XIANXING DAISHU

田代军 张颖 崔石花 编

线性代数解题指南

（含空间解析几何）

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数解题指南
（含空间解析几何）

田代军　张颖　崔石花　编

天津大学出版社
[redacted]

内 容 提 要

本书通过课本内容精讲、典型例题归纳以及配套题目训练，系统地讲解了如何使用线性代数与空间解析几何的基本理论和方法去解决本课程中的各种问题.

本书分为向量代数与空间解析几何、方阵的行列式、矩阵、线性空间、线性方程组、线性变换、欧氏空间、二次型共8章.书末附有两套线性代数模拟试题.

本书可作为理工科本科生学习线性代数与空间解析几何的习题课教材，也可作为研究生入学考试的基础增强型辅导材料.本书还可供数学专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指南(含空间解析几何)/田代军，张颖，崔石花编.—天津：天津大学出版社，2004.9

ISBN 7-5618-2042-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①田… ②张… ③崔… Ⅲ.线性代数-高等学校-解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第101292号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 12.25
字　　数 366千
版　　次 2004年9月第1版
印　　次 2004年9月第1次
印　　数 1-3 000
定　　价 18.00元

前　言

本书是线性代数与空间解析几何的习题课教材.为方便读者使用,说明以下几点.

1.学习本课程,要做到理论清楚、计算熟练、灵活运用.在每章中,我们通过内容精讲概括基本理论,通过典型例题讲解基本方法,通过配套训练题巩固学习成果.

2.本书以知识点为核心组织题目.体现从知识点出发,先提出问题,再分析、解决问题,最后总结问题做强知识点的思想.期望达到以不变应万变的目的.

3.计算易而繁,证明妙而难,这是一般规律.本书在数值计算方面,做到模式化,但也注意适当使用技巧化繁就简,做理论指导下的计算;在命题证明方面,体现目的明确、思路清晰、方法得当的要求,做到知识板块(积木)化、工具(方法、技巧)系列化.

4.本书符合工科教学基本要求,并贯彻宽基础、高素质、有创新精神和实践能力的高水平人才培养目标.全书有600余道题目,可分为两类:

1)基本题,也称入门题.此类题目紧密联系基本理论和基本方法,必须完全掌握.

2)提高题,也称进阶题,题号右上角有星号标记.此类题目数量不多,约占全书1/10.它们理论性较强,其中有些与难点对应,有些综合程度较高,有些揭示线性代数与空间解析几何及微积分的联系.加“*”者稍有难度,经过努力可以掌握;加“**”者较难,不做基本要求,请读者量力而行.本书的内容精讲局部标有星号,如平面束方程、分块矩阵的初等变换、线性变换的运算及特征值与特征向量等.它们与配套题目一起,同属于选学内容,以读者所用课本为准.

本书题目典型而全面.基本题部分选用了大量历届研究生入学线性代数考题.除常见典型题外,我们还设计了一些针对性、技巧性较强的新题,来帮助读者全面、深刻地掌握本课程.书中部分题目一题多解,

读者既要比较各种解法的优劣和繁简，也要体会如何从不同角度，用不同知识点和方法解决同一问题.

本书题目都有解答，仅供参考.务请读者正确对待，不要丧失了通过做题掌握、熟练理论和技巧的机会.

另外，本书各章内容精讲可以作为讲义提纲使用.书末附有两套线性代数模拟试题，供非数学专业本科生做期末测试之用.

本书第1,7,8章由张颖执笔；第2,5章及模拟试题由崔石花执笔；第3,4,6章由田代军执笔；全书由田代军统稿.

本书编写过程中，承蒙杨奇教授关心指导，使我们受益匪浅；教改立项得到数学系主任边馥萍教授及教务处领导的支持；顺利出版全赖天津大学出版社编辑同志的辛勤劳动；本书全稿由齐植兰教授审阅，提出了许多有益的意见和建议；还有多年来传帮带我们的诸位老教师们，在此一并致以最诚挚的谢意.

由于我们水平有限，书中不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编者

2003年12月

符号说明

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{P}$	数域(通常指 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{R}^n$	实 n 维(列)向量空间
$\mathbf{C}^n$	复 n 维(列)向量空间
$\mathbf{P}^n$	数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 维(列)向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{P}^{m\times n}$	元素取自 $\mathbf{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{E}_n$	n 阶单位矩阵
D_n	n 阶行列式
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ 或 $\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 或 $r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的线性方程组的增广矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^*$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的各元素取复共轭的矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素为 0 的矩阵
$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为主对角元的对角矩阵

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	第 i 个 n 维基本向量,即第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的 n 维向量
$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$\mathbf{R}[x]_n$	x 的次数不超过 n 的一元实系数多项式连同零多项式组成的集合
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$	由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间
$\mathrm{1}$	单位变换(或恒等变换)
O	零变换
$L(V)$	线性空间 V 的所有线性变换组成的集合
$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(或等价)
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相合(或合同)
$V\cong V'$	线性空间 V 与 V' 同构
$A\Rightarrow B$	A 蕴涵 B;即若 A 成立,则 B 成立;即 A 是 B 的充分条件;也即 B 是 A 的必要条件
$A\Leftrightarrow B$	A 等价于 B;即 A 成立当且仅当 B 成立;也即 A 是 B 的充分必要条件
$\cdots$	省略号,表示未写出或不便一一写出的类似内容
$\square$	命题证明完毕,或不必再详细写出

目　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

内容精讲

$$\begin{cases}\text{数域}\\ \text{向量及其运算}\\ \text{平面与直线}\\ \text{曲面与曲线}\end{cases}$$

一、数域

(一)定义

设 **P** 是由复数组成的数集,其中含有 0 和 1.如果 **P** 对四则运算封闭,即其中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍在里面,则称 **P** 是一个**数域**.

注　定义要点:$\mathbf{P}\subset\mathbf{C}$;$0,1\in\mathbf{P}$;**P** 对四则运算封闭.

Q,**R**,**C** 都是数域,分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**.

最大的数域是 **C**,最小的数域是 **Q**.除 **Q**,**R**,**C** 外还有许多数域.

(二)运算律

建立数域概念有两点好处:其一,为更多代数概念的建立提供严格的前提;其二,数域中的运算所满足的基本规律构成了一个严整的公理体系,我们将借鉴它建立和研究更多的代数系统.

数域 **P** 中的基本**运算律**:$\forall a,b,c\in\mathbf{P}$.

关于加法

1)$a+b=b+a$;　(加法**交换律**)

2)$(a+b)+c=a+(b+c)$;　(加法**结合律**)

3) $a+0=0+a=a$; （加法**单位元**）

4) 有唯一的 $-a\in\mathbf{P}$，使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0;$$ （加法**逆元**）

关于乘法

5) $ab=ba$; （乘法交换律）

6) $(ab)c=a(bc)$; （乘法结合律）

7) $a1=1a=a$; （乘法单位元）

8) 若 $a\neq 0$，则有唯一的 $a^{-1}\in\mathbf{P}$，使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1;$$ （乘法逆元）

加法与乘法的联系

9) $a(b+c)=ab+ac$ 及 $(a+b)c=ac+bc$. （**分配律**）

在数域 $\mathbf{P}$ 中还有其他运算和规律，它们都是派生的. 例如，由 4) 可以定义减法：

$$a-b=a+(-b);$$

由 8) 可定义除法：

$$a/b=ab^{-1}(b\neq 0).$$

减法、除法分别是加法、乘法的**逆运算**.

二、向量及其运算

（一）向量的基本概念

1. 向量（矢量）

既有大小，又有方向的量. 常用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，…，或 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，…表示.

2. 向量的长度（模）

向量的大小. $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度记为 $|\boldsymbol{\alpha}|$.

3. 向量的负向量

与 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度相等，方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量. 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

4. 零向量

长度为零的向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定，或说方向任意.

5. 单位向量

长度为 1 的向量. 与非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{\alpha}^0$.

6.共线向量(平行向量)

与同一直线平行的向量.向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线记为 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

7.共面向量

与同一平面平行的向量.

8.向量在轴上的投影

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在正向与单位向量 $\boldsymbol{\xi}$ 一致的轴 l 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}\rangle.$$

(二)向量的运算

1.向量的线性运算

1)**加法**:可用**三角形法则**或**平行四边形法则**求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和.记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

2)**数乘**:实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 $k\boldsymbol{\alpha}$.

①当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $k=0$ 时,$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

②当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,若 $k>0$,则 $k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同;若 $k<0$,则 $k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反,且

$$|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|.$$

3)**减法**:$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$,其中 $-\boldsymbol{\beta}=(-1)\boldsymbol{\beta}$.减法是加法的逆运算.

4)运算律:以上三种运算统称为向量的**线性运算**,满足以下八条基本规律.

关于加法

①$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;　(加法交换律)

②$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;　(加法结合律)

③$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;　(加法单位元)

④$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;　(加法逆元)

关于数乘

⑤$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

⑥$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;　(数乘结合律)

加法与数乘的联系

⑦$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;　(第一分配律)

⑧$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$. （第二分配律）

总之，这八条运算规律使得几何向量的加法和数量乘法可以像数域中的数那样去运算.

2. 两个向量的数量积（点积、内积）

1）定义：两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**数量积** $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 是一个实数

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle,\text{其中}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\in[0,\pi].$$

2）运算律：

①$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$; （对称性）

②$(k\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot(k\boldsymbol{\beta})$; （线性性）

③$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$; （分配律）

④若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}>0$. （正定性）

3）数量积与投影的关系：

①$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha})|\boldsymbol{\beta}|=(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{\alpha}|$;

②$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}^0}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^0$，其中 $\boldsymbol{\beta}^0=\boldsymbol{\beta}/|\boldsymbol{\beta}|$.

3. 两个向量的向量积（叉积、外积）

1）定义：两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**向量积** $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是一个向量，满足

①$|\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$;

②$\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面；

③$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ **成右手系**.

2）运算律：

①$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$; （反交换律）

②$(k\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$; （数因子结合律）

③$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$, （左分配律）

$(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$. （右分配律）

3）几何意义：$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$是以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积.

4. 三个向量的混合积

1）定义：三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的**混合积** $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 是一个实数.

2）运算律：

①轮换对称性，即$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}]=[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

②$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=-[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]=-[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=-[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}]$.

3)几何意义:$|[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]|$是以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为相邻棱的平行六面体的体积.

(三)空间坐标系

与直线和平面上的情形类似,在空间中任意给定三个不共面的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$,则对任一向量 $\boldsymbol{\delta}$,都有唯一的一组实数 x,y,z,使得

$$\boldsymbol{\delta}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}+z\boldsymbol{\gamma}.$$

1.基与坐标

称有序的不共面向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为空间的一组**基**(或一个**坐标系**).

称三元有序数组$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$为向量$\boldsymbol{\delta}$ 在该基下的**坐标**,也可记为$[x,y,z]^{\mathrm{T}}$.

2.仿射坐标系

取定空间中一点 O,称$[O;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$为空间的一个**仿射坐标系**,其中 O 称为**原点**.过原点 O,且分别与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 同向的有向直线 Ox,Oy,Oz 依次称为 **x 轴**,**y 轴**,**z 轴**,并统称为**坐标轴**.平面 xOy,yOz,zOx 称为**坐标平面**.三个坐标平面把空间分为八个**卦限**.对于空间中任一点 M,称其**向径**$\overrightarrow{OM}$在基$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 下的坐标$[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ 为点 M 在该坐标系下的坐标,记点 M 为$M(x,y,z)$.

3.直角坐标系

如果 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量,则称坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$为空间的一个**直角坐标系**.我们一般采用右手直角坐标系.以$[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ 为坐标的向量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 也可记为$\{x,y,z\}$.

4.三维几何空间

取定坐标系$[O;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$后,空间中的点 $M(x,y,z)$,向径$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}+z\boldsymbol{\gamma}$,坐标$[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ 之间就建立起一一对应关系.因此也常用三元有序实数组的集合 $\mathbf{R}^3$ 来表示几何向量的集合——**三维几何空间**,而且向量的所有运算都可以用坐标表示.

(四)向量及其运算的坐标表示法·向量之间的关系

以下讨论均在空间直角坐标系中进行.

1.向量及其运算的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{\beta}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\boldsymbol{\gamma}=\{c_1,c_2,c_3\}$.

1)$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};$$

与非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}=\left\{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right\}$$

$$=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

其中 α,β,γ 分别为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ **的方向角**；$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ **的方向余弦**，满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间中两点，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2)$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\}$；

$k\boldsymbol{\alpha}=\{ka_1,ka_2,ka_3\}$；

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k};$$

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

2.向量之间的关系

1)$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

2)$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线，即 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 成比例，即 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$

$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数 k,l,使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$;

3)非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角可由下式求出

$$\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

4)$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面

$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=0$.

三、平面与直线

(一)方程

1. 平面方程

1)点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为平面上的已知点,$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的**法向量**.

2)一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A,B,C 不全为零.

3)三点式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三个不共线的已知点.

4)截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

其中 a,b,c 分别为平面在三个坐标轴上的**截距**.

5)* 过平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线的**平面束**的方程为