算變形的圖解解析法和圖解法       | 421 |
| § 117 圖解解析法                  | 421 |
| § 118 圖解解析法求變形的例題            | 424 |
| § 119 當彎矩圖為曲線形狀時的圖解解析法       | 428 |
| § 120 繪製樑撓曲軸的圖算法             | 431 |
| 第二十章 變斷面樑                    | 436 |
| § 121 等強度樑的斷面選擇              | 436 |
| § 122 等強度樑的實例                | 436 |
| § 123 變斷面樑變形的求法              | 443 |

## 第四篇 樑的彎曲及其強度的校核

### 第十二章 關於彎曲時強度校核的問題及其解法

#### § 69 彎曲變形的概念 樑支座的裝置

一根直軸的等直桿，當在經過它的直軸的平面上受着力偶或垂直於軸的力作用時，這桿就將發生彎曲變形。

用來抵抗彎曲的桿，一般稱為樑。從實驗裏可以看出，當樑受上面所說的這些力作用時，它的軸就會彎曲，同時樑本身也就發生彎曲。在圖 143 中所表示的就是說明一組作用在樑的對稱面上的力系使長方形斷面之樑彎曲的一個例子。如果力所作用的平面不是對稱面時，則在彎曲的同時還可以看到桿件的扭轉。

樑是建築物或機器裏用得最多的一種構件，這些構件一方面接受結構物中其他構件加在這一樑上的壓力（如圖 143 中的  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  諸力），而另一方面再把這些壓力傳到支持它的部份上去（如圖 143 中的  $P_4$  和  $P_5$  二力）。

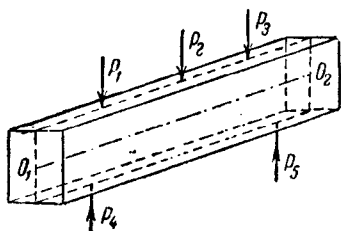


圖 143

這樣，在樑上就作用着作用上去的外力和支座的反力。要解決材料抵抗能力的問題，就必須要知道這些力。

如果能够知道結構物中那些部份和樑相連接時，那麼也就可以計算所作用的外力。這些荷重的種類不外乎下面幾種：集中力  $P$  (т, kg),

力偶  $M(\text{tm}, \text{kgm})$  以及沿着樑的長度所作用的平均和不平均分佈的荷重。

均佈荷重是以它的單位密度  $q$  來計量的，也就是說在樑的單位長度上所有的荷重的數值。它的表示法是  $\text{T/m}$  和  $\text{kg/m}$ 。

不平均分佈的荷重密度在樑上各處是不同的，它的表示法是用  $q(x)$ 。在這一情形裏， $q(x)$  就等於作用在樑的單位長度上的荷重在該點上面的數值<sup>①</sup>。換句話說， $q(x)$  就是等於分佈在該點的長度  $dx$  上的荷重數與這一長度之比的極限。

在圖 144 a、б、в 中所繪的是幾種樑的例子。其中第一個圖是表示擱置樓板的樑，在它上面分佈着  $q=200 \text{ kg/m}$  的荷重；第二個圖是水閘的一根豎樑，在它上面受着三角形的荷重（水的壓力），這一荷重的密度是從 0 變到  $q_0=1200 \text{ kg/m}$  的  $q(x)$ ；第三個圖則是一根受機車車輪壓力作用的鐵橋的主樑。

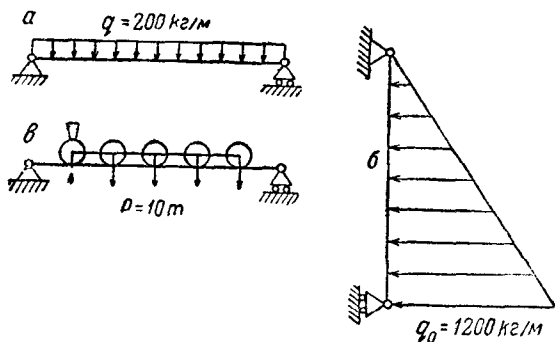


圖 144

車箱的輪軸就是等於一根擱在車輪上面的樑，並在它的上面受車箱的壓力；飛機機翼裏的幹樑，它們受空氣的壓力而發生彎曲。

①  $q(x)$  這一記號在這一情形裏就是表示荷重的強度是  $x$  的函數。

我們暫時只研究屬於下面二種範圍內的樑：

- 1) 樑的斷面至少有一對稱軸(圖145)；
- 2) 所有的外力都作用在樑的這一對稱平面上。

用來平衡樑上荷重的支反力也將作用在這一平面上。

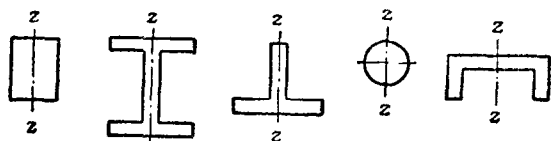


圖 145

要計算支反力，首先就必須要分析一下樑支座的安裝。這些支座通常總屬於下面的一種：

- a) 固定鉸鏈支座；
- б) 可動鉸鏈支座；
- в) 固定端。

**固定鉸鏈支座的圖示法**表示在圖 146 中的  $A$  點。這種支座能夠允許樑的支座斷面可以繞着裝置在該斷面重心  $A$  處的鉸隨意旋轉，不過不能使該端有移動。這一支座的抵抗力是用反力來表示的，它由支座經過鉸傳到樑端上去並作用於外力所作用之平面內。

我們僅僅已經知道這一反力的着力點——鉸——就是一個樑和該支座發生接觸的唯一的點，但是還沒有知道反力之值和方向如何。因之，爲了這樣，我們將常用這一反力的二個分力來代替它。一個分反力是  $H_A$ ，它的方向是順樑軸的，另一個是  $A$ ，它的方向是和軸垂直的。從這樣的觀點來看，固定鉸座按照反力的個數，可以說它具有二個未知數 ( $A$  和  $H_A$ )。

可動鉸座允許與旋轉同時還可以在相應的方向上有自由的移動

(圖 146, 點  $B$ )。如此, 所研究的支座僅僅只阻止垂直於一固定方向的移動。



圖 146

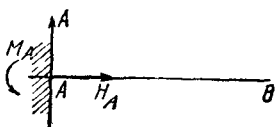


圖 147

根據這樣的情形, 這種支座的反力是經過鉸的中心向垂直於支座移動線——通常是樑的軸——的方向進行的。所以可動鉸座僅具有一個未知反力  $B$ 。

最後, 在樑的固定端上, 這種支座不允許這一頂端在力作用的平面上有絲毫的移動。這種支座只要消去固定鉸座裏的鉸的作用就能得到(圖147)。

消去鉸的作用以後, 我們就得用一新的能阻止樑端斷面旋轉的反力來阻止這一旋轉, 這樣的反力只有力偶才可能。所以樑的固定端具有三個未知反力: 平行於樑軸的分力  $H_A$ , 垂直於軸的分力  $A$  以及反力矩  $M_A$ 。

樑也可以擺置在上面所說這幾種類型的一組支座上。如在圖 147 上所繪的是一端固定的樑; 在圖 146 上是一端為固定鉸座而另一端為可動鉸座的樑; 圖 148, a 上也是這種樑, 不過在中間還有一個可動鉸座; 在圖 148, b 上所繪的樑是一端固定和在這樑的中間某一斷面下有一可動鉸座的樑。

所有這些在圖上所表示的支反力, 由於支座部份構造的關係, 所以當在樑上有荷重(在這些圖上並沒有繪出來)作用時, 反力就會發生。

對於未知反力的求法, 我們首先可以利用靜力學裏的方程式, 就是樑在所有外力和反力的作用下, 它完全處在平衡的狀態中。因為所

有這些力都在同一個平面上，所以對於它們，我們可以寫出三個平衡方程式。如此，求反力的這個問題，在當未知反力只有三個時，在靜力學的條件下就已經解決了。

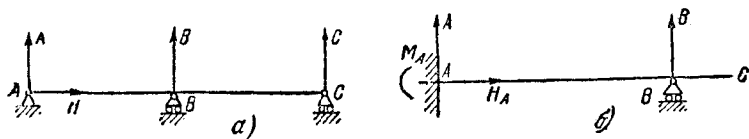


圖 148

這樣，梁的支座具有三個反力者（圖146—147），就是靜定梁。屬於靜定梁這一類的還有帶梁間鉸的多跨梁（多支座的）；這種梁可以分成爲基本靜定梁（A—1 和 2—3）和用鉸連接在基本靜定梁上的懸梁（圖149）。

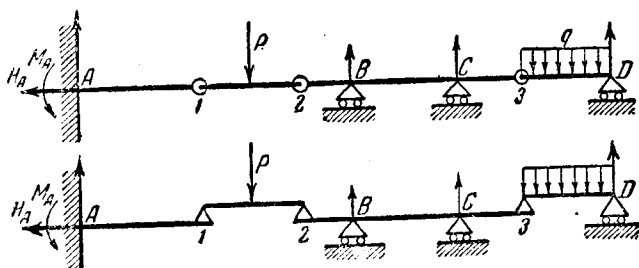


圖 149

其他的梁是屬於靜不定梁這一類的，至於如何計算它們的這個問題，將另外用專門的幾章來說明。

梁支座的安裝在實際上遠不像在圖146和147所表示的那樣。所以在着手進行梁的計算時，首先必須要觀察一下這些支座的安裝到底是如何設計的，以及它們是屬於圖146和147中所表示的那一種形式。

因爲梁的變位通常都是非常小，而且應力也總在彈性極限以內，所以我們必須確定一下能不能讓支座的裝置有一點縱然是很小的轉動或

移動呢；我想從這一點就儘够來決定樑的支座還是可動的或是固定的了。譬如，如果把一金屬的或木料的樑的頂端稍微插一段到磚牆裏面去，則我們完全可以當作這一頂端能够有些微的轉動，而因此在計算時也就可以把它當作爲可動的。

如此，在開始計算樑的支反力時，必須先用最接近於實際構造的簡化圖來代替支座的真實情況（圖 146 和 147）。

試分析一下車軸的動作作爲一個例子（圖 150a）在軸上  $A$ 、 $B$  二點是承受從車箱傳下來的壓力  $P$ ；而在點  $C$ 、 $D$  處則

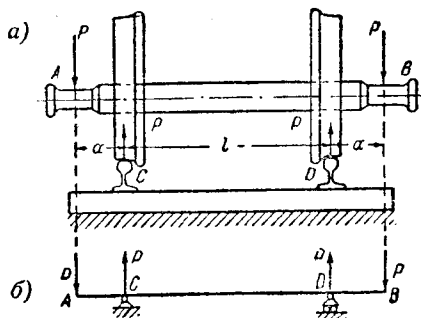


圖 150

再把這一壓力傳到鋼軌上去。我們可以把這一車軸當作樑來看（圖 150b），在它上面的  $A$ 、 $B$  二點負載力  $P$  以及在  $C$ 、 $D$  二點處有二個支座。現在試問像這樣的支座是屬於那一種類型圖？

必須說明一下這些支座的安裝對於那一種動作是妨礙的而對於那一種是允許的。若不計車輪和鋼軌之間在橫方向的摩擦力以及仍保留車輪的凸緣後，我們可以說這些支座是：

- 1) 阻止點  $C$  和  $D$  在豎直方向的移動；
- 2) 阻止整個車軸在水平方向的移動；
- 3) 允許這二個點能有相對的接近或離開；
- 4) 允許軸的支座斷面能有旋轉。

這幾個條件只要把二點  $C$  和  $D$  中的一點定作固定鉸座以及另一點定作可動鉸座後就可以滿足，像在圖 150b 上所繪的那樣。

對於靜定樑的支反力的求法，我們可以利用三個平衡方程式。同

時可以把樑軸當作爲  $x$  軸，把支座鉸的任何一個作爲座標的原點以及再使  $y$  軸的方向向上就可以了。

爲了求支座反力的水平反力，可以先寫一個所有的力在  $x$  軸上的投影總和等於零的方程式。

其次在寫出二個所有的力對於樑上任何二點（一般取二個支座斷面的重心）的力矩總和等於零的方程式後，我們就可以求出豎直分力和支反力矩。至於所有的力在  $y$  軸上的投影總和等於零這一恆等條件，最好把它用來校核計算是否正確；在把所求出的支反力的值代到這一恆等式裏以後，它就應該成爲恆等。

對於有中間鉸的樑，我們先可以將懸樑的平衡像考慮雙支樑的平衡一樣來考慮，並求出它的反力。這些反力平衡着由懸樑經過鉸傳到基樑上去的壓力。當知道這些壓力以後，也就可以求基樑的反力了（參閱 § 73）。

### § 70 樑內應力的性質 彎矩和剪力

計算簡圖的選擇和支反力的計算是着手計算樑時的第一步工作——求出作用在樑上的外力。

現在我們可以來求樑內斷面上的應力；在求解關於彎曲的問題時將用下面的步驟。爲了用實例說明起見，試取一兩端用鉸相連並在上面負載力  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  的樑（圖 151）。在這一荷重力系裏，反力  $H_A$  等於零，反力  $A$  和  $B$  也可以從力矩方程式裏求得；這樣，外力就能夠知道。

在計算應力時必須先找出樑上發生最大應力的危險斷面。爲

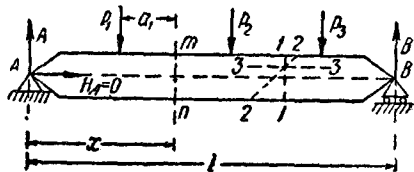


圖 151

了這樣，我們就應該先得出一個能計算樑上任何斷面（如斜斷面2-2）上的應力的公式；然後才可以求危險斷面和最大應力。

我們先來計算垂直於樑軸之斷面上的應力；然後求平行於該軸的斷面上的應力，而如此也就可以求任意斷面上的應力了。試取一垂直於軸的斷面  $mn$ ，它的重心是  $O$ ，位置是在離左支座距離  $x$  處。要計算這一斷面上的應力，我們可以除去樑的一部份而用未知應力來代替它對於另一部份的作用。爲了使計算簡單一些，可以留下受外力作用較少的一部份，如在這一例題裏就是左面的一部份。

在所留下的一段樑上（圖 152），斷面  $mn$  的每一點上均將有應力作用着，這些應力可以用分力來表示：垂直應力  $\sigma$  和切應力  $\tau$ 。這些應力將平衡作用在這一段樑上的外力  $A$  和  $P_1$ 。外力和應力在空間共同組成一力系，對於這一力系可以寫六個平衡方程式。

要想從這些方程式來求應力  $\sigma$  和  $\tau$ ，則我們應該再立幾個對於每一斷面（在  $x$  變動時）的平衡方程式，因爲所作用在這一段樑上的外力不一定是相同的。例如在力  $P_2$  和  $P_3$

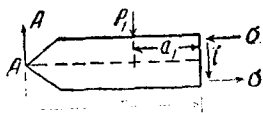


圖 152

之間的斷面上，對於左面的一部份來說，所作用的力並不是二個而是三個了。

要得到能適用於任何  $x$  值的  $\sigma$  和  $\tau$  的普遍公式，則最好能使外力系永遠成同一的形式，即標準式的外力。

因爲這一力系是作用在一個平面上的諸力所組成的，所以常常可以用作用在某一點（作用中心）上的力，和力偶來代替；在特別情形裏力可以成爲零。這樣的情形就儘够簡單同時也儘够算爲是單一的形式了。常常可以將外力系組成爲這樣的形式。

普通常把所研究的斷面的重心當作作用中心。如此可以使得計算

$\sigma$  和  $\tau$  的公式大為簡單(我們隨後就可以看到)。

在所研究的樑的左部上，若把各力都移向  $O$  點後，我們就可以用相等的標準力系來代替  $A$  和

$P_1$  (圖 153)。在這點上引二個  $A$  力，一個向上，一個向下。於是由反力  $A$  和這二力所組成的力系就成為一個作用在  $O$  點的集中力(在圖

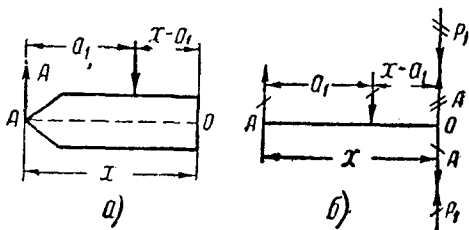


圖 153

153b 中有二短線者)和一個由  $A$  力與力矩臂  $x$  所組成的力偶了(有一短線者)。這一力偶的力矩等於  $A \cdot x$ 。同樣的情形，力  $P_1$  也可以如此變更。

把所有移在  $O$  點上的有二短線的力和所有由一短線所組成的力偶加在一起。在相加時力的方向向上者和力矩為順時針方向者都作為正。

相加後的結果，我們就得到一個代替原有二力  $A$  與  $P_1$  的作用在斷面中心處的力  $Q$  和一個力矩為  $M$  的力偶； $M$  和  $Q$  的數值可由下面二式求得：

$$M = Ax - P_1(x - a_1),$$

$$Q = A - P_1.$$

作用在樑的留下部份上的力偶的力矩叫作這一斷面上的彎矩；也可以把彎矩作為是一個力系的力矩，這一力系的力是代替樑的除掉部份在該斷面上對於留下部分的作用力。

彎矩  $M$  等於所有作用於所研究的一段樑上的外力對於所截斷面的重心的力矩和。而欲把樑的留下部份從除去的那部份裏切去的力  $Q$  就叫做這一斷面上的切力。

切力也可以把它當作代替除去的一段樑對留下的一段樑的諸作用力的合力在這一斷面上的投影來看。

切力等於所有作用在留下的一段樑上的外力在樑軸的垂線上的投影之和。這樣， $M$ 和 $Q$ 就同時代替了作用在所研究的一段樑上的外力系和平衡了由除去的一段樑經過所截的斷面所傳來的內力。

我們可以看到，如果在樑上所作用的僅僅是垂直於樑軸的力時，則可以說切力就是等於作用在留下的一段樑上的力的代數和。特別須注意的是 $M$ 和 $Q$ ，因為它們就是代替 $A$ 和 $P_1$ 這一力系的標準力系，所以在求它們時，應一起來求。這些求法就解決了如何依據外力來計算 $M$ 和 $Q$ 這一問題。

上面所舉的例題裏，在計算 $M$ 和 $Q$ 時，我們所研究的是樑的左部份，不過在許多情形裏，還是研究右面的部份而除去左面的部份比較方便。現在來確定對於樑的左部或右部的 $M$ 和 $Q$ 的數值之間的關係。

試看圖 154 在斷面  $mn$  的左面作用着一外力系  $A$ 、 $P_1$ ；在右面是另一外力系  $P_2$ 、 $P_3$  和  $B$ 。

因為整個樑是完全處在平衡狀態中的(圖154)，所以  $A$  和  $P_1$  的力系應該和  $P_2$ 、 $P_3$ 、 $B$

的力系平衡。前面的力系用作用在  $O$  點的方向向上的力  $Q$  和按順時針方向旋轉的力偶  $M$  來代替，所以若把  $P_2$ 、 $P_3$  和  $B$  的力系移到斷面的重心上後，也同樣應該用作

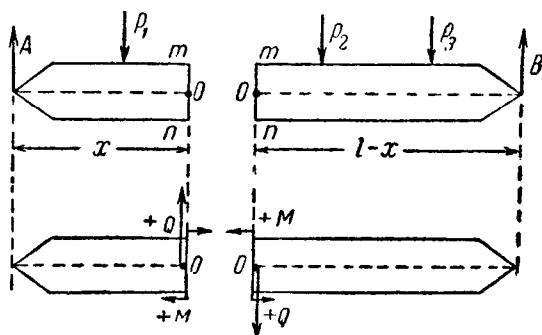


圖 154