高等代数学习指导

蔺小林 编著

陕西人民出版社

高等代数学习指导

蔺小林 编著

陕西人民出版社

(陕)新登字 001 号

图书在版编目(C I P)数据

高等代数学习指导/蔺小林编著. —西安：陕西人民出版社，2002

ISBN 7-224-06263-4

Ⅰ.高...　Ⅱ.蔺...　Ⅲ.高等代数—教学参考资料
Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057956 号

书　　名：高等代数学习指导
编　　著：蔺小林
出版发行：陕西人民出版社(西安北大街 131 号 邮编:710003)
印　　刷：陕西科技大学印刷厂
开　　本：850×1168 毫米　32 开　11.875 印张
字　　数：297 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1—500
书　　号：ISBN 7-224-06263-4/O・6
定　　价：18.00 元

(图书如有质量问题请与陕西人民出版社发行部联系，电话:7216020)

前　言

学生在学习高等代数的过程中,往往感到高等代数很抽象,难以学好,希望有相关的学习参考书给予指导,而这方面的指导书又较少,因此我们在几年高等代数教学的基础上编写了《高等代数学习指导》一书,以便帮助学生学好高等代数这门课程。

本书由十一章组成:每章首先是把相关的基本概念、基本结论小结出来,以便学生在复习时一目了然;其次选编了部分例题,有是非题、选择题、基本概念和运算方面的计算题,也有少部分较难的证明题,通过学习这些例题,加强学生对相关内容的理解;第三,选编了高等代数相关内容的练习题并进行解答。

我们不希望本书成为学习高等代数课程学生的作业本,在高等代数的学习中,只有深刻理解书中内容,融会贯通,在做较难的题目时才能得心应手。做题可加深我们对基本概念、基本内容、基本方法的理解和掌握,起到举一反三的目的,一种解题方法若是经过你自己的努力得到,或是从别人那里学来或是听来,只要经过自己亲身体验,那么对你来说就可以成为一种模式,当你遇到相似的问题时,你就可以仿照去做。希望用到本书的同学,不要照抄照搬题目解法进而束缚了自己的思想,要刻苦钻研,积极思考,方法灵活多样,把它变为自己的思想。

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。

编　者

2002 年元月

目　　录

第一章　一元多项式及多元多项式

一　内容提要

数域　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1，如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数，那么 P 称为一个**数域**。

Q:有理数域;**R**:实数域;**C**:复数域。

结论:所有的数域都包含有理数域作为它的一部分。

一元多项式　设 n 为一非负整数，形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

(其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 全属于数域 P)称为系数在数域 P 中的一元多项式，或简称为数域 P 上的一元多项式。n 为其次数，记为 $\partial(f(x))=n$。

零多项式　系数全为零的多项式。零多项式是唯一不定义次数的多项式。

零次多项式　非零常数为零次多项式。

注意区分零多项式与零次多项式。

两多项式相等　如果在两个多项式中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，那么这两个多项式就称为相等。

一元多项式环　所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$，P 称为 $P[x]$ 的系数域。

多项式可进行加法、乘法及除法运算。在除法中有**带余除法**和**整除**，判别方法和性质为:

1. 对数域 P 上的任意两个多项式 $f(x),g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零。

2. 如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=Cg(x)$，其中 C 为非零常数。

3. 如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，那么 $f(x)\mid h(x)$。

4. 如果 $f(x)\mid g_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$，那么对任何多项式 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_r(x)$，有

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))。$$

5. 两个多项式之间的整除关系不因为系数域的扩大而改变。

最大公因式 设 $f(x),g(x)$ 是 $P[x]$ 中两个多项式，$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，如果 $d(x)$ 满足：

1° $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$；

2° 若 $\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$，则 $\varphi(x)\mid d(x)$。

注意区分公因式与最大公因式的差别。

用辗转相除法可以求两个多项式的最大公因式。

对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x),g(x)$，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$ 可以表示成 $f(x),g(x)$ 的一个组合，即有 $P[x]$ 中多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

此结论说明对任何两个多项式，其最大公因式是存在的，并且可以写成该两个多项式的一个线性组合，其中 $u(x),v(x)$ 可通过辗转相除法具体求出。

但此结论的逆是不正确的，即若 $\varphi(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，则 $\varphi(x)$ 并不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，当然也不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。

$(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 首项系数为 1 的那个最大公因式。

互素　$P[x]$中两个多项式 $f(x),g(x)$,若$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$互素。

多项式互素的判别方法与其性质:

1. $P[x]$中两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$互素的充分必要条件为有 $\boldsymbol{P}[x]$中多项式 $u(x),v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

2. 若$(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$。

3. 若 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

不可约多项式　数域 P 上次数$\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$,如果它不能再表示成数域 P 上两个次数比 $p(x)$低的多项式的乘积,则称 $p(x)$为数域 P 上的不可约多项式。

一次多项式总是不可约的。

一个多项式是否可约是**依赖于系数域的**。

不可约多项式的重要性质:如果 $p(x)$是不可约多项式,那么对于任意的两个多项式 $f(x),g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$一定有 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$。

因式分解及唯一性定理　数域 P 上每一个次数$\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积,所谓唯一性是说,如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有 $s=t$,并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=C_iq_i(x)\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

其中 $C_i(i=1,2,\cdots,s)$是一些非零常数。

k 重因式　不可约多项式 $p(x)$满足(1) $p^k(x)\mid f(x)$,(2) $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称不可约多项式 $p(x)$为多项式 $f(x)$的 k 重

因式。$k=0$，$p(x)$不是 $f(x)$的因式；$k=1$，$p(x)$是 $f(x)$的**单因式**；$k>1$，$p(x)$称为 $f(x)$的 k **重因式**。

重因式的性质：

1. 如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式（$k\geqslant 1$），那么 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式。

此性质的逆是不成立的，如 $p(x)=x-1$ 是 $f'(x)=7(x-1)^6$ 的 6 重因式，但不是 $f(x)=(x-1)^7+1$ 的 7 重因式。

2. 如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式（$k\geqslant 1$），那么 $p(x)$是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式。

3. 不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$重因式的充分必要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式。

4. 多项式 $f(x)$没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素。

余数定理 用一次多项式$(x-\alpha)$去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$。

α 是 $f(x)$的 k 重根的充分必要条件为$(x-\alpha)^k\mid f(x)$，当 $k=1$时，α 称为 $f(x)$的**单根**，当 $k>1$ 时，α 称为 $f(x)$的**重根**。

关于多项式的根，有如下结论：

1. $P[x]$中 n 次多项式（$n\geqslant 0$）在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算。

2. 每个次数$\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一根，（即每个次数$\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中一定有一个一次因式）此为**代数基本定理**。

3. 每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根（重根按重数计算）。

4. 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$的复根，那么 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$的根。

复系数多项式因式分解定理 每个次数$\geqslant 1$ 的复系数多项式

在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积。即

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数，$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 是正整数。

实系数多项式因式分解定理 每个次数≥1的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积，即

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中 $c_1,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r$ 全是实数，$l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_r$ 是正整数，并且 $p_i^2-4q_i<0(i=1,2,\cdots,r)$即 $x^2+p_ix+q_i$ 在实数域上不可约。

本原多项式 如果一个非零的整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

其系数 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 没有异于±1的公因子，即它们是互素的，称此多项式为一个本原多项式。

高斯(Gauss)引理 两个本原多项式的乘积还是本原多项式。

整系数多项式有理根的求法 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式，而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么必有 $s|a_n,r|a_0$，特别地，当 $f(x)$的首项系数 $a_n=1$ 时，$f(x)$的有理根都是整数根，而且是 a_0 的因子。

我们可以用判别一个整系数多项式有无有理根的方法来判别它在有理数域上是否可约，但要注意的是：若一个整系数多项式在有理数域上是不可约的，则它必无有理根，反之，并不一定正确，但对三次以下多项式是正确的，即在有理数域上三次及其三次以下多项式不可约的充分必要条件为该多项式在有理数域上无有理

根。

如 $f(x)=x^4+x^2+1$，容易验证 $f(x)$ 在有理数域上无根，但不能肯定 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的，事实上 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$，它是可约。

整系数多项式不可约的艾森斯坦因(Eisenstein)判别法 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式，如果有一个素数 p，使得

1. $p\nmid a_n$
2. $p\mid a_{n-1},\cdots,a_0$
3. $p^2\nmid a_0$

那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

有理数域上存在任意次数的不可约多项式。

实数域上只有一次和二次不可约多项式。

复数域上只有一次不可约多项式。

***n* 元对称多项式** n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果对于任意的 $i,j,1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，都有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

那么这个 n 元多项式称为 n 元对称多项式。

***n* 元初等对称多项式**

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$$

重要结论 对于任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都唯一存在一个 n 元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$$

这就是**对称多项式基本定理**。

二 例 题

例 1 判断下列论断的正误

(1) 对多项式 $f(x)$, $g(x)$,若存在多项式 $u(x)$, $v(x)$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。

(2) 对多项式 $f(x)$, $g(x)$,若存在多项式 $u(x)$, $v(x)$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

(3) 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid g(x)$ 或 $f(x)\mid h(x)$。

(4) 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$, 且 $(f(x),g(x))=1$, 则 $f(x)\mid h(x)$。

(5) 若 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根,则 α 必是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根。

(6) n 次多项式一定有 n 个根。

(7) 对整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,如果找不到素数 p,使得(1) $p\nmid a_n$,(2) $p\mid a_{n-1},\cdots,a_0$,(3) $p^2\nmid a_0$,则 $f(x)$ 在有理数域上一定是可约的。

(8) 在有理数域上只有一次和二次不可约因式。

(9) 若整系数多项式在有理数域上没有有理根,那么此多项式在有理数域上必不可约。

(10) 齐次多项式是对称多项式。

解 (1) 错误。由最大公因式的定义知,若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,则必存在多项式 $u(x)$, $v(x)$,使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,但反之并不成立,如令

$$f(x)=x+2 \qquad g(x)=x-1$$

而 $u(x)=x$, $v(x)=-x+1$ 则

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)=4x-1$$

显然 $d(x)\nmid f(x)$,$d(x)\nmid g(x)$,故 $d(x)$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。

(2) 正确。符合互素的定义。

(3) 错误。如令

$f(x)=(x-1)(x+1)$,$g(x)=x-1$,$h(x)=x+1$

显然 $f(x)\mid g(x)h(x)$,但 $f(x)\nmid g(x)$,且 $f(x)\nmid h(x)$。

(4) 正确。因为 $f((x),g(x))=1$,所以存在 $u(x)$,$v(x)$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

从而

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x)$$

因此 $f(x)\mid h(x)$。

(5) 错误。应是 n 次多项式在复数域内一定有 n 个根(重根按重次计算)。n 次多项式在实数域内不一定有根,如 $x^2+1=0$ 在实数范围内无根,但在复数范围内有两根 i 和 $-i$,因此说多项式有无根一定要说明在什么数域内才有意义。

(7) 错误。艾森斯坦因(Eisenstein) 判别法是充分性条件,不是必要性条件,更不是充分必要性条件,满足法别法的条件就能得到多项式不可约,否则得不到什么结果。

如令　$f(x)=x^4+x^2+1$,找不到满足条件的素数 p,但 $f(x)=x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 在有理数域上是可约的。

又如令 $f(x)=x^4+1$,找不到满足条件的素数,但令 $x=y+1$,有

$$f(x)=f(y+1)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2$$

此时素数 $p=2$,有 $p\nmid 1$,$p\mid 4,6,4,2$,但 $p^2\nmid 2$,由判别法知 $f(y+1)$ 不可约,故 $f(x)=x^4+1$ 在有理数域上不可约。

(8) 错误。在有理数域上有任何次数的不可约多项式。实数域

上只有一次和二次不可约因式，复数域上只有一次不可约因式。

(9) 错误。整系数多项式在有理数域上不可约，则必无有理根。反之不一定成立。

如 $f(x)=x^4+x^2+1$，在有理数域上无有理根，但 $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 在有理数域上可约。

又如 $f(x)=x^4+1$，在有理数域上无有理根，且 $f(x)=x^4+1$ 在有理数域上不可约。

应该注意的是，仅对三次以下多项式在有理数域上没有有理根就不可约，且不可约也就无有理根。即可用有无有理根来判定其可约性。

(10) 错误。齐次多项式不一定是对称多项式，当然对称多项式也不一定是齐次多项式。

例 2 试问 a,b,c 满足什么条件时，有 $(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$

解 设

$$x^4+bx^2+c=(x^2+ax+1)(x^2+mx+n)$$

比较两端系数有

$$a+m=0,am+n+1=b,an+m=0,n=c$$

消去 m,n 有

$$a^2+b-c-1=0,a(c-1)=0$$

从而有

$$\begin{cases}a=0\\b=c+1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}c=1\\b=2-a^2(a\neq0)\end{cases}$$

此时有 $(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$.

例 3 求 $f(x)=x^{60}+x^{59}+x^{53}+x^{50}$ 与 $g(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ 的最大公因式。

解 显然有

$$f(x)=x^{50}(x^{10}+x^9+x^3+1)g(x)=(x-2)(x^3+x^2+x+1)$$

又用 x^3+x^2+x+1 去除 $x^{10}+x^9+x^3+1$ 有

$$x^{10}+x^9+x^3+1=(x^3+x^2+x+1)(x^7-x^5+x^3-x+1)$$

而 $f(2)\neq 0$,故

$$(f(x),g(x))=x^3+x^2+x+1$$

例 4 多项式 $f(x)=x^3-46x^2+171x-127$ 在有理数域上是否可约?

解 $f(x)$ 若有有理根,只能是 ± 1 或 ± 127,但因 $f(1)\neq 0$, $f(-1)\neq 0$, $f(127)\neq 0$, $f(-127)\neq 0$ 故 $f(x)$ 无有理根。

由于三次多项式在有理数域上若可约,至少有一个有理根,所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例 5 设 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$,证明:若 $(f(x),g(x))=d(x)$,并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零,则 $(f_1(x),g_1(x))=1$;反之,若 $(f_1(x),g_1(x))=1$,则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。

证明 若 $(f(x),g(x))=d(x)$,则必存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零,故 $d(x)\neq 0$,从而有

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$$

即有

$$(f_1(x),g_1(x))=1$$

反之,若 $(f_1(x),g_1(x))=1$,则必存在多项式 $u_1(x)$ 和 $v_1(x)$,使

$$u_1(x)f_1(x)+v_1(x)g_1(x)=1$$

两端同乘 $d(x)$ 得

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=d(x)$$

设 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式,即 $m(x)\mid f(x)$,

$m(x) \mid g(x)$,从而由上式得 $m(x) \mid d(x)$。从题设知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,故 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

例 6 证明:$(f(x),g(x)h(x)) = 1$ 的充分必要条件是

$$(f(x),g(x)) = 1 \quad 与 \quad (f(x),h(x)) = 1$$

证明 因为$(f(x),g(x)h(x)) = 1$,则必存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x)h(x) = 1$$

从而有

$$(f(x),g(x)) = 1 \quad 且 \quad (f(x),h(x)) = 1$$

反之,若$(f(x),g(x)) = 1$ 且$(f(x),h(x)) = 1$,则必存在多项式 $u_1(x),v_1(x)$ 及 $u_2(x),v_2(x)$,使得

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = 1, u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x) = 1$$

两式相乘得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x) + u_2(x)v_1(x)g(x) + u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x) + [v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x) = 1$$

故

$$(f(x),g(x)h(x)) = 1$$

例 7 证明:$(f(x),g(x)) = 1$ 的充分必要条件是

$$(f(x),f(x) + g(x)) = 1$$

证明 因为$(f(x),g(x)) = 1$,则必存在多项式 $u(x)$,$v(x)$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

从而有

$$(u(x) - v(x))f(x) + v(x)(f(x) + g(x)) = 1$$

故

$$(f(x),f(x) + g(x)) = 1$$

反之,若$(f(x),f(x) + g(x)) = 1$,则必存在多项式 $p(x)$,