大学数学学习丛书

线性代数

复习指导

于淑兰 陈伟 王寄鲁 主编

山东大学出版社
Shandong University Press

大学数学学习丛书

线性代数复习指导

于淑兰　陈伟　王寄鲁　主　编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导/于淑兰,陈伟,王寄鲁主编.
济南:山东大学出版社,2004.8 (2005.1 重印)
(大学数学学习丛书)
ISBN 7-5607-2814-6

Ⅰ.线...
Ⅱ.①于...②陈...③王...
Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.0151.2—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075245 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)
山东省新华书店经销
安丘意中印务有限责任公司印刷
787×980 毫米 1/16 12 印张 228 千字
2004 年 8 月 第 1 版 2005 年 1 月第 2 次印刷
印数:5001—6000 册
定价:18.50 元

内 容 提 要

本书是根据国家教委颁布的《考研数学复习大纲》的要求，结合编者多年教学经验编写而成的。全书内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章分四部分：复习与考试要求、基本概念与理论、基本题型与解题方法、练习题及答案。

本书具有较强的针对性、实用性和指导性。可作为理工科和经济管理专业的学生学习线性代数的复习指导书，也可作为考研辅导书。

序　　言

市场经济的发展，科学技术的进步，计算机科学的影响等都使数学科学显得更加重要。"数学是打开一切自然科学大门的钥匙。"自从有了人类就有了数学，人类需要数数，这就是最初的数学。随着现代化程度的提高和数字化时代的到来，数学的应用也越来越广泛。数学知识是学习其他科学和技术所必须的，特别是高科技成果越来越多地依赖于现代数学方法的应用。数学高度的抽象性和严密的逻辑性对培养学生的综合分析能力及逻辑推理能力具有重要的作用。因此，在高等院校，越来越多的非理工专业开设了数学课程，有些文科院系的学生主动要求选修数学课。特别是计算机科学的发展提出了许多新的数学问题，使数学的应用显得越来越重要。国家的繁荣富强在很大程度上依赖于高新技术的发展和高效率的经济管理，特别高新技术是保持国家繁荣富强的关键因素之一。高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础则是数学。当代高新技术的一个重要特点是定量化分析，而这就必须用到数学。美国科学院院士 J. G. Glimm 称"数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍适用的，并授予人能力的技术"。目前国内外越来越多的公司希望数学家参与他们的工作，工程技术中不断提出新的数学问题需要数学家来解决。数学给予人们的不仅是知识，而且是能力。这就需要我们数学教育工作者不仅要传授给学生一般的数学知识，而且要注重培养学生的数学素养，提高他们分析问题和解决问题的能力。

数学最吸引人的特色是它蕴含着大量有趣的思想、漂亮的图形和巧妙的论证。现实生活中处处潜藏着数学的难题。数学严格的逻辑性和复杂多变的方法使每个学习数学的人必须谨慎严肃地思考问题。一个看起来貌似简单的问题，往往要动用极其复杂的技巧才能解决。因此，大多数人感到数学非常难学，甚至望而生畏。但任何学科、任何事情都有其规律性，只要不畏困难，刻苦钻研，总能掌握其规律性，从而去掌握它、应用它。

由于数学的困难性和广泛的应用性，为了帮助大学学生学好数学，在方法上和思想上为学生学好数学提供有力的工具，我们山东大学威海分校数学系全体教师共同努力，编写了大学数学复习指导丛书：《微积分复习指导》、《线性代数复习指导》和《概率论与数理统计复习指导》。编写这套书的目的是为理工科和经济类专业的学生和自学者提供一套指导学习理论和解题方法的参考书，为报考研究生的有关人员提供一套复习考试的指导书；同时也为有关的数学教师提供

一套教学参考书。参加这套丛书编写的有董莹、王寄鲁、靳明忠、于淑兰、赵华祥、陈伟等人，他们都是具有多年教学经验的教授或副教授。在编写过程中参考了国内外有关的著作，查阅了大量的文献资料。系副主任靳明忠、王寄鲁策划并组织了该套丛书的编写。陈绍著、刘桂真、郭新伟教授主审了该套丛书。数学系的所有教师都对这套书的编写提出了一系列有益的建议并做了大量工作。在这里，我们对山东大学威海分校的领导和有关部门的大力支持表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中的错误和不足之处在所难免，希望广大读者批评指正。

本丛书的出版之时，正值山东大学威海分校校庆20周年纪念日。数学系谨以此丛书作为向校庆的献礼，愿山东大学威海分校兴旺、发达！

刘桂真

2004年7月

目　　录

第一章　行列式

复习与考试要求

1. 理解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

3. 会用克莱姆法则求解线性方程组.

一、基本概念与理论

(一) 行列式的定义

定义 1.1　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,简记为 $D_n=|a_{ij}|$.

(二) 余子式与代数余子式

定义 1.2 在 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原位置次序组成一个 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式按行(列)展开定理

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = \begin{cases} D_n & i = s \\ 0 & i \neq s \end{cases} \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D_n & j = t \\ 0 & j \neq t \end{cases}$$

(三) 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，即 $D_n = D_n^T$.

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

(3) 用数 k 乘行列式某一行(列)，等于用数 k 去乘此行列式.

(4) 行列式某两行(列)元素对应成比例，则行列式的值为零.

(5) 若行列式中某一行(列)的每一个元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和.

(6) 行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应的元素上，行列式的值不变.

(四) 克莱姆法则

设有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解，其解为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将系数行列式D中的第j列元素对应地换为方程组的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$后得到的n阶行列式.

(五) 几种特殊行列式

对角行列式　　上三角行列式　　下三角行列式

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

次对角行列式　　次上三角行列式　　次下三角行列式

2. $$\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n.$$

3. 分块行列式　　设A为m阶方阵,B为n阶方阵,则
$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|A||B|.$$

4. 范德蒙(Vandermonde)行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

5. 三对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & a^2 \neq 4bc, \\ \dfrac{(n+1)a^n}{2^n}, & a^2 = 4bc. \end{cases}$$

其中 α,β 是方程 $x^2-ax+bc=0$ 的两个根.

二、基本题型与解题方法

例 1.1 用行列式的定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 由行列式定义知,D_n 共有 $n!$ 项,每一项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

由于 D_n 中零元素较多,因此 $n!$ 项中仅有一项非零.故

$$D_n = (-1)^{\tau(n-1\ \ n-2\ \ \cdots\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ n)}a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\ 1}a_{n\,n}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!.$$

例 1.2 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$,求 x^3,x^4 的系数及$\dfrac{\mathrm{d}^3f(x)}{\mathrm{d}x^3}$.

解 根据行列式定义,行列式中每一项的元素是取自不同行不同列 4 个元素乘积,即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然含 x^3 的项只能有

$$(-1)^{\tau(2\ \ 1\ \ 3\ \ 4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -2x^3,$$

$$(-1)^{\tau(4\ \ 2\ \ 3\ \ 1)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = -3x^3,$$

于是 $f(x)$ 中含 x^3 的项为 $-2x^3-3x^3=-5x^3$,可见 x^3 的系数为 -5.

含 x^4 的项仅有

$$(-1)^{\tau(1\ 2\ 3\ 4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4.$$

于是 $f(x)$ 中含 x^4 的项为 $10x^4$, 可见 x^4 的系数为 10. 所以

$$\frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3}=240x-30.$$

例 1.3　已知 $D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$, 求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$, 其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式.

解　由已知条件得

$$\begin{cases}1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+2\cdot A_{44}+2\cdot A_{45}=27 & (1.1)\\ 2\cdot A_{41}+2\cdot A_{42}+2\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45}=0 & (1.2)\end{cases}$$

由(1.1) 和(1.2) 两式可解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,$$

$$A_{44}+A_{45}=18.$$

例 1.4　求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\3&4&5&6\\2&2&2&2\\7&9&-2&8\end{vmatrix}$ 的第 2 行各元素的余子式之和.

解法一　(直接用余子式定义计算)

设 D 的第 2 行各元素的余子式分别为 $M_{21},M_{22},M_{23},M_{24}$, 则所求和为

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&0&2\\2&2&2\\9&-2&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&2\\2&2&2\\7&-2&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&2\\7&9&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&2&2\\7&9&-2\end{vmatrix}$$

$$=-64-16+8-40=-112.$$

解法二　(构造行列式)

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\-1&1&-1&1\\2&2&2&2\\7&9&-2&8\end{vmatrix},$$

注意 D_1 与 D 仅仅是第 2 行不同, 故由余子式的定义知 D_1 与 D 的第 2 行对应元

素的余子式相同. 于是将 D_1 按第 2 行展开, 则得

$$D_1 = (-1)(-1)^{2+1}M_{21} + (-1)^{2+2}M_{22} + (-1)(-1)^{2+3}M_{23} + (-1)^{2+4}M_{24}$$
$$= M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24},$$

即行列式 D_1 的值等于所求的和. 现在计算 D_1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 7 & 16 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 16 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 16 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 16 & -12 \end{vmatrix} = -112.$$

故 $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24} = -112$.

例 1.5 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{将第2,3,4,5列都加到第一列上}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a^5$$

$$\xlongequal{\text{将第 2,3,4 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a^5$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \end{vmatrix} - a^5$$

$$\xlongequal{\text{将第 2,3 列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ -a & -1 & 1-a \end{vmatrix} + a^4 - a^5$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1-a & a \end{vmatrix} + a^4 - a^5$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.$$

注:此题采用降阶法.用降阶法计算行列式时,一般先利用行列式的性质,将行列式的某一行(列)化零元素较多后,再按该行(列)展开.

例 1.6　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解法一

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列加到第 1 列然后提出第 1 列的公因式}} [(n-1)a + x] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 1 行乘}(-1)\text{ 分别加到各行上}}[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$\xlongequal{\text{利用上三角行列式展开}}[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}$.

解法二 （参阅第二章例 2.36）

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\left|(x-a)E_n+\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)\right|$$

$$=(x-a)^n\left|E_n+\frac{1}{x-a}\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)\right|$$

$$=(x-a)^n\left|E_1+\frac{1}{x-a}(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}\right|$$

$$=(x-a)^{n-1}(x-a+na).$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{\text{第 } i-1 \text{ 行乘}(-1)\text{ 加到第 } i \text{ 行}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{\text{将各列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{将各列加到第 1 列}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{第 1 列加到各列}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} .$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

$$= \frac{n+1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-1}.$$

注: 例 1.6、例 1.7 利用行列式性质将行列式化为三角行列式，然后运用三角行列式的结论来计算行列式.