恒谦教学与备考研究中心研究成果

全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析 双通道

丛书主编 方可

初三代数

北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果　全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析双通道

初三代数

丛书主编　方　可

本册主编　杨宏军

撰 稿 人　杨宏军　李　艳

任有文

北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果

全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析双通道

教材解析双通道

初三代数

CHUSAN DAISHU

丛书主编　方　可

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

网　址：www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新　华　书　店　经　销

西安信达雅印务有限责任公司印刷

*

880×1230　32开本　7印张　184 000字

2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷

印数：1－10 000

ISBN 7－5303－3465－4

G·3395　定价：10.50元

www.hengqian.com

教材解析

双通道

编写说明

一、教材是学习的重要工具，但教辅图书必不可少

万丈高楼平地起，学习正是如此，没有对教材内容全面、准确、细致、深刻的领会，中考、高考无从谈起。教材是以知识为载体，按照一定的学科系统、认知规律来编排的，限于篇幅，囿于各地情况的不同，对于一些规律和方法不可能做到详尽阐述，仅仅是以知识内容的直接运用为主，远远不能满足考试大纲中对知识综合运用的要求。因此，相关的教辅图书应运而生，对师生来说必不可少。

二、《教材解析双通道》是连接教材和考试的最佳双向通道

中考、高考是一种阶段性测试，“龙门”一跃对所有的考生来说，都是一道必须跨越的门槛。由于目前国情所限，中考、高考是一种以教材为基础、以解题为表象、以能力为核心的选拔性测试。上过考场的人都知道，真正的考题与教材尚有一段距离。

如何实现教材内容——解题能力——应考素质这三个环节的有效转换，是检验教师教学质量、衡量教辅图书优劣惟一有效的标尺！为达此目的，众多的教辅图书都做了许多有益的尝试。《教材解析双通道》就是其中之一。首先，它遵循一般的认知规律，铺就了一条由知识到能力的正向通道，即挖掘教材知识内容，列举各类典型例题，提供多种解题思路，并通过练习提升能力，达到对知识的全面掌握。其次，反其道而行之，它铺就了一条由考场到教材内容的反向通道，即整理各章（节）的常考点，通过各类考题检验学生对教材内容的掌握情况，同时总结相关的规律、方法，指出以往易错之处及思维误区，传授多种解题思路及技巧，帮助学生找到考题和教材的内在联系，从而更有针对性地掌握教材的知识内容。《教材解析双通道》铺就的这种双向通道，可以有效地拉近考题与教材之间的距离。

三、《教材解析双通道》力求实现教材与考试的零距离

为了实现教材内容——解题能力——应考素质这三个环节真正意义上的贯通，我们针对最新的教材内容，按照同步学习的教学顺序，每一章（节）进行如下讲解：

教材重点、难点、疑点挖掘 抓住教材中的重点、难点、疑点，对基本概念、基础知识进行多角度、全方位地分析、讲解。

典型例题归纳与解题规律、方法点评 对与教材相关的类型题分类讲述，总结相关的规律、方法，把解题的诀窍分散到章（节），一点一滴地渗透、传授。

（中考）高考常考点归纳与突破 联系最新的考题，研究相应的考点规律和解答策略，指导学生走出思维误区，实现对（中考）高考的彻底跨越。

题型设计与预测 优化习题，优化思维，考察对知识的理解和解题方法的运用，并传递最新的考情及题型信息。

《教材解析双通道》——您成功的金光大道！

恒谦教学与备考研究中心

《教材解析双通道》丛书编委会

目 录

第十二章 一元二次方程

第十三章 函数及其图像

第十四章 统计初步

第十二章　一元二次方程

12.1　用公式解一元二次方程

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

1. 两个概念：

(1) 整式方程：方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫做整式方程；

(2) 一元二次方程：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的一般形式为：$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

3. 一元二次方程的解法：

(1) 直接开平方法；

(2) 配方法；

(3) 公式法.

解读与挖掘

本节重点是一元二次方程的概念，熟练运用直接开平方法，配方法和公式法解一元二次方程. 难点是配方法解一元二次方程. 疑点是配方法在方程和代数式中的运用及对一元二次方程的判定.

1. 理解整式方程应抓住方程两边都是“关于未知数的整式”这一特点，如 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 是两边关于未知数 x 的整式，虽然方程的分母中有字母 a，但它不是未知数，所以仍是整式方程. 理解一元二次方程应抓住以下四个特征：

(1) 含有一个未知数；

(2) 未知数的最高次数是 2；

(3) 方程是整式方程；

(4) 判定一个方程是否是一元二次方程，应在化简整理后看是否符合上面三个特征.

2. 任何一个一元二次方程都可以化成一般形式，即 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. 特别地，二次项系数 a 不能等于零是一个主要内容，因为当 $a=0$ 时，方程化为 $bx+c=0$，它不是一元二次方程. 另外 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 也可以看作是关于 x 的二次三项式的值等于零.

3. 直接开平方法的理论依据是平方根的意义. 配方法的理论依据是公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，把公式中的 a 看作未知数 x，并用 x 代替，则有 $x^2\pm 2bx+b^2=(x\pm b)^2$. 一般地，任何一个一元二次方程都可以利用完全平方公式转化成 $(x+m)^2=n$ 的形式，当 $n\geqslant 0$ 时，就可以用直接开平方法求出方程的解，这是配方法解一元二次方程的基本思路. 用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一般步骤：

(1) 二次项系数化为 1：方程两边都除以二次项系数；

(2) 移项：使方程左边为二次项和一次项，右边为常数项；

(3) 配方：方程两边都加上一次项系数一半的平方，把方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式；

(4) 当 $n\geqslant 0$ 时，用直接开平方法解变形后的方程.

公式法是用求根公式求出一元二次方程的解的方法，它是解一元二次方程的一般方法. 用公式法解一元二次方程的一般步骤：

(1) 把方程化为一般形式，确定 a、b、c 的值；

(2) 求出 b^2-4ac 的值；

(3) 若 $b^2-4ac\geqslant 0$，则把 a、b、c 及 b^2-4ac 的值代入一元二次方程的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，求出 x_1、x_2；若 $b^2-4ac<0$，则方程没有实数根.

例 1　证明：$-10x^2+7x-4$ 的值恒小于 0.

分析　本题除考查 a^2 的非负性外，综合考查配方法的思想方法，熟练掌握配方法是解决本题的关键.

证明

$$\begin{aligned}-10x^2+7x-4&=-10\left(x^2-\frac{7}{10}x+\frac{4}{10}\right)\\&=-10\left[x^2-\frac{7}{10}x+\left(\frac{7}{20}\right)^2-\left(\frac{7}{20}\right)^2+\frac{4}{10}\right]\\&=-10\left[\left(x-\frac{7}{20}\right)^2+\frac{111}{400}\right].\end{aligned}$$

$\because$ $\left(x-\dfrac{7}{20}\right)^2\geqslant 0$,

$\therefore$ $\left(x-\dfrac{7}{20}\right)^2+\dfrac{111}{400}>0$.

$\therefore$ $-10\left[\left(x-\dfrac{7}{20}\right)^2+\dfrac{111}{400}\right]<0$ 恒成立.

即 $-10x^2+7x-4$ 恒小于 0.

例 7　设 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的两个根，求代数式 $a(x_1^3+x_2^4)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)$的值.

分析　本题考查方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$可以看作是关于 x 的二次三项式 ax^2+bx+c 的值为 0 的思想. 所以将所求代数式化成关于 x_1、x_2 的二次三项式是解决本题的关键.

解　∵　x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的两个根.

∴　$ax_1^2+bx_1+c=0, ax_2^2+bx_2+c=0$.

∴　$a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)$

$=ax_1^3+ax_2^3+bx_1^2+bx_2^2+cx_1+cx_2$

$=(ax_1^3+bx_1^2+cx_1)+(ax_2^3+bx_2^2+cx_2)$

$=x_1(ax_1^2+bx_1+c)+x_2(ax_2^2+bx_2+c)$

$=x_1\cdot0+x_2\cdot0$

$=0$.

典型例题归纳与解题规律、方法点评

1. 关于一元二次方程的判定问题

例 1　判定下列关于 x 的方程是不是一元二次方程：

(1) $x^2+3x-\dfrac{2}{x}=0$；　　(2) $x^2+3x-2=x^2$；

(3) $x^2=2+3x$；　　(4) $x^3-x+4=0$；

(5) $k^2+6kx+5=0\ (k\neq0)$；　　(6) $(m^2+3)x^2+\sqrt{3}\,x-2=0$.

分析　所谓"关于 x 的方程"就是指方程中只有 x 是未知数，而其他字母都是字母系数，可看作已知数. 根据一元二次方程的定义或一般形式分析可知：方程(1)因分母含有未知数 x，所以不是整式方程，故也一定不是一元二次方程；方程(2)经整理变形为 $3x-2=0$，未知数 x 的最高次数是 1，而不是 2(或者说它不能化为一元二次方程的一般形式)，因而它不是一元二次方程；方程(3)同时满足一元二次方程定义所包含的三个条件(或者说方程(3)能化为一元二次方程的一般形式 $x^2-3x-2=0$)，因而它是一元二次方程；方程(4)中未知数 x 的最高次数是 3，因而它不是一元二次方程；方程(5)中的未知数是 x，而不是 k，所以它不是一元二次方程；方程(6)符合一元二次方程的一般形式特点，且二次项系数 $m^2+3\geqslant3$，即 m 取任何实数 m^2+3 都不等于零，所以方程(6)也是一元二次方程.

解　方程(3)、(6)是一元二次方程，方程(1)(2)(4)(5)都不是一元二次方程.

说明　判定一个方程是否为一元二次方程的方法：一方面根据定义判定，看方程是否同时满足一元二次方程定义中包含的三个条件；另一方面根据一般形式判定，看方程能否化为 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的形式.

思考　关于 x 的一元二次方程 $m^2-2m+m(x^2+1)=x$ 的二次项系数、一次项系

数及常数项各是什么？

例 2　关于 x 的方程 $(2m^2+m-3)x^{m+1}+5x=13$ 能是一元二次方程吗？为什么？

分析　根据一元二次方程的一般形式或定义可知：$m+1=2$ 是该方程成为一元二次方程的必要条件，但同时注意一元二次方程的二次项系数不等于零.

解　当 $m+1=2$，即 $m=1$ 时，$2m^2+m-3=0$，

∴　$(2m^2+m-3)x^{m+1}+5x=13$ 不可能是一元二次方程.

说明　用一元二次方程的一般形式判定一元二次方程时，不要忽视二次项系数不等于零这一主要条件.

思考　关于 x 的方程 $(m-1)x^{2m^2+m-1}+5x=13$ 能是一元二次方程吗？为什么？

2. 关于配方法在一元二次方程和二次三项式中的运用问题

例 1　用配方法解方程：

(1) $x^2+x-1=0$；　　　　(2) $2x^2-4x+1=0$.

分析　方程(1)的二次项系数已经是 1，所以直接移项、配方、求解即可；方程(2)要先把二次项系数化成 1.

解　(1) 移项，得　$x^2+x=1$，

配方，得　$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

即　$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，

∴　$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

∴　$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 方程两边都除以 2，得　$x^2-2x+\frac{1}{2}=0$.

移项，得　$x^2-2x=-\frac{1}{2}$，

配方，得　$x^2-2x+1^2=-\frac{1}{2}+1^2$，

即　$(x-1)^2=\frac{1}{2}$.

∴　$x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴　$x_1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

说明　用配方法解一元二次方程时，化二次项系数为 1 便于配方，是关键的一步；配方时，方程左右两边同时加上一次项系数一半的平方；一次项系数的符号决定了左

边的完全平方式中是两数差的平方还是两数和的平方.

思考　对代数式 $2x^2-4x+1$ 如何配方?

例 2　下列四个式子中与多项式 $2x^2-3x$ 相等的是　　(　　)

A. $2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$　　B. $2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

C. $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$　　D. $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$

分析　本题的解法有两种,一是将四个选项运用乘法公式展开与原式比较,选出正确答案;二是把多项式 $2x^2-3x$ 进行配方.

解　$2x^2-3x=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)=2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$.

$\therefore$ 选 A.

说明　解方程中的配方与代数式中的配方略有不同.代数式中的配方是恒等变形,为使二次项系数化为 1,各项都应提出二次项的系数.

思考　用配方法解方程:$2x^2-3x=0$ 将如何进行?

3. 运用一元二次方程的相关知识解决代数式求值问题

例 1　已知 $x^2+x-1=0$,求 $\frac{2\ 004x^3+4\ 008x^2}{x^2+x+1}$ 的值.

分析　本题应将分子分解因式,把分解后的代数式化成关于 x^2+x 的多项式.根据 $x^2+x-1=0$,得 x^2+x 的值为 1,可以求出结果.

解　$\because$　$x^2+x-1=0$,　$\therefore$　$x^2+x=1$.

$\therefore$　$\frac{2\ 004x^2+4\ 008x^2}{x^2+x+1}=\frac{2\ 004(x^3+2x^2)}{(x^2+x)+1}=\frac{2\ 004[x\cdot(x^2+x)+x^2]}{(x^2+x)+1}$

$=\frac{2\ 004[x\cdot 1+x^2]}{1+1}=1\ 002(x^2+x)=1\ 002$.

说明　根据一元二次方程求代数式的值,实际上是把一元二次方程看作是关于未知数的二次三项式的值为零,然后把所求的代数式化成关于该二次三项式的代数式进行化简或求值运算.

思考　如果解出方程 $x^2+x-1=0$ 的根,代入代数式 $\frac{2\ 004x^3+4\ 008x^2}{x^2+x+1}$ 结果会怎样?

例 2　用公式法解方程 $x^2+2x=2$.

分析　将方程先化为一般形式,再确定 a、b、c 的值.

解　将方程化为一般形式 $x^2+2x-2=0$,

$\because$　$a=1,b=2,c=-2,b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-2)=12>0$,

$\therefore \quad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}.$

$\therefore \quad x_1=-1+\sqrt{3}, x_2=-1-\sqrt{3}.$

说明　公式法解一元二次方程,实质是根据一元二次方程的二次项系数,一次项系数及常数项的数值求代数式$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$的值.

思考　试用配方法解该方程并比较哪种解法更简单些.

规律方法总结

1. 判定一个方程是否为一元二次方程,一方面从定义上看方程是否同时满足三个条件:

(1) 只含有一个未知数;

(2) 未知数的最高次数是2;

(3) 方程是整式方程.另一方面从一元二次方程的一般形式上,先把方程化成一般形式,看方程是否满足 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的形式.

2. 代数式中的配方是恒等变形.为使二次项系数为1,各项都应提出二次项系数.而方程中的配方是等式变形,为使二次项系数为1,等式两边同除以二次项系数.

3. 依据一元二次方程求代数式的值的方法就是把一元二次方程看作是关于未知数的二次三项式的值等于零,再把所求代数式化成关于该二次三项式的代数式,利用二次三项式的值为零化简并求出代数式的值.

中考常考点归纳与突破

本节常考点

会判定一个方程是不是一元二次方程;能熟练地把一元二次方程化为一般形式,并指出各项的系数;会用直接开平方法、配方法解一元二次方程;会推导一元二次方程的求根公式,并会用它来解一元二次方程.其中,一元二次方程的概念问题,多见于填空题和选择题.一元二次方程的解法是历年中考的必考内容,一般纯考查一元二次方程的解法的独立题目常以填空题、选择题的形式出现在低档题中.此外,它更多地是融在解分式方程、二元二次方程组及列方程解应用题中.

考题1　(2003年哈师大附中)下列关于 x 的方程:

(1) $ax^2+bx+c=0$;　　(2) $x^2+\dfrac{3}{x}-5=0$;　　(3) $2x^2-x-3=0$;

(4) $x^2-2+x^3=0$ 中,一元二次方程的个数是　　(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解　(1) 方程忽略了 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的重要前提条件是“$a\neq0$”.

(2) 方程是关于 x 的方程，隐含 x 是未知数，所以方程的分母中含有未知数 x，方程不是整式方程，更不是一元二次方程.

(3) 方程符合一元二次方程的定义，也符合一元二次方程的一般形式，所以是一元二次方程.

(4) 方程中未知数 x 的最高次数是 3，所以不是一元二次方程.

故应选 A.

注意　解答此题的关键是牢固掌握一元二次方程的定义和它的一般形式.

思维误区　方程(1)易把 $ax^2+bx+c=0$ 判定为一元二次方程，忽略了 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的重要前提条件是“$a\neq0$”.

题型设计与预测

A 基本型

1. 方程 $5x^2-7=0$ 的解是　　(　　)

A. $x=\frac{7}{5}$　　B. $x=\pm\frac{7}{5}$　　C. $x=\pm\frac{\sqrt{35}}{5}$　　D. $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{5}$

2. 若 $b(b\neq0)$ 是方程 $x^2+cx+b=0$ 的根，则 $b+c$ 的值是　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 已知 x^2+3x+5 的值为 9，则代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为______.

4. 若方程 $ax^2+3x-2=0$ 是一元二次方程，则不等式 $2a+8>0$ 的解集是______.

5. 证明 $-10x^2+20x-11$ 的值恒小于 0.

B 能力型

1. 用配方法解下列方程时，配方错误的是　　(　　)

A. $x^2+2x-99=0$，化为 $(x+1)^2=100$

B. $t^2-7t-4=0$，化为 $\left(t-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$

C. $x^2+8x+9=0$，化为 $(x+4)^2=25$

D. $3x^2-4x-2=0$，化为 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

2. 已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$ 有公共根，则 $a+b+c$ 的值为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 不确定

3. 若 $a+b+c=0$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个与 a、b、c 的取值无关的根，该根为______，若 $a-b+c=0$，则方程与 a、b、c 的取值无关的根是______.

4. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0，则 a 的值为______.

5. 试证明关于 x 的方程 $(a^2-8a+20)x^2+2ax+1=0$，不论 a 取何值，该方程都是一元二次方程.

6. 解关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+m+3=0$.

7. 首项系数不相等的两个二次方程：

$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$，　①

$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$.　②

其中(a、b 为正整数)有一个公共根，求 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

12.2 用因式分解法解一元二次方程

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

因式分解法就是利用因式分解的手段，求出方程的解的方法，这种方法简便易行，是解一元二次方程的最常用的方法.

用因式分解法解一元二次方程的步骤：

(1) 将方程的右边化为零；

(2) 将方程的左边分解为两个一次因式的乘积；

(3) 令每个因式分别为零，得到两个一元一次方程；

(4) 解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

解读与挖掘

本节重点是熟练运用因式分解法解一元二次方程.难点是掌握能用因式分解法来解的一元二次方程的特征.疑点是灵活选择直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法解一元二次方程,用因式分解法解方程时,不能在方程两边除以同一个含有未知数的式子.

因式分解法解一元二次方程的基本思想和方法是:一个一元二次方程一边是零而另一边易于分解成两个一次因式时,可以使每一个一次因式等于零,分别解两个一元一次方程,得到的两个解就是原一元二次方程的解.该基本思想和方法的理论根据是:如果两个因式的积等于0,那么这两个因式中至少有一个等于0;反过来,如果两个因式有一个等于0,它们的积就等于0.因式分解的方法有提公因式法、公式法、十字相乘法及分组分解法.熟练掌握因式分解的方法是用因式分解法解一元二次方程的关键.

到目前为止,解一元二次方程的方法有直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法.这四种方法各有长处,直接开平方法和因式分解法,虽然简便易行,但是并非所有的一元二次方程都能用这两种方法来解;配方法适用于任何一元二次方程,但配方过程较麻烦;公式法也适用于任何一元二次方程,是解一元二次方程的主要方法,同时又是进一步学习根的判别式、根与系数的关系、二次三项式的因式分解的基础.公式法比配方法简单得多,它直接利用配方法导出的求根公式求解,但公式法不如直接开平方法和因式分解法快捷,在具体解方程时,要根据题目特点,选择适当的方法求解.

例1 用适当的方法解方程:

(1) $(2-3x)(x+4)=(3x-2)(1-5x)$;

(2) $49(x-3)^2=16(x+6)^2$;

(3) $\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-6=0$;

(4) $(x+4)^2-(x+5)^2+(x-3)^2=24+4x$.

分析 方程(1)移项后,可直接提出公因式$(3x-2)$,因为$(2-3x)=-(3x-2)$;方程(2)移项后可用平方差公式分解因式;方程(3)先把方程两边都乘以4,使其系数都变为整数,再考虑能否用因式分解法解;方程(4)先化为一般形式,再选择方法.

解 (1) 原方程化为 $(3x-2)(1-5x)+(3x-2)(x+4)=0$,

$(3x-2)(5-4x)=0$,

$\therefore\ x_1=\frac{2}{3},x_2=\frac{5}{4}$.

(2) 原方程化为 $[7(x-3)]^2-[4(x+6)]^2=0$,

即 $(7x-21)^2-(4x+24)^2=0$,

$(11x+3)(3x-45)=0$,

$\therefore\ x_1=-\frac{3}{11},x_2=15$.

(3) 原方程化为 $x^2+10x-24=0$，

$(x+12)(x-2)=0$，

$\therefore\ x_1=-12, x_2=2$.

(4) 原方程化为 $x^2-12x=24, (x-6)^2=60, x-6=\pm2\sqrt{15}$.

$\therefore\ x_1=6+2\sqrt{15}, x_2=6-2\sqrt{15}$.

例 2　解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-m(3x-2m+n)=n^2$；　　(2) $x^2-2ax+a^2=x-a$.

分析　这两个方程中只有 x 是未知数，其他字母均为字母系数. 用公式法解含有字母系数的一元二次方程时，计算量很大，容易出错. 因此，尽量用因式分解法效果比较好，因式分解实在困难的，再用公式法. 将方程(1)、(2)化为一般形式后，均可用十字相乘法分解为两个一次方程.

解　(1) 原方程可化为 $x^2-3mx+(2m^2-mn-n^2)=0$，

$x^2-3mx+(2m+n)(m-n)=0$，

$[x-(2m+n)][x-(m-n)]=0$.

$\therefore\ x-(2m+n)=0$，或 $x-(m-n)=0$.

$\therefore\ x_1=2m+n, x_2=m-n$.

(2) 原方程可化为 $x^2-(2a+1)x+a(a+1)=0$，

$(x-a)[x-(a+1)]=0$.

$\therefore\ x_1=a, x_2=a+1$.

典型例题归纳与解题规律、方法点评

1. 关于换元思想在因式分解法解一元二次方程中的运用问题

例 1　解方程 $3\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-5\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=0$.

分析　因为 $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，若设 $x-\frac{1}{2}=y$，则原方程可化为 $3y^2-5y-2=0$，解此方程求得 y 的值，再代回原设 $\left(x-\frac{1}{2}\right)=y$，求出 x 的值. 也可直接把 $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 看作一个整体，先求出 $x-\frac{1}{2}$ 的值，再求 x.

解法一　设 $x-\frac{1}{2}=y$，则原方程化为 $3y^2-5y-2=0$.

$(3y+1)(y-2)=0$.

$\therefore\ y_1=-\frac{1}{3}, y_2=2$.

当 $y=-\frac{1}{3}$ 时，$x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$，解得 $x=\frac{1}{6}$.

当 $y=2$ 时，$x-\frac{1}{2}=2$，解得 $x=2\frac{1}{2}$.

∴ 原方程的解是 $x_1=\frac{1}{6}, x_2=2\frac{1}{2}$.

解法二 原方程化为$\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\right]=0$.

∴ $3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=0$，或$\left(x-\frac{1}{2}\right)-2=0$.

∴ $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$，或 $x-\frac{1}{2}=2$.

∴ $x_1=\frac{1}{6}$，$x_2=2\frac{1}{2}$.

说明 解法一应用了换元法，把关于 x 的方程化为关于 y 的方程；解法二虽然没把未知数换成 y，但实质上还是应用了换元思想，把关于 x 的方程看成关于$\left(x-\frac{1}{2}\right)$的方程.

思考 此题运用换元法的目的是什么？

例 2 阅读：为解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可将 x^2-1 视为一个整体，然后设 $x^2-1=y$，则$(x^2-1)^2=y^2$，原方程化成 $y^2-5y+4=0$ ①

解得 $y_1=1, y_2=4$.

当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$， ∴ $x^2=2$， ∴ $x=\pm\sqrt{2}$.

当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$， ∴ $x^2=5$， ∴ $x=\pm\sqrt{5}$.

∴ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题：(1) 填空：在由原方程得到方程①的过程中，利用______法达到了降次的目的，体现了______的数学思想.

(2) 解方程 $x^4-x^2-6=0$.

分析 此例是阅读理解题，解题关键是要认真阅读解题过程，然后按要求作答.

解 (1) 换元；转化.

(2) 设 $y=x^2$，则原方程可化为 $y^2-y-6=0$，解得 $y_1=3, y_2=-2$.

当 $y=3$ 时，$x^2=3$， $x=\pm\sqrt{3}$.

当 $y=-2$ 时，$x^2=-2$， 无实根.

∴ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$.

说明 除了掌握解一元二次方程的方法外，还应该掌握一些基本的数学思想.

思考 对问题(1)中换元后的方程 $y^2-5y+4=0$ 分别用配方法、公式法和因式分解法解方程，比较哪种方法简单？

2. 关于利用解方程的方法来解决代数式求值问题和证明题的问题