高等学校教学用書

初等代数專門教程

上 册

C. И. 諾窪塞洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

初等代数專門教程

上册

С. И. 諾窪塞洛夫著
赵慈庚等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联“苏維埃科学”出版社（Советская Наука）出版的諾誑塞洛夫（С. И. Новоселов）著“初等代数專門教程”（Специальныи курс элементатрной алгебры,）1954 年第三版譯出的。原書經苏联文化部高等教育署审定为师范学院教科書。

本書由北京师范大学数学系赵慈庚、董延闓、蔣鐸，严士健、郝鈵新、孙永生、袁兆鼎譯为中文。此書可以作为我国师范学院数学系初等代数复習及研究的課本或参考書，对于中学数学教师也是很好的参考書。

初等代数專門教程

上　册

С. И. 諾誑塞洛夫著

赵慈庚等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第〇五四号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

書号13010·176 開本 850×1168 1/32 印張 7 18/16 字數 212,000

一九五六年十月北京第一版

一九五六年十月北京第一次印刷

印數 00001—23,000　　定價（8）¥ 0.90

序

这本書打算作为师范学院物理数学系初等数学專門教程中“代数”一科的教科書。書中包括該科教学大綱所規定的一切題材。

师范学院学生在初等数学（作为專門科目之一）上应下的工夫，并不限于学習教学大綱所規定的“專門教程”。数学教学法与教育实習的融匯貫通以及專題討論的課業，若非深入地研究初等数学便無意义。这是显而易見的，因为未来的教师必須完好地了解在师范学院畢業后他所教的那些科目。

所說的這些情况，决定了本書的結構，除了数論已由教学大綱列入“算术”一科，而应該在这一科的教科書中講授外，凡是中学代数各章节的一切概念都要在这里作一系統的講述。

师范学院設置初等数学一科的时候，可能發生兩种同样是不許可的極端。

第一种極端在于使初等数学脫离中学的需要。如此势必在“初等”数学里（按簡略的方式）講述一些要在“高等”数学里学習的东西，例如把“高等”数学里因为某种緣故未曾列入相应課程的許多問題拿来归初等数学負担，或是將初等数学改为毫無系統的文集，只搜集某些精致“数学短文”与“精巧”的問題。

第二种極端在于重述中学数学課程，而科学思想水准比中学高得有限。

著者在本書里竭力避免上述的兩种極端。

于是我們認为以下各点对于师范專業初等代数教程是必要的。

1. 初等代数里有許多重要的理論問題，在中学課程里不能作相当完备而且严格的解释，在高等数学里又認为它們是已知的；对于这样的問題，本教程必須給出科学的論証。

例如方程及方程組(或不等式)的等价性的一般理論，便屬这种問題之列。

2. 对于初等数学里广泛运用的許多方法，必須加以論証。

例如，高等代数里講了綫性方程組的一般研究方法，并且对于它們的解建立了一般的公式（所有這些，未来的教师当然应該知道），但是在实踐当中(也不只在中学)，具体的綫性方程組的解与討論，常常能用中学里所用的"初等"方法很簡單地作出。显然這些方法的科学根据是教师应該知道的。

3. 初等代数必須訓練学生能够直接根据所論对象的定义和它的已知性質用"直接方法"(在这里無疑是适当的)完成数学論証的本領。

我們十分怀疑，沒有这种本領而能够順利地运用近代的科学方法。例如微分法的定理与公式，对于"不懂得"函数 x^2 的最小値，或是对于建立簡單不等式的必要也無知的人未必有用。

尤其在培养直接討論函数的技能上，初等数学有着很大的用处。

4. 初等代数專門教程应該养成做恒等变換的切实技能。

以为恒等变形是"缺少理論性的"这一种輕視的态度应該受到严格的批判。养成切实的数学技能是中学数学教学任务之一。关于获得应有技能的必要性，在联共(布)中央关于中学的历史性的決議中已經說过。事实上，認为一个人只要"了解概念"而实际技能是無关紧要的这种說法，至少也是輕率的。由此看来，中学教师显然必須在做恒等变換上掌握一定的技巧。

5. 师范專業初等代数教程也不应該規避中学实踐中的个别

重要（按教学观点或其他理由来說）問題。我們指的是这样的問題，例如文字問題解法，方程各种特殊解法的討論，問題的合理解法等等。

所說的这一切情形，只有通过初等代数各基本章节的系統講解才能令人滿意。但是本書材料的排列系統与中学的不同。这个教本也要照顧到学过中学数学課程的人。师范学院的学生已經学过許多重要的数学科目，并且已經有了足够的数学水平，一定可以用更高的观点来处理初等数学的問題。所說的這些情况，可以使我們在專門教程里，用系統的叙述，面面周到地处理每項題材，并且可以不用中学代数課本因学生年龄特征而不能避免的圓周式教学法。我們必須竭力使初等数学“專門教程”的科学內容与教学大綱对“高等”数学所要求的高等水准相協調，而对于高等数学的要求在訓練教师工作中的作用也是不可忽視的。

在指导这本教科書的現行中学教学大綱里，关于在中学里灌輸近代科学概念这一方面蘊含着很大的可能性。为了进一步提高数学教育的科学水平，需要把教程中在近代科学观点下起着指导作用的主要章节提到首要地位。半世紀以前提出的根本修改中学教学大綱的要求，例如沒有足够的基础而插入微积分，或是后来又以“函数过多”为理由提議“取消”三角的独立設科等等，由近代观点来看是不自然的并且已經成为腐調了。極端可慮的是所有這些譾陋的外来思想現在还可以进一步地引誘那些已經摆脫前世紀末叶的观点影响的、有思想性的数学教育者。初等数学“專門教程”的学習定能帮助教师在他日常工作中按照沒有偏差的自然途徑提高数学教育的科学思想水平。

在本教程里自始至終引入大量的經过解答的例題与問題。問題，例題与解法在書里都用小字印刷，以便与理論教材相区别。

当学習初等数学的时候，不能只限于学習理論，而获得解决例

題与問題的切实技能也是完全必要的。所以用小字印刷的例題絲毫不能看作不必要的材料。从未来教师的需要着想，著者竭力在这本書里介紹初等代数的各种基本練習題，例外的只有以下这样的問題：例如“組合”的問題，不算不有名的“二項式定理”与級数的問題。过分夸大这类問題的意义，已經屡次受到来自进步教学思想方面的批判。同时著者也不陷入相反的極端，例如：不亞于荒謬的提議：要从中学教学大綱中根本删去組合与牛頓二項公式。

莫斯科省师范学院代数教研組所完成的大部分工作，例如对本書原稿詳細的审查和認真的評論等，我認为是有必要提出的。

我怀着深深感謝的心情追忆我的已故業师H. H. 魯金院士，他热情地参加了本書大綱的拟定，并且他的意見也給了我無法估計的帮助。

趁此机会我对 И. К. 安德洛諾夫，Б. В. 庫圖佐夫，П. А. 拉利切夫，П. С. 莫杰諾夫諸教师深表謝意，他們的批評意見和友誼的忠告对完成本書給了我很大帮助和支持。我还要感謝 Н. А. 麦杰里雅諾夫斯基，他典范地完成了插圖工作。

С. И. 諾窪塞洛夫

1953 年 12 月 25 日于莫斯科。

目 錄

序 …… v

緒論 …… 1

§ 1 初等代数教程的內容 …… 1

§ 2 环和体的概念 …… 2

§ 3. 在初等代数內所研究的基本数集 …… 5

§ 4 有序数体 …… 8

§ 5 函数的基本概念 …… 11

第一章 多項式 …… 17

§ 6. 解析式的概念 …… 17

§ 7. 恒等变形的概念 …… 20

§ 8. 多項式 …… 22

§ 9. 多項式的标准形狀 …… 25

§ 10. 多項式諸項的各种排列方法 …… 30

§ 11. 关于多項式恒等于零的定理 …… 33

§ 12. 关于多項式恒等的定理 …… 35

§ 13. 多項式标准形狀的唯一性。多項式的运算 …… 37

§ 14. 关于多項式乘积的定理 …… 41

§ 15. 簡略乘法公式 …… 44

§ 16. 多項式恒等变形举例 …… 48

§ 17. 对称多項式 …… 53

§ 18. 未定系数法 …… 55

§ 19. 条件等式 …… 58

§ 20. 多項式的可除性 …… 59

§ 21. 帶余式的除法 …… 62

§ 22. 用 $x-a$ 除 …… 67

§ 23. 关于多項式的根的定理 …… 70

§ 24. 多項式的因式分解 …… 71

§ 25. 多項式析因子的各种方法 …… 77

§ 26. 关于一个自变数的多項式的基本定理。插值公式 …… 84

§ 27. 依自变数的升幂排列的多項式的帶余式除法 …… 87

第二章 有理函数 ……90
§28. 有理式与有理函数……90
§29. 代数分式……91
§30. 代数分式的恒等……92
§31. 代数分式的化简……96
§32. 有理函数体……100
§33. 有理式的恒等变形……105
§34. 有理式的恒等变形举例……106
第三章 根式与無理函数 ……113
§35. 实数体上的根式……113
§36. 含有根式的表达式的变换……121
§37. 数的开方……134
§38. 幂概念的推广……138
§39. 有理指数的幂函数……142
§40. 实数体上的代数显函数……148
§41. 复变数函数 $\sqrt[n]{z}$ ……158
第四章 方程与不等式 ……171
§42. 方程与方程組……171
§43. 方程及方程組的等价性……177
§44. 方程的变形……182
§45. 解方程組的基本方法……191
§46. 在补充条件下解方程……196
§47. 含有参数的方程……198
§48. 解方程的特殊情形，广义解……203
§49. 不等式的基本性質……206
§50. 絕对不等式……208
§51. 几个著名的不等式……208
§52. 用不等式給出的数集与点集……220
§53. 含有絕对値的不等式……226
§54. 不等式的解……228
§55. 混合組……232
§56. 教科書中方程与不等式应用問題的解法与討論……233
§57. 方程的初等圖解法和近似法的概念……237

緒　論

§1. 初等代数教程的內容

近世代数这門科学，是一个数学部門，由許多不同的、正在發展的学科（群論、环論、体論、綫性代数）組成。近世代数的內容，可以用一般的形式說明如下：在任意性質的集的元素上，研究代数运算，是代数的(統一代数各科的)基本任务。这里所謂在所設集 $\mathfrak{M}$ 里定义了的一个运算，可以理解作一种对应，这种对应，使集 $\mathfrak{M}$ 里的任意兩元素 a 和 b（按一定次序来取的）对应于本集里一个完全确定的元素 c。近世代数的研究对象是一些运算和集（任意性質的），這些运算具有某些完全确定的，描述（用公理）得很确切的性質，至于集，則在它們的元素上建立了上述的运算（群、环、体）。关于近世代数的內容，在高等代数里要講一个概观，当然还不是詳尽無遺的概观。

按內容来說，初等代数和代数这門科学（从其固有的意义来看）迥乎不同。初等代数的內容，取决于中学代数課程內容。在中学里，"代数"这个名称，就它的內容来說，要理解作一个复合的教学科目，其中所談的基本知識，不只涉及（固有意义的）代数，而且涉及許多其他数学学科。大家知道，在中学代数里，有各种不同的問題，譬如有数的理論的發展，关于代数式（多項式、有理式、根式等）的理論，关于方程的理論，函数論初步，某些超越函数（指数函数、对数函数）的研究，坐标的知識和它对于研究函数的应用，極限概念（序列的極限），簡單級数求和（特別是等差，等比級数），近似計算初步等等。這些問題之中，有一些眞正是屬于（固有意义

的)代数的(如多項式的理論,恒等变形、代数方程),有一些在其他数学科目里还要發揮。例如極限概念以及簡單超越函数的研究并不屬于代数,而屬于数学分析。中学課程这样龐杂,是在所难免的,因为中学数学要提供必要的一套普通知識和技能,于是便不能局限于某一数学科目的范圍之內。

师范学院初等数学的目的,是深入研究,發揮和論証中学数学所包含的問題以及作为中学数学課程之特征的研究方法。还应該注意的是,有許多重要問題(例如方程和不等式的等价性的一般理論),"高等数学"認为在"初等"数学中已談到了,而不再講它們,但是中学数学課程又不能严格而完备的說明它們。所举的這些理由,說明有必要把初等数学当作一門独立学科来研究,而这門学科从中学数学教师專業訓練的观点来看是極重要的。

初等代数專業教程(在深入的,有科学論据的講解下),除去数的理論和近似計算兩个問題列入算术教程大綱外,包括中学代数的全部問題。

在这一章里,所要指出的是这样一些知識,通常認为它們在其他(在师范学院学習的)学科中已經講过了,而它們又是以后各章中講解初等代数的基础。

§2. 环和体的概念

在初等代数里要討論,在其元素上可进行"算术运算"的各种具体的集。例如,运算可以在数、多項式、代数分式等等上施行。在近代数学里,相应的一般定义和公理叙述如下:

定义　定义了下列兩种运算(演算)的集 $\boldsymbol{R}$ 叫做环:

加法运算:对于任意兩元素 a 和 b,有元素 c 与它們对应,c 叫做 a, b 的和:

$$c=a+b,$$

乘法运算：对于任意两元素 a 和 b，有元素 d 与它們对应，d 叫做 a, b 的积：

$$d=ab.$$

加法与乘法运算，由下列性質刻画出来。

加法公理

1. 結合公理：对于任何三元素 a, b 和 c；必有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

2. 交換公理：对于任何兩元素 a 和 b；必有

$$a+b=b+a.$$

3. 逆运算公理（对于加法）：对于任何兩个元素 a 和 b，存在唯一的元素 x，滿足条件

$$a+x=b.$$

元素 x 称为元素 b 和 a 的差，記作

$$x=b-a.$$

乘法公理

4. 結合公理：对于任意三元素 a, b 和 c；必有

$$(ab)c=a(bc).$$

5. 交換公理：对于任意二元素 a 和 b；必有

$$ab=ba.$$

6. 分配公理：对于任意三个元素 a, b 和 c；必有

$$(a+b)c=ac+bc.$$ ①

定义 若环中至少有一个异于零的元素，并且对于乘法，滿足下列逆运算公理，便称它为体。

① 在近世代数里，也討論非交換环，由以上列举的公理，删去第五，便可以說明非交換环的特征，即是在非交換环里，一般来說，乘积与各因子的次序有关，而对于任兩元素 a, b，等式 $ab=ba$ 未必成立。

7. 对于任意二元素 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，其中 $a\neq 0$，存在唯一的元素 $\boldsymbol{x}$，满足条件：

$$ax=b.$$

元素 x 称为以 a 除 b 的商，記作：$x=\frac{a}{b}$.

在算术里，加法和乘法的公理 1, 2, 4, 5 与 6 叫做基本的运算定律。由這些定律，可以推出任意有限多个元素的运算法則（用和去乘乘积，用和去乘和等等的法則）。①

由环和体的公理可以推出下列命題（証明参看高等代数課程）。

在任何环内存在这个环的唯一的"零"元素，零与环中任何元素 $\boldsymbol{a}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$：

$$a+0=0+a=a.$$

对于环内每一元素 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的元素 $-\boldsymbol{a}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 的負元，满足条件：

$$a+(-a)=0.$$

在任何体内存在这个体的唯一的"單位"元，滿足条件：

$$a\cdot 1=1\cdot a=a,$$

这里 $\boldsymbol{a}$ 是体的任何元素。

对于体内每一元 $a\neq 0$，存在唯一的元素 $\boldsymbol{a}^{-1}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆元，滿足条件：

$$a\cdot a^{-1}=1.$$

要使体内二数的乘积等于零，必要而且只要它的因子中至少有一个等于零。

① 大家知道，当規定和証明任意多个元素的运算法則时，要用完全归納原理，这原理是建立有限集里公共性質的必要工具。

§ 3. 在初等代数內所研究的基本数集

自然数列　在算术里表述自然数列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

特征的公理，在那里用适当的定义建立了自然数集內加法和乘法运算。自然数集不是环(因此也不是体)，因为加法逆运算公理不成立；即是对于任意两自然数 a、b, 不一定存在一数 x, 滿足条件:

$$a+x=b,$$

換句話說，在自然数集里，减法不是总能成立的。

乘法逆运算的公理也不成立。

在初等代数教程内，广泛地应用一种証明方法，即完全归納原理。完全归納原理基于下面的公理（出現于自然数列的其他公理之中):

任何自然数集合 $\mathfrak{M}$, 若具有性質:

1°　1 屬于 $\mathfrak{M}$,

2°　若 n 屬于 $\mathfrak{M}$, 它的鄰繼数便也屬于 $\mathfrak{M}$, 那末 $\mathfrak{M}$ 必与整个自然数集完全一致。

完全归納原理通常按下列方式来使用:

若关于自然数的某种論断，对于数 1 正确(第一条)；且假定該論断对于 n 正确，从而对于 n 的鄰繼数 $n+1$ 也正确(第二条)；那末該論断对于任意自然数都正确。

完全归納原理产生于上边所說的这条公理：所謂集 $\mathfrak{M}$ 应該就是使这論断成立的所有自然数集。当原理的条件滿足时，集 $\mathfrak{M}$ 便和所有自然数的集完全一致，即所給的論断对于任意自然数都正确。

要証明一个命題对于所有自然数都成立，用直接驗証的方法是不可能的。事实上，自然数列是無穷集，我們不能(对于每一数

分别試驗)試驗無穷多次。对于任何自然数都成立的一般命題,可以由完全归納法来証明。

整数环 在所有整数

$$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

的集内能做加法和乘法运算(連同它們原有的性質),并且加法逆运算公理成立,卽二整数的差仍是整数。因此,所有整数的集是环。

整数环不是体,因为乘法逆运算不能施行,卽一个整数不一定能被另一整数整除。

有理数体 所有有理数的集由所有整数和分数構成(正数、負数和零)。每一个有理数 r 总可以写成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式,这里 m 和 n 是整数且 $n \neq 0$(可以認定 n 是正数)。所有有理数的集是体,因为在它里边永远可以施行加法和乘法,以及它們的逆运算:减法和除法(不以零作除数)。

实数体 有理数和無理数合在一起,構成实数集。

每一無尽小数

$$p.q_1 q_2 \cdots q_n \cdots$$

表示一个正实数,这里 p 是非負整数(整数部分)而 $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ 是十进数碼(卽 $q_n = 0, 1, 2, \cdots, 9$)。反之每个正实数可以用無尽十进小数表出。

每个正有理数可以写成有尽或無尽十进循环小数。反之每一有尽或無尽十进循环小数表示一个有理数。用有尽小数表示的任何有理数可以用周期为 0 或 9 的無尽循环小数来表示。例如

$$\frac{1}{5} = 0.2 = 0.2000\cdots = 0.1999\cdots.$$

每个不循环的(無尽)十进小数表示一个無理数。

每个負实数可以用負尾数(卽小数部分)或正尾数的兩种形式

来表示；例如

$$-2.79183\cdots=-2-0.79183\cdots=-3+(1-0.79183\cdots)=$$
$$=-3+0.20816\cdots=\bar{3}.20816\cdots.$$

在所有实数的集里四种算术运算(除了以零为除数外)都能施行，所以一切实数的集是体。

在实数体内，非負数可开方：对于任何非負数 a, 存在唯一的非負数 $x=\sqrt[n]{a}$, 滿足条件

$$x^n=a.$$

复数体　任何复数可以写成

$$a+bi$$

的形式，这里 a 和 b 是实数。

兩个复数 $a+bi$ 和 a_1+b_1i, 当且仅当

$$a=a_1,\quad b=b_1$$

时，才認为它們相等。

若 $b=0$, 則認为复数等于实数 a

$$a+0i=a.$$

如此，实数含于复数集内。若 $b\neq 0$, 則复数称为虛数。若 $a=0$, 則称为純虛数。

在复数集内，四种算术运算(除了以零为除数外)都能施行，即复数集是体。

数 i 称为虛單位，具有下列性質：

$$i^2=-1.$$

复数的运算，可按整数四則去做，但要將 i^2 代以 -1。i 的方冪按下列公式来求：

$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ \cdots,\ i^{4n+k}=i^k$(这里 n 和 k 是整数)。

数 $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的模。若 $z\neq 0$, 則由条件

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

所决定的每一数φ，叫做复数z的輻角。

輻角的任意兩值φ_1和φ_2有下列关系：

$$\varphi_2=\varphi_1+2k\pi(k\text{是整数})。$$

任何复数z还可以写成三角形式：

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

对于数0不能規定某一数作为它的輻角。当$z=0$时，在公式(1)內，应該令$\rho=0$，而可以取任何数作为φ。

§4. 有序数体

有理数体和实数体都是有序体。

這些体中的数，相互之間有一定的位置；表示位置关系的是“等于”，“大于”，“小于”。相互位置的关系具有下列性質：

I. 对于任意兩数a和b，在$a=b$，$a>b$，$a<b$三种关系之中，有且只有一种成立。

II. 不等式的不可逆性：若$a<b$則$b>a$，若$a>b$則$b<a$。

III. 不等式的傳遞性：若$a<b$且$b<c$則$a<c$。

IV. 相等的傳遞性：若$a=b$且$b=c$，則$a=c$。

V. 相等的自反性：$a=a$一定成立。

其他由算术中所知道的，不等和相等的那些性質，都可以由基本关系I—V誘导出来。

算术运算和相互位置之間有下列的关系：

1°. 加法單調性定律：若$a<b$那末$a+c<b+c$。

2°. 乘法單調性定律：若$a<b$，那末当$c>0$时，$ac<bc$；当$c<0$时，$ac>bc$。

大家曉得，凡正数都大于0，而負数都小于0。