张嘉瑾精彩数学系列丛书

LITIJIHE

# 立体几何

FANGFA.JIQIAO.YOUMEIJIE

## 方法·技巧·优美解

编著　张嘉瑾

長春出版社

张嘉瑾精彩数学系列丛书

# 立体几何
# 方法·技巧·优美解

张嘉瑾　编著

长春出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

立体几何 方法·技巧·优美解/张嘉瑾著．—长春：长春出版社，2004.6

ISBN 7-80664-716-3

Ⅰ．立… Ⅱ．张… Ⅲ．立体几何－解题 Ⅳ．0184.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第(027756)号

**责任编辑：杨爱萍 封面设计：刘 洋**

长春出版社出版

（长春市建设街1377号）

（邮编130061 电话8569938）

长春市新世纪印业有限公司印刷

新华书店经销

880×1230毫米 32开本 10.75印张 1插页 262千字

2004年6月第1版 2004年6月第1次印刷

印数：1—7000册 定价：14.00元

# 作者小传

张嘉瑾，男，江苏宜兴人，1982 年毕业于江苏师范学院数学系，1996 年被评为中学数学特级教师.

2001 年出任《高考》杂志主编，以其鲜明的风格，过人的才华将《高考》迅速打造成全国教育杂志中的知名品牌.

多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得. 在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文一百多篇. 出版数学专著十册近四百万字. 其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《思维·重点·方法》、《考前精彩 99》等著作深受全国广大师生的欢迎. 论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜.

课堂教学中善于启发学生的思维，激发学生的学习兴趣，并注重学生心理素质的培养. 良好的美学与文学修养形成了他数学课的特殊风格和魅力.

现供职于江苏省宜兴中学.

波利亚认为：一个人应该努力发展运用数学知识的能力．他要强调技能技巧、有益的思考方法和理想的思维习惯．

方法和技巧它会帮助你找到简洁的解法．

“简洁是智慧的灵魂”，莎士比亚说．

目录

# 第一章　直线和平面

## 第二章　多面体和旋转体 

# 第一章 直线和平面

立体几何锤炼人的逻辑推理与空间想象能力.

我们完全可以真实地去感知三维空间中每一个实物，甚至去深刻理解它们的全部内在结构，而要在一张白纸上将它们淋漓尽致地描绘出来，似乎不可能. 但是，千百年来，人们除了用直觉去认识世界外，不正是在白纸上创造了如此色彩缤纷的现实世界吗?

学好立体几何，我们要更好地去改造世界，创造美好.

# 1

# 四大公理和空间直线

## 双基提炼

平面是几何中最基本的概念之一．在数学中，对这一类概念一般不加以定义而只进行描述．

平面是无限延展的．因此，“延展平面 $\alpha$”与“延长直线 $a$”的说法都是错误的．

我们通常把平面画成平行四边形或三角形．

### 四大公理

**公理 1** 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

**公理 2** 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线．

**公理 3** 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面．

**推论 1** 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面．

**推论 2** 经过两条相交直线，有且只有一个平面．

**推论 3**　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

**公理 4**　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

四大公理，支撑着空间世界的骨架.

四大公理，立体几何的逻辑基础和推理依据.

**异面直线的定义**　不能同在一个平面内的两条直线是异面直线.

那么，怎样判定两条直线是异面直线呢?

**方法一**　根据异面直线的定义.

**方法二**　（异面直线的判定定理）　过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

**方法三**　反证法.

# 反证法

反证法是一种十分重要的证明方法，它在立体几何的证明中有着广泛的应用，熟练地运用反证法是学习立体几何的必备基础之一.

如何用反证法证题呢? 它的一般步骤为：

(1) 反设：即作出与命题结论相反的假设；

(2) 归谬：由所作的假设出发，通过正确的推理，导出矛盾；

(3) 判断：断定产生矛盾的原因在于所作的假设是错误的，因此证得原来命题结论的正确性.

反证法不同于由因导果的综合法和执果索因的分析法. 它是一种间接证法，由于它的主要特征是“导出矛盾”，因此又叫“归谬法”.

在进行反设时，要注意与原结论相反的方面是只有一种情形还是有若干种情形. 如果只有一种情形，那么只需就这种情形去导出矛盾；如果有若干种情形，那么必须针对每一种情形分别去导出矛盾，后者又称为“穷举归谬法”.

怎样才算归结到谬误，导出矛盾呢? 一般地说，从所作的假设出发，导出的结果符合下列条件之一者就是“归谬”：

(1) 与已知条件相矛盾；

（2）与已知公理、定理相矛盾；

（3）与已知定义相矛盾；

（4）与所作的假设相矛盾；

（5）导出了两个互相矛盾的结果．

在归谬的过程中应当注意：推理过程必须是完全正确的．因为错误的推理导出的矛盾并不能由此断言假设的不正确．另外必须重视题设中已知条件的使用，没有使用已知条件要导出矛盾的结果是不可能的．

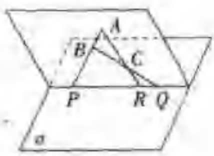
## 好题导航

为了打好扎实的基础，我们从简单的例题开始，而正是在对这些简单问题的解答证明中，我们才认识到了立体几何它那独特的思维方式和书写要求．

1.1　（1）不重合的三条直线相交于一点，最多能确定________个平面；若相交于两点，最多能确定________个平面．

（2）直线与平面相交，证明交点只有一个．

（3）如图所示，$\triangle ABC$ 在平面 $\alpha$ 外，它的三边所在的直线分别交平面 $\alpha$ 于 $P$、$Q$、$R$，求证：$P$、$Q$、$R$ 三点共线．




**解析**　（1）注意题设中"最多"两个字．

公理 3 的推论 2 告诉我们经过两条相交直线有且只有一个平面．那么不重合的三条直线相交于一点，最多能确定的平面当然是三个！

若三条直线相交于两点，则最多能确定两个平面．

此时，其中必有两条是异面直线．

**联想类比**

1．三条互相平行的直线能确定________个平面．

答：一个或三个．

2．一条直线与平面相交，交点只有一个，这是众所周知的事实，但是，怎样证明呢？

假设交点不只一个，至少有两个，那么直线在平面内（公理 1），与

直线和平面相交矛盾.

简洁、明快、心服口服.

这就是反证法的特殊魅力.

而公理是推证的最有力的依据.

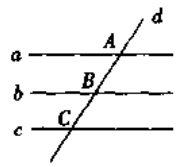
3. 如图所示，由题设条件知，$P$、$Q$、$R$ 三点既在$\triangle ABC$ 确定的平面内，又在平面 $\alpha$ 内，所以它们共线(公理 2).

证完了？的确证完了呀！

公理，研究空间图形和性质的基础；公理，以铁一般无可辩驳的事实揭示了宇宙间的真理.

前三个公理是平面的基本性质，公理 4 是平几中平行公理在三维空间的推广.

1.2　已知三条平行线 $a$、$b$、$c$ 都与直线 $d$ 相交，求证它们共面.




思路一　由已知条件构造一个平面，然后证明其它元素都在该平面内.

**证法一**　由 $a /\!/ b$ 知 $a$、$b$ 确定一个平面，设为 $\alpha$，

由 $A\in a$ 得 $A\in\alpha$，由 $B\in b$ 得 $B\in\alpha$，

$\therefore d\subsetneqq\alpha$.

$\because C\in d$，在 $\alpha$ 内过点 $C$ 作 $c' /\!/ a$，

$\because$ 直线 $c$ 也过 $C$，且 $c /\!/ a$，

$\therefore$ 直线 $c'$ 与直线 $c$ 重合(过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行).

$\therefore a$、$b$、$c$、$d$ 都在同一平面内.

思路二　构造两个平面，使这四条直线分别在这两个平面内，然后证明这两个平面重合.

**证法二**　$\because a /\!/ b$，故 $a$、$b$ 确定平面 $\alpha$.

又 $b /\!/ c$，故 $b$、$c$ 确定平面 $\beta$.

而 $A\in a$，$B\in b$，$C\in c$，

$\therefore d\subsetneqq\alpha$，$d\subsetneqq\beta$，

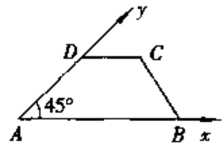
$\therefore$ 存在两条相交直线 $b$、$d$ 既在 $\alpha$ 内又在 $\beta$ 内.

$\therefore \alpha$ 与 $\beta$ 重合.

**1.3**　若一个水平放置的平面图形的斜二侧直观图是一个底角为 $45°$，腰和上底长均为 1 的等腰梯形，则平面图形的面积是　　(　　)

(A) $2+\sqrt{2}$　　(B) $1+\sqrt{2}$　　(C) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

**解析**　这个水平放置的平面图形的上底为 1，下底为 $1+\sqrt{2}$，高为 2.




又平面图形为直角梯形，

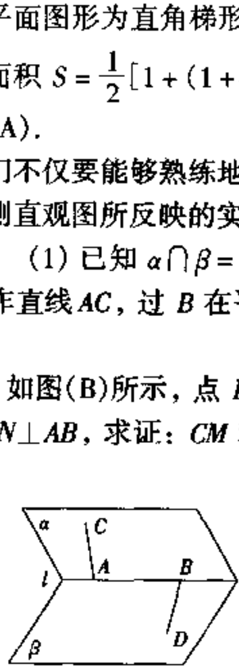
$\therefore$ 面积 $S=\frac{1}{2}[1+(1+\sqrt{2})]\cdot 2=2+\sqrt{2}$，

选(A).

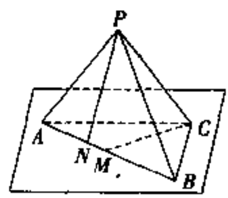
我们不仅要能够熟练地画出一个立体图形的直观图，而且还要熟悉斜二测直观图所反映的实体的几何本质.

**1.4**　(1) 已知 $\alpha\cap\beta=l$，$A\in l$，$B\in l$ ($A$、$B$ 不重合)，过 $A$ 在平面 $\alpha$ 内作直线 $AC$，过 $B$ 在平面 $\beta$ 内作直线 $BD$，求证：$AC$ 和 $BD$ 是异面直线.

(2) 如图(B)所示，点 $P\notin$ 平面 $ABC$，$PA\neq PB$，$CM$ 是 $AB$ 边上的中线，$PN\perp AB$，求证：$CM$ 和 $PN$ 是异面直线.



图(A)



图(B)

**证**　(1) (直接法，应用判定定理)

如图(A)所示，明显地，$C\notin\beta$，否则 $AC\subsetneqq\beta$，与 $AC\subsetneqq\alpha$ 矛盾. 又 $A$、$B$ 不重合，$A\in\beta$，$B\in\beta$，$BD\subsetneqq\beta$，因此 $AC$ 与 $BD$ 是异面直线.

(2) **证**　(反证法)　设 $CM$ 和 $PN$ 共面，分两种情况：

①若 $M$、$N$ 重合，可得 $AN=BN$，

$\therefore PN$ 是线段 $AB$ 的中垂线，就有 $PA=PB$，与已知条件矛盾.

②若 $M$、$N$ 不重合，由于 $CM$ 和 $PN$ 共面，就有 $PC$ 与 $MN$ 共面.

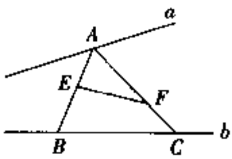
$\therefore P\in$ 平面 $ABC$，与已知矛盾，

则 $CM$ 和 $PN$ 是异面直线.

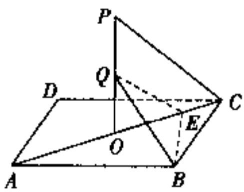
*反证法是一种间接证明的方法. 法国数学家丁·阿达玛曾经说过："这种方法在于表明：若肯定定理的假设，而否定其结论，就会导致矛盾." 多么精辟的概括.*

**1.5**　(1) 已知 $a$、$b$ 为异面直线，点 $A\in a$，点 $B$、$C\in b$，$E$、$F$ 分别为线段 $AB$、$AC$ 上除端点外的任一点，求证：直线 $EF$ 与直线 $a$ 为异面直线(图(C)).

(2) 如图(D)，$O$ 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的中心，$OP\perp$ 平面 $AC$，$OP=1$，$Q$ 是 $OP$ 的中点，① 求证：$PC$、$BQ$ 是异面直线；②求 $PC$ 与 $BQ$ 所成角的大小.



图(C)



图(D)

**解析**　(1) 如图(C)所示，直线 $a$ 不在 $ABC$ 所确定的平面内，否则与 $a$、$b$ 异面矛盾.

面 $EF\subsetneq$ 面 $ABC$，由异面直线的定义知直线 $EF$ 和 $a$ 为异面直线.

(2) ①显然，$B\notin$ 面 $POC$，而 $Q\in$ 面 $POC$，

又 $Q\notin PC$，$PC\subsetneq$ 面 $POC$，

由异面直线的判定定理知 $PC$、$BQ$ 是异面直线.

②取 $OC$ 中点 $E$，连 $QE$、$EB$，则 $QE/\!/PC$，

异面直线 $PC$ 与 $BQ$ 所成角，即为 $QE$ 与 $BQ$ 所成的角.

在 $\triangle BEQ$ 中，由余弦定理：

$$\cos\angle BQE=\frac{QB^2+QE^2-BE^2}{2QB\cdot QE}=\cdots\cdots=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore$ 异面直线 $PC$ 与 $BQ$ 所成角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

**联想类比**　**关于异面直线**

1. 已知 $a$、$b$ 为异面直线，它们分别在平面 $\alpha$、$\beta$ 内，若 $\alpha\cap\beta=l$，则 $l$　　(　　)

(A) 分别与 $a$、$b$ 相交　　(B) 至少与 $a$、$b$ 中之一相交

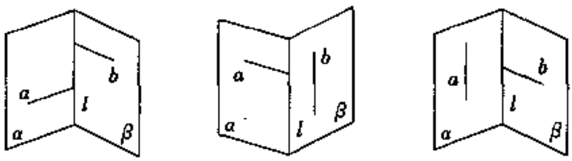
(C) 与 $a$、$b$ 都不相交　　(D) 至多与 $a$、$b$ 中之一相交

**解析**　设 $l$ 与 $a$、$b$ 都不相交，

$\because a$、$l\subsetneq\alpha$，且 $a$ 与 $l$ 不相交，故 $a/\!/l$，

同理 $b/\!/l$，由公理 4，$a/\!/b$，与题设矛盾.

从而 $a$、$b$ 中至少有一条与 $l$ 相交，如下图.




2. 给出下列命题：

①与两条异面直线中的一条异面的直线与另一条也异面；

②平面内一点与平面外一点的连线和平面内的直线是异面直线；

③空间两条直线不相交，则它们异面；

④和两条异面直线都垂直的直线是异面直线的公垂线.

其中正确命题的个数是　　(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

**提示**　①错. 与两条异面直线中的一条异面的直线与另一条可以平行或相交.

②错. 异面直线的判定定理：平面内一点与平面外一点的连线和平面内不经过这点的直线是异面直线.

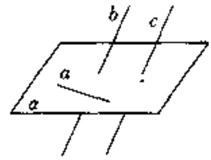
③错. 空间两直线不相交，可以平行.

④错. 异面直线的公垂线必须垂直相交.

疏忽、遗漏、粗枝大叶，这样的错误最常见.

3. 求证：平行于异面直线中的一条面不与另一条相交的直线必与另一条是异面直线.

**解析** 这个问题读起来有点费劲，多读几遍，先把已知和求证弄明白.




已知：如图所示，$a$、$b$ 为异面直线，直线 $c /\!/ b$，$c$ 与 $a$ 不相交.

求证：$a$ 与 $c$ 是异面直线.

**证** 假设 $a$、$c$ 在同一平面 $\alpha$ 内，明显 $a$、$c$ 不重合.

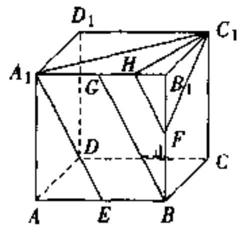
①若 $a /\!/ c$，则由 $b /\!/ c$ 知 $a /\!/ b$，与题设矛盾；

②若 $a$、$c$ 相交，直接与题设矛盾.

$\therefore a$、$c$ 不在同一平面内，故 $a$、$c$ 为异面直线.

*严格书写，有理有据，这是起码的要求.*

**1.6** 如图，正方体 $AC_1$ 中，$E$、$F$ 分别是 $AB$、$BB_1$ 中点，则 $A_1C_1$ 与 $B_1C$ 所成角为________；$A_1E$ 与 $C_1F$ 所成角是________.




**解析** $B_1C$ 与 $A_1D$ 平行，$\triangle A_1DC_1$ 为等边三角形，因此 $A_1C_1$ 与 $B_1C$ 所成角为 $60°$.

取 $A_1B_1$ 中点 $G$，$GB_1$ 中点 $H$，连 $GB$、$HF$、$C_1H$，则 $A_1E /\!/ GB /\!/ HF$.

$\angle HFC_1$ 即为 $A_1E$ 与 $C_1F$ 所成的角.

设正方体棱长为 1，可知 $HF=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，$FC_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$HC_1=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$.

由余弦定理，$\cos\angle HFC_1=\dfrac{2}{5}$，故 $A_1E$ 与 $C_1F$ 所成角为 $\arccos\dfrac{2}{5}$.

**注** 把两条异面直线中的一条平移到另一条所在的平面中来，在同一平面中求相交直线所成的角. 这种平移法是求异面直线所成角的常规方法.

**1.7** 已知 $a$、$b$ 是异面直线，$a$ 上两点 $A$、$B$ 的距离是 8，$b$ 上两点 $C$、$D$ 的距离为 6，$AD$、$BC$ 的中点分别为 $M$、$N$，且 $MN=5$，求 $a$、$b$ 所成的角.

**解** 如图所示，连 $AC$，取 $AC$ 中点 $O$，连 $OM$、$ON$，