高中解析几何

重点知识归纳与验收

长 春 出 版 社

东北朝鲜民族教育出版社

《中学基础知识基本技能训练丛书》

高中解析几何
重点知识归纳与验收

曾　放　阎延昆
胡炯涛　方玉月　编

长　春　出　版　社
东北朝鲜民族教育出版社

高中解析几何重点知识归纳与验收

曾 放等 编

责任编辑：李风畋 孙慧平　　封面设计：王国庆

长春出版社出版　　新华书店总店北京发行所发行

（长春市重庆路40号）　　河北省迁安县印刷厂印刷

开 本：787×1092 1/32　　1990年3月第1版

印 张：8.4375　　1991年2月第2次印刷

字 数：189 000　　印 数：21 601—42 900册

ISBN 7-80573-150-O／G·45　　定价：3.00元

出 版 说 明

基础知认、基本技能是中学阶段各科教学和训练的主要着眼点，亦是检验中学生对各科知识掌握、理解程度的参照坐标。

本套丛书就是从“双基”出发，遵循初、高中各科教学大纲的宗旨，根据近年来初、高中升学考试的总体趋势，按照初、高中各学科的知识体系编写而成的。

本丛书按学科分册，各册均由“学好××学科的钥匙”、“重点知识归纳与运用”、“升学考试模拟试题”、“参考答案”四部分组成。其中主体部分的“重点知识归纳与运用”包括“知识归纳”、“理解与运用”、“知识验收”等项。

由于本丛书立足于学科重点知识的系统归纳，既适用于初、高中升学考试的总复习，也可作为初、高中学生日常学习用书。

编　者

1990年1月

《中学基础知识基本技能训练丛书》

编　委　会

目　　录

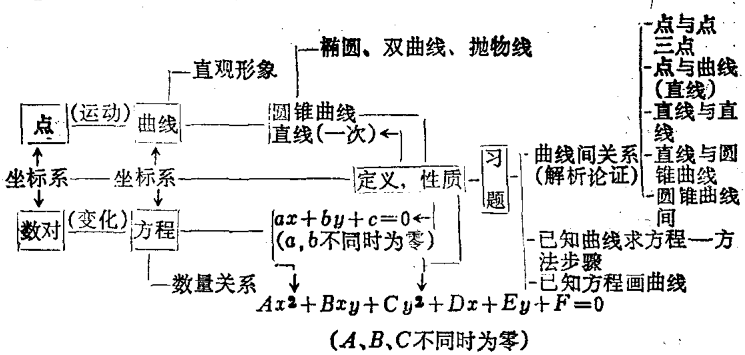
学好解析几何的钥匙

解析几何是以坐标法为工具，用代数方法研究几何问题的学科。用坐标表示点，用方程表示曲线（包括直线），通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质；给出曲线，求解方程就构成解析几何两类基本问题：解析论证问题和求轨迹方程问题。

一般地，在直角坐标系中，如果某曲线C（看作适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程$f(x,y)=0$的实数解建立了如下的关系：

1.曲线上的点的坐标都是这个方程的解（纯粹性）；

2.以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点(完备性)；那么，这个方程叫做曲线的方程；这条曲线叫做方程的曲线（图形）。这一基本概念成为全书的基础，贯穿于总复习全过程。



一、坐标系

1.点p与数组，曲线与方程关系

点$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$　$p(x(t), y(t))-\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$($t$为参数)

$\updownarrow$

在直角坐标系下：$p(x, y)-f(x, y)=0$

$\updownarrow$

在极坐标系下：$p(\rho, \theta)-f(\rho, \theta)=0$

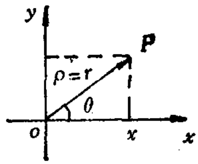
$(\rho, 2k\pi+\theta)(k \in Z)$

$(-\rho, (2k+1)\pi+\theta)$

$\updownarrow$

在复数平面内：　　$p(Z)-f(Z)=0$

$$\begin{aligned} Z &= x+yi \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

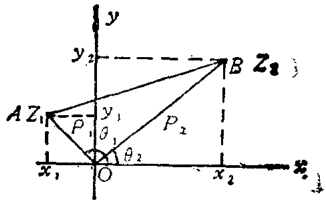


$(x, y \in R)$

$|Z|=\sqrt{x^2+y^2}=r=|\rho|$

在三个坐标系下，一个点有七种表示法，在高中教材中相应的有四种曲线方程的表达式。利用坐标变换把曲线方程化为标准型，以及在三个坐标平面内，四种曲线方程的互相转化是总复习重要课题，掌握它有助于加深概念的理解和知识、方法的沟通和转化。

2．重要公式



定理：由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$$\begin{aligned} &= (x_2+y_2 i)-(x_1+y_1 i) \\ &= (x_2-x_1)+(y_2-y_1)i \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} (AB)_{Ox}=x_2-x_1=|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{Ox} \wedge \overrightarrow{AB}) \\ (AB)_{Oy}=y_2-y_1=|\overrightarrow{AB}|\sin(\overrightarrow{Ox} \wedge \overrightarrow{AB}) \end{cases}$$

公式：(1)两点间距离公式

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=|Z_2-Z_1|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})(y_1-y_2)^2}$

$k=\operatorname{tg}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OX})$（$k$为直线$AB$斜率）

$=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$（余弦定理）

（在极坐标系下）

（点到原点的距离＝？ 坐标轴上两点间的距离＝？）

（2）定比分点公式

设点A坐标为(x_1,y_1)，(Z_1)，(t_1)，(ρ_1,θ_1)；$B(x_2,y_2)$，(Z_2)，(t_2)，(ρ_2,θ_2)；

分点$P(x_0,y_0)$，$(Z_0)(t_0)$，(ρ_0,θ_0)

其中A，B，P对应的数组或数值分别是在直角坐标系下直角坐标(x_i,y_i)参数t_i；在复平面内对应复数Z_i；在极坐标平面内极坐标(ρ_i,θ_i)（$i=1,2,0$），若

$$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}=\lambda\text{时，有}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{array}\right\}\to Z_0=\frac{Z_1+\lambda Z_2}{1+\lambda}\to t_0=\frac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}\to$$

$$\begin{cases}\rho_0=\dfrac{\rho_1+\lambda\rho_2}{1+\lambda}\\ \theta_0=\theta_1=\theta_2\end{cases}$$

• 可用$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$（$\lambda\geqslant0$）表示线段$AB$（不包括点

B）其中$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$。

（3）点到直线的距离公式

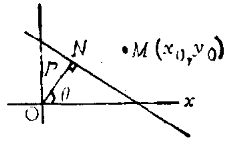
设直线：$ax+by+c=0$　（a,b不同时为零），点$P(x_0,y_0)$到直线l的距离

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

设直线方程为$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$（法线式）

点$M(x_0,y_0)$到直线l的距离

为$d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p|$



（4）两直线斜率为k_1，k_2交角公式为。

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|\quad（\theta为二直线交角）$$

（5）三角形面积公式：

设$\triangle ABC$三顶点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}的绝对值.$$

（A、B、C三点按逆时针方向排列时，行列式值为正，反之为负）。

同时要记住“面积桥”：

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)s(-c)}=\frac{abc}{4R}=r\cdot s$$

其中 a、b、c分别为角A、B、C的对边；h_a为a边上的高，R为$\triangle ABC$外接圆半径；r为内切圆半径，s为三边和之半。

二、直线方程

直线方程是解析几何的基础，直线方程有一般式、斜截式、点斜式、两点式、截距式、参数式、法线式等七种形式，注意各种形式使用条件和用途，会对几种形式互化．在学习本章时要抓住直线斜率 k，它是直线的“灵魂”，理解它的意义，掌握其四种求法（已知倾斜角α求斜率；已知两点坐标求斜率；已知直线方程求斜率；以及利用曲线在切点处一阶导数值求斜率等方法），以及二直线求交点求交角，证平行（重合）垂直等方法都与直线斜率有关．

在这里还有一点要说明的，就是对称问题．点关于原点、x轴、y轴、直线 $x+y=0$ 和直线 $y=x$ 对称点坐标关系要熟记．这是五种特殊情况，还应掌握点关于点对称，点关于直线对称问题关系式，进而掌握曲线关于点对称，曲线关于直线对称问题．直线方程学习好，将给解析几何学习打下良好基础．

三、圆锥曲线

圆锥曲线是教材的重点内容．对于椭圆、双曲线、抛物线的复习，建议从各自定义出发，同时掌握圆锥曲线统一定义和极坐标方程的联系．在此基础上，引导学生讨论各种曲线的特殊点、特殊线、特殊图形，以及距离、重要关系式．如椭圆：到两定点距离之和等于定长点的轨迹叫椭圆．它的方程可以写成普通方程、参数方程、极坐标方程和复数表达式四种形式．对于统一定义：到定点和定直线距离比为定值点的轨迹（$0<e<1$）叫椭圆．有七个特殊点（顶点、焦点、中心）；有四条特殊线（准线和对称轴）；有两个基本图形（标明范围

的矩形和表示 a、b、c 关系的直角三角形）；有五个距离 $(a、b、c,\frac{a^2}{c}、p)$;三个关系式：$a^2=b^2+c^2$，$e=\frac{c}{a}$，$p=\frac{b^2}{c}$。掌握这些基本量及几何意义就等于掌握了基础知识，并能做到融会贯通，事半功倍。

四、关于求轨迹方程问题

求曲线方程是解析几何一个重点问题，要求学生掌握九种求轨迹方程的方法：它们是一般法（等式法）：选系、设点、列式、化简、证明不要求；公式法（定型法）：设曲线方程，求出待定系数；轨迹转移法（设辅助点法）：设点$P(x,y)$在曲线$f(x,y)=0$上点$Q(x',y')$与点$P(x,y)$坐标有关系式$\begin{cases}x=\varphi(x',y')\\y=\psi(x',y')\end{cases}$，把$x$、$y$代入原方程得新方程$g(x,y)=0$为所求$Q$点轨迹方程（注意补点与去点）。

代入法：把曲线上点坐标代入方程利用已知条件得方程。

交轨法：由两轨迹方程消参得所求轨迹方程的方法叫交轨法。

曲线系法：利用曲线系知识求轨迹方程。

还有复数法、轨迹定义法（几何法）、参数法等。这些方法若在求曲线方程时能灵活运用，就可以捷足先登。

五、关于解析论证问题

研究曲线性质问题，离不开曲线的意义和基本方法，但是在面对具体习题时，常常要考虑坐标系的选取，方法的选择和方程的选定问题，这些问题处理好可获取捷径，收到奇

效。

关于坐标系的选取——直角坐标系和极坐标系。

极坐标——极坐标系的用途：

（1）凡是研究绕定点旋转问题（定点：原点、焦点等）用极坐标系，极坐标方程。

（2）凡研究过焦点弦问题用极坐标系。

（3）凡研究曲线统一性质时用极坐标系。

（4）凡是要用坐标轴旋转问题，用极坐标系。

（5）某些超越曲线用极坐标系（如等进螺线）。

关于方程的选择——在直角坐标系下普通方程和参数方程。

选用参数方程的条件：

（1）有关线段长度问题，用直线参数方程。

（2）有关离心角问题，用椭圆和双曲线参数方程。

（3）某些超越曲线用参数方程(如圆的渐开线)。

（4）研究曲线运动轨迹时，以时间t为参数；研究物体转移时，以转角θ为参数。

（5）用普通方程较麻烦时，考虑用参数方程、参数有：直线的倾斜角、斜率、点的坐标、线段长度、字母系数，设角等。

关于方法的选定——解析法和几何法。

可选用几何法的条件：

（1）已知图形中，有可利用的几何性质（圆锥曲线性质：圆锥曲线两个定义，对称性与焦点，准线有关性质）。

（2）圆锥曲线各基本量几何意义。

（3）圆锥曲线对称性，准线性质切法性质。

（4）从已知方程中可分析出明显的几何意义。

以上所述是处理解析几何两类问题，特别是解析论证问题的大方大法，不容忽视，它们是学好解析几何的钥匙。

六、在总复习中，按如下的程序进行，就能脉络清楚，重点明确

首先建系．建立点的坐标，它是沟通知识和方法的基础。从一个点到两个点，给出两点间距离公式；再研究三个点关系。这里有在同一直线上三点定比分点及公式，中点公式，点(x,y)关于点(a,b)对称点$(2a-x,2b-y)$关系，以及定比分点公式应用，点的对称问题，三点共线问题等．不在同一直线上三个点有三角形面积公式及应用．

接着复习直线方程，注意各种形式作用及转化。其中斜率k是直线的“灵魂”。斜率k的定义、求法及应用是直线方程这一单元的核心内容。判定二直线相交、平行、垂直、求交点、求交角，证三点共线．

点到直线距离公式给出．两点关于直线对称点．设$A(x_1,y_1)$关于直线$l:ax+by+c=0$，对称点$B(x_2,y_2)$满足关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1\\ a\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}+c=0.\end{cases}$$

可用x_1、y_1表示出x_2、y_2。

对称问题：

（1）点关于点对称，进而得出线关于于点对称问题；

（2）点关于线对称问题，从而得到线关于线对称问题．对称问题可完满解决了。

在研究两直线位置关系后，可研究三直线有关问题，可

以解决平几中直线形问题（如平几问题解析证法）。

关于圆的方程的复习，建立圆方程后，研究点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系，可以用平几知识解决方程问题．通过这一单元的学习可以对求轨迹方程的方法、对曲线性质的研究得到很好的训练。

在此基础上总结椭圆、双曲线、抛物线的定义、性质，并建议按特殊点、特殊线、特殊图形、距离以及基本关系来研究、这样能把知识学活，便于应用。

重点知识归纳与运用

第一章　直　　线

§1　有向线段、定比分点

【知识归纳】

一、有向线段

1．有向线段数量公式：

$AB=x_B-x_A$（终点坐标减去起点坐标）。

2．两点间距离公式：

已知两点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$。

（1）x轴上两点间的距离公式：

$$|AB|=|x_2-x_1|;$$

（2）y轴上两点间的距离公式：

$$|AB|=|y_2-y_1|;$$

由此可推知，当一条直线与坐标轴平行时，则其上任一线段的长度都可由相应坐标差的绝对值来表示。

（3）任意两点间距离公式：

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})(y_1-y_2)^2}\quad（点在y=kx+b上）;$$

$$|AB|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}（极坐标系下）;$$

$|AB|=|Z_B-Z_A|=|(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i|$（复平面内）

特殊地 $|OA|=\sqrt{x^2+y^2}=|r|=|\rho|$。

二、定比分点

1．确定起点P_1、分点P、终点P_2，依照 P_1—P—P_2的顺序得 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$.

（1）当P为内分点时，$\lambda>0$；

（2）当P为外分点时，$\lambda<0$；

（3）当P与P_1重合时，$\lambda=0$；

（4）当P与P_2重合时，λ不存在．假设$\lambda=-1$，则$P_1P=-PP_2$，P在P_1P_2或P_2P_1的延长线上，这与P_1、P_2不重合矛盾，$\therefore\lambda\neq-1$。

2．定比分点公式：

设$P(x,y)$、$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$。

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq-1).$$

3．中点坐标公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

4．$\triangle ABC$重心$G(x,y)$，则

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

三、对称点的坐标

已知点$P(a,b)$。

1．关于y轴对称：$(-a,b)$。

2．关于x轴对称：$(a,-b)$。

3．关于原点对称：$(-a,-b)$。