非线性弹性理论基础

李卓球　董文堂　编著

科学出版社
www.sciencep.com

非线性弹性理论基础

李卓球　董文堂　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在直角坐标系和正交曲线坐标系下，系统地分析了连续介质有限变形过程中的应力、应变及它们之间的关系，建立了非线性弹性问题的平衡微分方程、几何方程、协调方程和本构方程，系统地论述了线弹性和非线弹性问题的变分原理，并将有关理论应用到板壳结构的非线性分析上，此外还就与非线性弹性理论相关的张量、偏微分算子、正交曲线坐标等内容做了简要的介绍。

本书可供力学、土木、机械、航空、地矿等专业的科技工作者和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性弹性理论基础/李卓球，董文堂编著.一北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-013715-9

Ⅰ.非… Ⅱ.①李…②董… Ⅲ.非线性弹性力学 Ⅳ.0343.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059666 号

责任编辑：杨家福 / 责任校对：李奕萱
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1—3 000 字数：197 000

定价：22.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自 1992 年以来，我在武汉理工大学（原武汉工业大学）为研究生开设了“非线性弹性力学基础”与“结构非线性分析”等课程，并编写了相应的讲义。通过教学以及进一步学习，使讲义不断更新和提高，逐步形成为本书的初稿。2002 年董文堂教授参加本书的编写，重点编写了第 1 章、第 2 章和第 6 章的 6.1、6.5、6.6 三节，并对第 3 章、第 4 章、第 5 章的部分内容进行了修改和充实。

本书主要介绍固体结构的非线性弹性理论的基本概念、基本理论和基本分析方法。第 1 章主要介绍与本书内容相关的数学基础，主要包括张量分析与微分几何基础；第 2 章采用张量分析方法对线弹性力学理论进行了描述和回顾；第 3 章介绍非线性弹性体的几何应变学基础理论；第 4 章介绍了非线性弹性体的应力描述与基本方程；第 5 章介绍了线性与非线性弹性理论的变分原理和方法；第 6 章介绍了板壳结构的非线性分析和部分求解方法。书后附录 A 中给出了 Riemann-Christoffel 张量的协变分量 $R_{ik\lambda\mu}$ 表达式的推导过程，附录 B 给出四边简支板非线性弯曲问题计算机求解程序。

在本书的编写过程中，参阅了有关著作和文献，受益匪浅，特在此向相关作者表示衷心感谢！

本书既可作为相关研究生的教材，又可供有关科技人员参考。

由于水平有限，书中难免有误，恳请同行与读者批评指正。

李卓球

2004 年 3 月于武汉

目　　录

第 1 章 应用数学基础

1.1 张量分析基础

1.1.1 指标符号

在数学和物理学中，一个几何量或一个物理量常需要使用一组与坐标系有关的标量函数来表示或确定，例如三维空间中一向量 P，使用 3 个直角坐标分量（p_x，p_y，p_z）方可确定。在弹性力学中，一点的应力状态 σ 需要 9 个直角坐标分量（σ_{xx}，σ_{xy}，σ_{xz}，σ_{yx}，σ_{yy}，σ_{yz}，σ_{zx}，σ_{zy}，σ_{zz}）来表示。显然，这些分量可以统一写成简洁的表达形式 $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$，但写法不同表达的意思不同。对于 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，若记作 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称下标 i 为指标，括号内标明 i 的取值范围，则表示是一组变量；若未标明 i 的取值范围，只单写 x_i，则只表示是一组变量中的某一个变量。因此，使用指标符号时，必须指出其范围。在笛卡儿直角坐标系中，指标 i 只用下标。运用指标符号，使几何、物理和力学量的表达十分简洁，如：$u_i(i=1,2,3)$表示一点位移分量 u,v,w；$p_i(i=1,2,3)$表示力矢 $\mathbf{P}$ 在三个坐标轴上分量 p_x,p_y,p_z；$\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$表示一点应力的 9 个分量；$e_{ij}(i,j=1,2,3)$表示一点的应变分量，写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

类似地，一组 27 个量可标识为 a_{ijk}，一组 81 个量可标记为 b_{ijkl}，如此类推。在数学分析中，指标符号一般与坐标系没有对应关系；但在张量分析中，指标与坐标系是对应的，指标被赋值，则所得的数组就是一几何量或物理量在坐标中的分量。

1.1.2 求和约定

在张量分析中，为了简洁地表示一个带有指标符号的表达式，常使用 Einstein 求和约定。即凡在表达式中的同一项内，同一种指标重复一次且仅重复一次，就表示对该指标在它的取值范围内遍历求和，如：$a_ix_i(i=1,2,\cdots,n)$表示 n 项的和，即

$$a_ix_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{1.2}$$

式中 n 是 i 的取值范围，是一个具体的数。再如

$$a_{ij}b_ic_j = a_{11}b_1c_1 + a_{12}b_1c_2 + a_{13}b_1c_3 + a_{21}b_2c_1 + a_{22}b_2c_2 + a_{23}b_2c_3 + a_{31}b_3c_1 + a_{32}b_3c_2 + a_{33}b_3c_3 \quad (i,j=1,2,3) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (i=1,2,3) \tag{1.4}$$

上述诸式中的指标 i、j 重复均表示求和，这种指标称为哑标，哑标适用于字母指标，即它可任意由其他字母代替，如式(1.4)可用 j 代替 i，求和后便消失。数字指标是确定的值，不存在求和运算，如 σ_{33} 代表 σ_z，不能用 σ_{22} 代替，也不允许换标。

Einstein 求和约定中，定义同一项出现两次以上指标重复为错误写法，运算规则也不允许。在实践运算中，这种标例又常出现，如两个求和项的乘积 $(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$ 等，处理这种等式要根据哑标的定义，将 $\sigma_{ii}\cdot\sigma_{ii}$ 写成 $\sigma_{ii}\cdot\sigma_{jj}$ 即妥，亦可做专门说明或注释求和与否。

在分式或求导记号中，求和约定法则仍然适用，如

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{1i,i} &= \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \quad (i=1,2,3) \\
a_{i,i} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (i=1,2,3) \\
b_{i,jj} &= \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_3^2} \quad (j=1,2,3)
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

凡在同一项中不重复出现的指标，称作自由标。自由标号表示该组变量中任何一项，如 $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$ 表示 9 个应力分量中的任何一个。在同一方程中，各项的自由标号应当相同，且不能任意地用另一种自由指标代替。如弹性力学平衡方程可写为式子

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i,j=1,2,3) \tag{1.6}$$

式中，j 是哑标，i 是自由标，此方程的形式在自由标变化范围内均可适用。i 代表一个坐标方向，显然第一项的 i 必须与第二项 i 相同。从上式可以看出，通过哑标可以把多项式写成一项，通过自由指标又把多个方程缩写成一个方程，使书写变得十分简洁；但许多重要含义往往表现在指标的细微变化上，不熟练就容易出错。

1.1.3 Kronecker δ_{ij} 符号

δ_{ij} 的定义为

$$\delta_{ij} = e_i \cdot e_j \tag{1.7a}$$

即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,3) \tag{1.7b}$$

上式表示 9 个量，其中

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

δ_{ij} 可表示为单位矩阵

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.7c}$$

δ_{ij} 符号在数学分析中常会遇到，但它只是一种数学符号，其上的指标与坐标系没有对应关系。它的重要作用在于作为指标替换，简化表达式，在张量分析中有广泛和重要的应用。由定义可导出下列一系列关系式：

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3 \\ &\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \\ &\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km} = \delta_{im} \\ &a_{ij}\delta_{ik} = a_{kj} \\ &a_i\delta_{ij} = a_j \\ &a_{ij}\xi_j - \lambda\xi_i = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})\xi_j \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{jk} \tag{1.9}$$

上述关系式均可由定义和之前的求和约定得证。

在直角坐标系中，δ_{ij}与坐标轴单位矢量有以下关系：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \\ &x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

1.1.4 Ricci 符号 e_{ijk}

置换符号 e_{ijk}的定义为

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当}(i,j,k)\text{ 为}(1,2,3)\text{ 的偶次置换} \\ -1, & \text{当}(i,j,k)\text{ 为}(1,2,3)\text{ 的奇次置换} \\ 0, & \text{当}(i,j,k)\text{ 中指标有重复时} \end{cases} \tag{1.11}$$

e_{ijk}符号共有 27 个分量，下标不重合的排列组合有 3！＝6 种，其中 i、j、k 成顺时针排列的有三种，即(1,2,3)、(2,3,1)、(3,1,2)，成逆时针排列的也有 3 种，即(1,3,2)、(3,2,1)、(2,1,3)，下标重复排列有 21 种。由定义有

$$\left.\begin{aligned} &e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ &e_{132} = e_{321} = e_{123} = -1 \\ &e_{111} = e_{112} = e_{113} = \cdots = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = -e_{ikj} = -e_{kji} = -e_{jik} \\ &e_{ijk}e_{ijk} = 6 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

置换符号常用于简化表达式，例如三阶行列式

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} = e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} \tag{1.14}$$

或

$$a = \frac{1}{6}e_{pqr}e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr} \quad (i,j,k = 1,2,3;p,q,r = 1,2,3) \tag{1.15}$$

e_{ijk}与 δ_{ij}和基矢量有如下关系：

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq} \tag{1.16}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = e_{ijk}\mathbf{e}_k \tag{1.17}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_{ijk}\mathbf{e}_i u_j v_k \tag{1.18}$$

e_{ijk}符号在直角坐标中常用，指标与直角坐标系直接联系，此时它为张量。

1.1.5 坐标变换

设在三维欧式空间中任选两个新、老坐标系，x_i' 和 x_j 是同一空间点 P 的新、老坐标值，则方程组

$$x_i' = x_i'(x_j) \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.19}$$

这个从老坐标向新坐标的坐标转换称为正变换，对应的逆变换为

$$x_j = x_j(x_i') \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.20}$$

对式(1.19)微分

$$\mathrm{d}x_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{1.21}$$

$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$可看作系数，故上式给出了由老坐标微分 $\mathrm{d}x_j$ 确定新坐标微分 $\mathrm{d}x_i'$ 的线性变换。若其系数行列式

$$\left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3'}{\partial x_3} \end{vmatrix} = J \tag{1.22}$$

处处不为 0，则存在相应的逆变换，即可反过来可用 $\mathrm{d}x_i'$ 唯一地确定 $\mathrm{d}x_j$。由单值、一阶偏导数连续且行列式 J 不为零的转换函数所实现的坐标变换称为容许变换；当 $J>0$ 则称为正常变换，它把一个右手坐标系变换成另一个右手坐标系；当 $J<0$ 则称为反常变换，它把一个右手坐标系转换成左手坐标系。张量分析中使用的变换

大都是正常变换。

在笛卡儿直角坐标系中，坐标变换常写成矩阵形式

$$\left.\begin{aligned}\{x'\} &= [a]\{x\}\\ \{x\} &= [a]^{\mathrm{T}}\{x'\}\end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

其中$[a]$称为转换矩阵，有下列关系：

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

$$[a]^{\mathrm{T}} = [a]^{-1} \tag{1.25}$$

$$a_{i'j} = \cos(\mathbf{e}_{i'},\mathbf{e}_j) \qquad (i',j = 1,2,3)$$

1.1.6 笛卡儿张量的一般定义

力学中常用的量可分为三类：只有大小没有方向性的物理量称为标量，例如温度 T、密度 ρ、时间 t 等；既有大小又有方向性的物理量称为矢量，如矢径 $\mathbf{r}$、位移 $\mathbf{u}$、速度 $\mathbf{v}$、力 $\mathbf{F}$ 等；具有多重方向性的更为复杂的物理量称为张量，例如一点的应力状态 σ，其应力分量同时取决于截面的法线方向和应力分解方向，即具有双重方向性。任何表示某种物理实体的物理量，包括标量、矢量和张量都不会因人为选择不同参数坐标系而改变其固有的性质。然而矢量或标量的分量则与坐标选择密切相关。例如力的大小和方向与坐标选择无关，但力的分量是随坐标转动而改变的。随坐标转换而千变万化的分量间应该满足一定的转换规律才能反映矢量或张量与坐标选择无关的不变性，体现这个转换规律的一类量被 A. Einstein 定名为张量。

满足确定的任意曲线坐标系变换的张量称为一般张量，满足笛卡儿直角坐标系变换的张量定义为笛卡儿张量。张量分量中所含自由指标的数目叫张量的阶，在三维 Euclid 空间中，每一个指标变化从 1～3，故 n 阶张量将有 3^n 个分量。

对于标量，它不随坐标系不同而变化，故其只有一个分量，若用张量表示，未含有自由指标，$n=0$，即零阶张量，$3^n=3^0=1$。

对于矢量，它同时具有大小和方向，在每个坐标均有一个分量，在三维空间中共有 3 个分量，这些分量在坐标变换时要产生变化，变化须服从如下转换规律：

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \beta_{i'j}x_j \qquad (i = 1,2,3)\\ x_j &= \beta_{i'j}x_i' \qquad (j = 1,2,3)\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

其中，x_i'、x_j 是 x 在新、老坐标系中的分量，$\beta_{i'j}=\dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}$是两个坐标系之间的转换系数。上转换规则与一阶张量的定义相同，有一个自由指标，$n=1$，具有 $3^1=3$ 个分量。

对于每个坐标方向都有一个矢量的变量系，它在三维空间就具有 9 个分量 T_{ij}，坐标变换时这些分量改变且满足如下转换规律：

$$\left.\begin{aligned} T'_{ij} &= \beta_{i'm}\beta_{j'n}T_{mn} \quad (i,j=1,2,3) \\ T_{mn} &= \beta_{i'm}\beta_{j'n}T'_{ij} \quad (m,n=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

式中，T'_{ij}和 T_{mn}是二阶张量 T 在新坐标系中的分量，$\beta_{i'm}$、$\beta_{j'n}$是转换系数，自由指标数目 $n=2$。任意二阶张量的分解式是

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \cdots + T_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \cdots \\ &= T_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \\ &= T'_{ij}\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j \end{aligned} \tag{1.28}$$

其中，$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 称为基张量。两个基矢量并写在一起只是作为一种记号，不作任何运算。二阶张量有 9 个分量和 9 个基。它们都随坐标转换而改变。

同理可定义高阶张量，如三阶张量

$$\mathbf{T} = T'_{ijk}\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\mathbf{e}'_k = T_{mnl}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_l \tag{1.29}$$

用并矢表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{abc} = (a_i\mathbf{e}_i)(b_j\mathbf{e}_j)(c_k\mathbf{e}_k) \\ &= a_ib_jc_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \\ &= T_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \end{aligned} \tag{1.30}$$

可见，张量的阶数等于并矢的数目。

在 n 维空间中，n 维 k 阶张量要用 n^k 个分量来确定。

1.1.7 张量代数

1. 加减

若有 $\mathbf{T}=T_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ 和 $\mathbf{S}=S_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$，则

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{T} \pm \mathbf{S} \\ B_{ijk} &= T_{ijk} \pm S_{ijk} \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

同维同阶的张量方可加减，其结果是一个同维同阶的新张量。

2. 数乘

若 $\mathbf{T}=\alpha\mathbf{S}$，则有 $T_{ij}=\alpha S_{ij}$，α 为一标量。

3. 点积

设矢量 $\mathbf{a}$ 与二阶张量 $\mathbf{T}$ 点乘，有：

(1) 矢左点乘

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = (a_k\mathbf{e}_k)\cdot(T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = T_{ij}a_k\delta_{ik}\mathbf{e}_j = T_{ij}a_i\mathbf{e}_j = b_j\mathbf{e}_j = \mathbf{b} \tag{1.32}$$

(2) 矢右点乘

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = (T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\cdot(a_k\mathbf{e}_k) = T_{ij}a_k\mathbf{e}_i\delta_{jk} = T_{ij}a_j\mathbf{e}_i = \mathbf{b} \tag{1.33}$$

其中

$$b_i = T_{ij}a_j$$

矢量与二阶张量点乘的结果是一个新的矢量。

4. 叉乘

(1) 矢左叉乘

$$\mathbf{a} \times \mathbf{T} = a_i\mathbf{e}_i \times T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = a_iT_{jk}(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = a_iT_{jk}(e_{ijl}\mathbf{e}_l)\mathbf{e}_k = a_iT_{jk}e_{ijl}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k \tag{1.34}$$

(2) 矢右叉乘

$$\mathbf{T} \times \mathbf{a} = T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \times a_i\mathbf{e}_i = T_{jk}a_i\mathbf{e}_j e_{kil}\mathbf{e}_l = a_iT_{jk}e_{kil}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l \tag{1.35}$$

(3) 两矢叉乘

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_j\mathbf{e}_j) \times (b_k\mathbf{e}_k) = e_{ijk}a_jb_k\mathbf{e}_i = c_i\mathbf{e}_i \tag{1.36}$$

易验证

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = e_{ijk}\mathbf{e}_i \\ &\mathbf{e}_i = \frac{1}{2}e_{ijk}\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

5. 并乘

设有两个不同维的张量

$$\mathbf{A} = A_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{B} = B_{lm}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m$$

并乘则为

$$\mathbf{T} = \mathbf{AB} = T_{ijklm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m \tag{1.38}$$

其分量关系为

$$T_{ijklm} = A_{ijk}B_{lm}$$

可以看出，并乘得到一新张量，张量的阶数等于原张量阶数之和，其指标结构按 **A**、**B** 指标结构并乘次序顺排，并乘不满足交换率，先变换后并乘与先并乘后变换结果一样。

6. 内积

设

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{B} = B_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$$

(1) 单点积

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = A_{ij}B_{kl}\mathbf{e}_i\delta_{jk}\mathbf{e}_l = A_{ij}B_{jl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = C_{il}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l \tag{1.39}$$

故

$$C_{il} = A_{ij}B_{jl}$$

二阶张量单点积的结果是一个新的二阶张量(i,l 为自由指标)，这种运算亦称为缩并，比并乘低两阶。

(2) 串双点积

$$A \cdot\cdot\, B = (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot\cdot\, (B_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) = A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}\delta_{il} = A_{ij}B_{ji} \tag{1.40}$$

运算顺序为“内内，外外”。

(3) 并双点积

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}=(A_{ij}\mathbf{e_i}\mathbf{e_j}):(B_{kl}\mathbf{e_k}\mathbf{e_l})=A_{ij}B_{kl}(\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_k})(\mathbf{e_j}\cdot\mathbf{e_l})=A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}=A_{ij}B_{ij} \tag{1.41}$$

运算顺序为“前前,后后”。

7. 商判则

由内积运算引出的一个判别张量的准则。它表示为:和任意矢量的内积为 $k-1$ 阶张量的量一定是一个 k 阶张量。

8. 常用特殊张量

(1) 零张量。全部分量为零,记为 0,在其他坐标系中也为零,即:若 $\mathbf{T}=\mathbf{0}$,则 $T_{ij}=0, T'_{ij}=0$。

(2) 单位张量。分量为 δ_{ij}的二阶张量,记为 I,即

$$\mathbf{I}=\delta_{ij}\mathbf{e_i}\mathbf{e_j}=e_1e_1+e_2e_2+e_3e_3$$

$$I'_{ij}=\beta_{i'k}\beta_{j'l}I_{kl}=\beta_{i'k}\beta_{j'l}\delta_{kl}=\beta_{i'k}\beta_{j'k}=\delta'_{i'j'}=\delta_{ij} \tag{1.42}$$

(3) 转置张量。设二阶张量 $\mathbf{T}=T_{ij}\mathbf{e_i}\mathbf{e_j}$,则定义

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}=T_{ij}\mathbf{e_i}\mathbf{e_j} \tag{1.43}$$

(1.43)式中的 $\mathbf{e_i}$ 与 $\mathbf{e_j}$ 的位置不能调换,否则相当于哑标换名,结果仍然是 T。

设 $\mathbf{a}$ 为矢量,则

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}},\quad T_{ij}a_j=a_jT_{ji}^{\mathrm{T}} \tag{1.44}$$

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}&=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\\(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}&=\mathbf{A}\end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

(4) 对称张量。转置后等于自身的张量的称为对称张量,即

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}},\quad T_{ij}=T_{ji} \tag{1.46}$$

(5) 反对称张量。转置后等于其负张量的张量称为反对称张量,即

$$\mathbf{T}=-\mathbf{T}^{\mathrm{T}},\quad T_{ij}=-T_{ji} \tag{1.47}$$

反对称张量有 $T_{ii}=0$。

(6) 球形张量。主对角线为 α 其余分量为零的二阶张量,它是数 α 与单位张量的数积,即

$$\mathbf{S}=\alpha\mathbf{I},\quad S_{ij}=\alpha\delta_{ij} \tag{1.48}$$

(7) 逆张量。二阶张量 $\mathbf{T}$ 的逆张量 $\mathbf{T}^{-1}$定义为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{I},\quad \mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{I}\\&T_{ij}T_{jk}^{-1}=\delta_{ik},\qquad T_{ij}^{-1}T_{jk}=\delta_{ik}\\&(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

(8) 正交张量。其定义为

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{I} \tag{1.50}$$

显然满足 $\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$。

(9) 置换张量。以 e_{ijk} 为分量的三阶张量

$$\mathbf{e} = e_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = e'_{ijk}\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j\mathbf{e}'_k \tag{1.51}$$

(10) 各向同性张量。全部分量均不因坐标变换而改变的张量称为各向同性张量。标量、单位张量、球张量、置换张量均是各向同性张量。

一般的四阶各向同性张量分量 A_{ijkl} 具有下列形式：

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.52}$$

其中，λ 和 μ 为两个独立的标量。

9. *主方向与主分量*

一个矢量 **a** 和张量 T 的点乘将是另一个矢量 b，即

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b},\quad T_{ij}a_j = b_i \tag{1.53}$$

矢量 **a**、**b** 一般不同向。由此可知，二阶张量可定义为将矢量 **a** 变换为 **b** 的线性变换算子。若选择 **a**，使其通过 T 作线性变换后的 **b** 恰好平行于 **a**，则有

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}(\lambda\text{ 为标量})$$

写成

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{a} = 0$$

或

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.54}$$

上式中，λ 和 a_j 均为未知量。a_j 存在非零解的充分必要条件是 $|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$，即

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.55}$$

展开得到关于 λ 的特征方程

$$\lambda^3 - \mathbf{I}_1\lambda^2 + \mathbf{I}_2\lambda - \mathbf{I}_3 = 0 \tag{1.56}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= T_{ii} \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \\ \mathbf{I}_3 &= e_{ijk}T_{1i}T_{1j}T_{3k} \end{aligned}\right\} \tag{1.57}$$

特征方程(1.56)的三个特征根称为张量 **T** 的主分量。

当 **T** 是实对称张量时，存在三个实特征根 $\lambda_{(k)}(k=1,2,3)$。将每个 $\lambda_{(k)}$ 代回到 $(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})a_j=0$ 式，由单位矢量条件 $a_ia_j=1$，可解出相应的方向余弦 $a_{j(k)}$，三个单位矢量 $\mathbf{a}_{(k)}=a_{j(k)}\mathbf{e}_j$ 称为张量 **T** 的主方向。

10. *加法分解*

任何二阶张量 **T** 均可分解为对称张量 **N** 和反对称张量 **Ω** 之和，即

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} + \mathbf{\Omega} \tag{1.58}$$

其中

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}})$$

而对称张量 $\mathbf{N}$ 又可分解为球形张量 $\mathbf{P}$ 和偏斜张量 $\mathbf{D}$ 之和

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} + \mathbf{D}, \quad N_{ij} = P_{ij} + D_{ij} \tag{1.59}$$

其中

$$P_{ij} = \frac{1}{3}N_{kk}\delta_{ij}, \quad D_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{3}N_{kk}\delta_{ij}$$

11. 乘法分解

设 $\mathbf{T}$ 为任意一个可逆的二阶张量，则它可以分解为

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}_2 \tag{1.60}$$

其中 $\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$ 为单位正交张量，$\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$ 为正定对称张量。可以证明 $\mathbf{R}_1=\mathbf{R}_2=\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 表示旋转，$\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$ 代表纯变形，$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}$ 称为右极分解，$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}_2$ 称为左极分解，于是 $\mathbf{T}$ 对应的线性变换可写为

$$\mathbf{T} \cdot \alpha = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \alpha = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \alpha \tag{1.61}$$

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \alpha$ 表示先变形后转动，$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \alpha$ 表示先转动后变形。

12. 笛卡儿张量的微积分

考虑笛卡儿张量

$$\mathbf{T} = T_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$$

对 x_i 求偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{mm}}{\partial x_i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \tag{1.62}$$

$\frac{\partial T_{mm}}{\partial x_i}$ 可简写为 $T_{mn,i}$。当坐标转换时，若

$$T'_{rs} = \beta_{r'm}\beta_{s'n}T_{mn}$$

则有

$$T'_{rs,j} = \frac{\partial T'_{rs}}{\partial x'_j} = \beta_{r'm}\beta_{s'n}\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \beta_{r'm}\beta_{s'n}\beta_{j'i}T_{mn,i} \tag{1.63}$$

其中，由式(1.26)，有

$$\beta_{j'i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

引进 Hamilton 算子▽，其定义为

$$\mathbf{u}\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i\mathbf{e}_i = u_{j,i}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \tag{1.64}$$

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{e}_i\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i\partial_i\mathbf{u} = \partial_i u_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{1.65}$$

在矢量场和张量场中，一般说来

$$\mathbf{u}\nabla \neq \nabla\mathbf{u}$$

对二阶张量

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}\nabla &= T_{mn,i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_i \\ \nabla\mathbf{T} &= \partial_i T_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \end{aligned}\right\} \tag{1.66}$$

张量微分运用规则常用的有

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\nabla &= \mathbf{A}\nabla \pm \mathbf{B}\nabla \\ \nabla(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}) &= \nabla\mathbf{A} \pm \nabla\mathbf{B} \\ (\lambda\mathbf{A})\nabla &= \mathbf{A}(\lambda\nabla) + \lambda(\mathbf{A}\nabla) \\ \nabla(\lambda\mathbf{A}) &= (\nabla\lambda)\mathbf{A} + \lambda(\nabla\mathbf{A}) \\ (A_{ij}B_{rs})_{,p} &= A_{ij,p}B_{rs} + A_{ij}B_{rs,p} \end{aligned}\right\} \tag{1.67}$$

式中,λ 是坐标的函数。

单位张量 **I** 和置换张量 **e** 都是与坐标无关的恒张量,求导时作为常量处理。

1.2 正交曲线坐标

1.2.1 曲线坐标的概念

三维欧氏空间中任意点 M 的位置由三个笛卡儿坐标 $x_j(j=1,2,3)$唯一确定,也可以用三个任意独立参数 $\alpha_i(i=1,2,3)$作为参数坐标。两组坐标之间的转换关系为

$$x_j = x_j(\alpha_i) \tag{1.68}$$

或

$$\alpha_i = \alpha_i(x_j) \tag{1.69}$$

为了使两坐标间有一一对应关系,须满足

$$J = \left|\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \tag{1.70}$$

设由空间点 $M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$出发,让坐标 α_1 任意变化而 α_2 和 α_3 保持不变,可做出一条过 M 点的空间曲线,即坐标线 α_1,同样可以得到坐标线 α_2 和 α_3,如图 1.1 所示。令 α_1 和 α_2 任意变化而 α_3 保持不变,则相应的空间点的轨迹构成了坐标面 $\alpha_1\alpha_2$,同样可以得到坐标面 $\alpha_2\alpha_3$ 和 $\alpha_3\alpha_1$。很显然,相邻坐标面的交线就是坐标线,过每个空间点都有三个坐标面和三根坐标线。若在空间里的任意一点处坐标曲线都相互正交,相应的各坐标曲面也相互正交,这种坐标系称为正交曲线坐标系。常用的直角坐标、极坐标、球坐标、柱坐标都是它的特例。

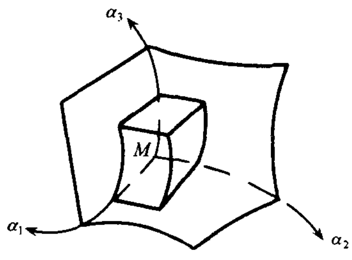

图 1.1