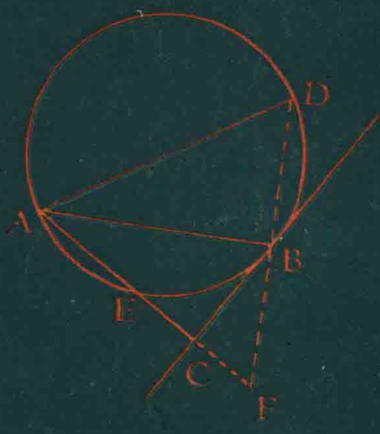
曾广钦 李 辉 编著

ZENYANGZUOFUZHUXIAN

怎样作辅助线



黑龙江科学技术出版社

怎样作辅助线

曾广钦　李　辉　编著

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

前　言

对于平面几何学来说，不论是证明题、计算题，还是作图题，常常涉及到作辅助线的问题。辅助线是沟通已知条件与求证结论的桥梁，因此，作辅助线是解几何题的重要手段。几何题千变万化，辅助线也是千变万化的。有些学生一遇到作辅助线的问题，往往感到无从下手。为了帮助中学生和初学平面几何的读者提高解几何题时作辅助线的能力和技巧，我们根据多年教学实践中积累的经验，总结了解几何题中的几种常用的辅助线及作辅助线的基本方法。这些方法均通过从平面几何题中选出的五十多道典型例题，作了比较详细的介绍。

由于编者水平所限，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编著者

1981年12月

目　录

一、辅助线及其用途

（一）什么叫辅助线

为解几何题的需要，在原题给定的图形上添置的线，叫作辅助线．辅助线分直线型和圆型两种，辅助线通常用虚线来表示．

例一（直线型辅助线）在五边形 $ABCDE$ 中，$AB//CD$，则$\angle A+\angle D+\angle E=360°$（图 1—1）．

已知：$AB//CD$．

求证：$\angle A+\angle D+\angle E=360°$．

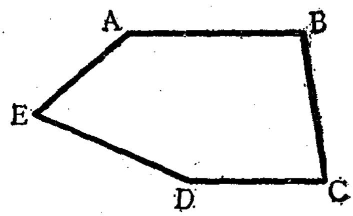


图 1—1

证法 1：过 E 点作 $EF//AB$（如图 1—2），

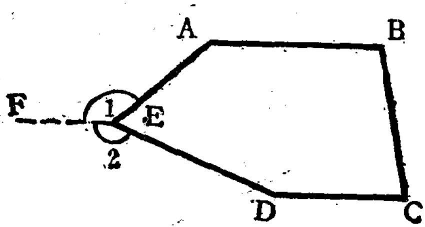


图 1—2

$\because AB//CD$，$AB//EF$，

$\therefore CD // EF$,

$\angle 1 = \angle A$，$\angle 2 = \angle D$（二直线平行，内错角相等）.

又$\angle 1 + \angle 2 + AED = 360°$（周角定义），

$\therefore \angle A + \angle D + \angle E = 360°$（等量代换）.

证法 2：过 E 点作 $EF // AB$，交 BC 于 F.

$\because EF // AB$，$AB // CD$，

$\therefore EF // CD$.

$\angle 1 + \angle A = 180°$

$\angle 2 + \angle D = 180°$

（二直线平行同旁内角互补），

$\angle 1 + \angle 2 + \angle A + \angle D = 360°$（等量加等量和相等）.

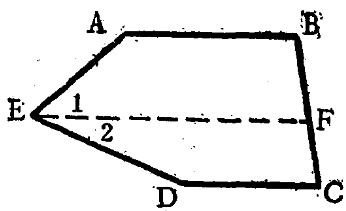


图 1—3

$\therefore \angle A + \angle D + \angle E = 360°$.

证法 3：延长 BA、DE 交于 F.

$\because FB // CD$，$\therefore \angle 2 + \angle D = 180°$，

$\angle D = 180° - \angle 2$（等量减等量差相等）.……(1)

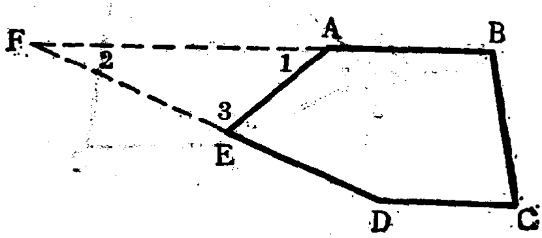


图 1—4

又对于$\triangle AEF$，

$\angle BAE=\angle 2+\angle 3$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），…………………………（2）

$\angle DEA=\angle 1+\angle 2$（三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和），…………………………（3）

把（1）、（2）、（3）两边分别相加得：

$\angle D+\angle BAE+\angle DEA=(180°-\angle 2)+(\angle 2+\angle 3)+(\angle 1+\angle 2)=180°+(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

又$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$（三角形三个内角和等于180°），

$\therefore \angle D+\angle BAE+\angle DEA=360°$.

证法 4：连结AC、CE，

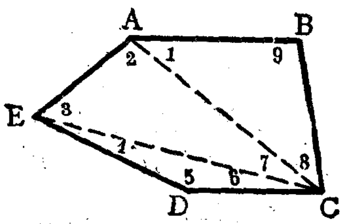


图 1—5

根据三角形的内角和定理，

$\angle 1=180°-(\angle 9-\angle 8)$，……（1）

$\angle 2+\angle 3=180°-\angle 7$ ……（2）

$\angle 4+\angle 5=180°-\angle 6$，……（3）

把（1）、（2）、（3）两边分别相加得：

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=540°-(\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9)$.

又$\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9=180°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=540°-180°=360°$，

即　$\angle A+\angle D+\angle E=360°$.

从以上几种证法，分别根据周角的定义，二直线平行同旁内角互补的定理，三角形内、外角定理作出直线型的辅助线，从而完成了本题的证明.

下面我们看一个有关圆型辅助线的例子.

例二　若$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线交对边于D点，那么$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

已知：$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线交BC于D.

求证：$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

证明：作$\triangle ABC$的外接圆，延长AD交外接圆于E，连结EC. 在$\triangle ABD$和$\triangle AEC$中，$\because AD$是$\angle A$的平分线，$\therefore \angle 1=\angle 2$（定义）. 又$\angle B=\angle E$（同弧圆周角相等），

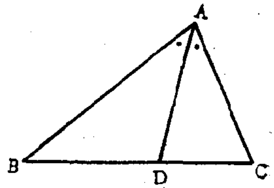


图　2—1

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle AEC$（如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似），$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AC}{AD}$（相似三角形对应边成比例）.

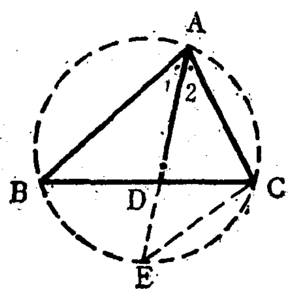


图　2—2

$\therefore AE\cdot AD=AB\cdot AC$，

又$AE=AD+DE$，

$\therefore (AD+DE)\ AD$

$=AB\cdot AC, AD^2+DE\cdot AD=AB\cdot AC.$

又 $DE\cdot AD=BD\cdot DC$（相交弦定理），

$\therefore AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$（等量代换），

即 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC.$

本题所给的条件不能直接找到有关比例式，如果作三角形的外接圆，我们就能得到圆中的有关比例线段，从而证出结论．作三角形（或多边形）的外接圆也是常用的辅助线．

（二） 辅助线的用途

解几何题，不论证明题、计算题或作图题，除少量简易题以外，常常要作辅助线．作辅助线的目的是要造成一个新的图形，达到集中条件、建立联系、找出隐含在给定条件的图形之中，有关图形的性质，借此达到解题的目的．

一般说来，辅助线有以下几方面的作用：

1．问题所给图形中，如果条件和结论之间的逻辑关联不明朗，通过作辅助线，将条件中所隐含的有关图形的性质显示出来，起显露隐含条件的作用．

例三（一九七八年高考数学试题）

已知：AB 是半圆的直径，C 是半圆上的一点，直线 MN 切半圆于 C 点，$AM\perp MN$ 于 M 点，$BN\perp MN$ 于 N 点，$CD\perp AB$ 于 D 点．

求证：（1）$CD=CM=CN$；

（2）$CD^2=AM\cdot BN$．

分析：我们先考虑求证中的（1）式，根据已知画出图形（图3—1），要证明$CD=CM=CN$，由证明线段相等的证题术（关于证题术，一般的几何参考书中都有专门论述，这里就不一一列举了），结合本题的已知条件，可证明这些线段分别所在的两组三角形全等．为此，很自然引出辅助线AC、BC（图3—2），

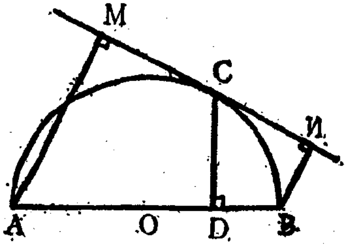


图 3—1

即可得出两组直角三角形，只要证明它们分别全等，也就是$Rt\triangle AMC\cong Rt\triangle ADC$，$Rt\triangle CDB\cong Rt\triangle CNB$即可．基本图形如图3—2—1所示，则可得$CD=CM$，$CD=CN$．

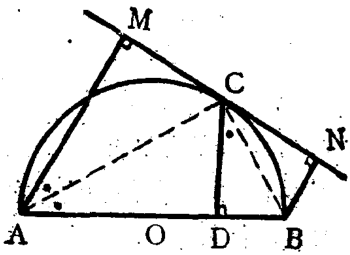


图 3—2

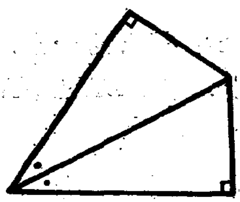


图 3—2—1

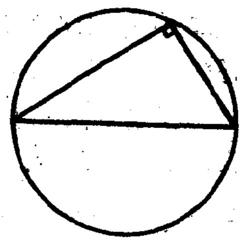


图 3—2—2

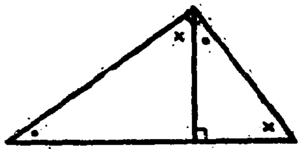


图 3—2—3

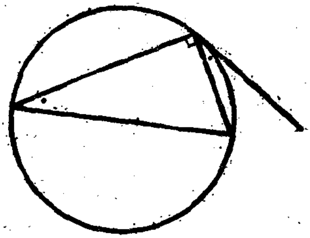


图 3—2—4

应用 AB 是直径这个条件，可得$\angle ACB = 90°$，见（图 3—2—2）；根据 $CD \perp AB$ 这个条件，可得$\angle BCD = \angle CAD$，$CD^2 = AD \cdot DB$，见基本图形 3—2—3；又应用 MN 是切线这个条件，可得$\angle BCN = \angle BAC$，见基本图形 3—2—4．这样一来，就可证明 $Rt\triangle AMC \cong Rt\triangle ADC$，$Rt\triangle CDB \cong Rt\triangle CNB$．从而得到 $CD = CM$，$CD = CN$．因此 $CD = CM = CN$．

通过上述分析可以看到，由于作了辅助线 AC、BC，就把已知条件中所隐含的四个基本图形显示出来了：①两组全等三角形（3—2—1）；②半圆上的圆周角（3—2—2）；③直角三角形斜边上的高（3—2—3）；④弦切角及其所对的圆周角（3—2—4）．进而应用它们的性质达到证题的目的．

但必须指出，不少学生在作辅助线时，由于没有按作图基础（附 1 ）来进行，所以常常发生下列错误：

（1）没有目的地乱引辅助线．所引的“辅助线”不但与证题无关，而且造成图形的混乱，影响思路。例如，有的学生毫无目的地连结 AN，BM．它们与欲证明的线段相等根本联系不上，这样反而使证题无法进行下去．

(2) 在作辅助线时，任意增加要求，以致发生逻辑上的错误．例如有的学生在证明此题时这样写道："连结 BC，使 BC 平分 $\angle DCN$……"这个学生就是违反了作图基础．既然连结 BC，就不能保证 BC 是 $\angle DCN$ 的平分线（这恰好是我们要证明的）．所以我们在添辅助线时，必须按作图基础进行，不能任意增加条件．就本题来说，若连结 BC，就必须证明 BC 是 $\angle DCN$ 的平分线；若过 C 点作 $\angle DCN$ 的平分线，就必须证明它经过 B 点．

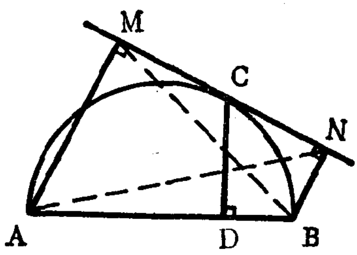


图 3—3

其实这种任意增加要求的现象，在学生的作业中是经常犯的毛病．例如，"连结 A、B 两点，使 AB 平行于已知直线 CD"、"过三角形 ABC 的三个顶点作圆，使它经过已知点 D"、"连结 A、B 两点，使 AB 经过已知点 C"……所有这些作法都是不行的，因前者的作法不能保证后者成立．初学者对此必须注意．

下面我们用两种书写格式给出本例的证明．

证明：(1) 连结 AC、BC．

$\because \angle ACB = 90°$（直径上的圆周角是直角），

$\angle BCN = \angle BAC$（弦切角等于同弧上的圆周角），

$\angle BCD = \angle BAC$（同角 $\angle DBC$ 的余角），

$\therefore \angle BCN = \angle BCD$.

又$\angle CDB=\angle CNB=90^\circ$，$BC=BC$，

$\therefore Rt\triangle CDB\cong Rt\triangle CNB(A、A、S)$，

$\therefore CD=CN$，$BD=BN$(全等三角形对应边相等)。

同理可证，$Rt\triangle ADC\cong Rt\triangle AMC$，

$CD=CM$，　$AD=AM$，

$\therefore CD=CM=CN$。

(2) $\because CD\perp AB$，　$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore CD^2=AD\cdot DB$（直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项）。

又由(1)知$AD=AM$，　$DB=BN$，

$\therefore CD^2=AM\cdot BN$。

下面用“双箭头”（⇒）写出证明过程如下：

证明：(1) 连结AC、BC，

$$\left.\begin{array}{l} MN\text{是切线}\Rightarrow\angle BCN=\angle BAC, \\ \left.\begin{array}{l}AM\perp MN\Rightarrow\angle MAC\\ \quad=90^\circ-\angle MCA\\ \angle ACB=90^\circ\Rightarrow\angle BCN\\ \quad=90^\circ-\angle MCA\end{array}\right\}\Rightarrow\angle MAC=\angle BCN\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BAC=\angle MAC.$$

在$\triangle AMC$和$\triangle ADC$中，

$$\left.\begin{array}{l}AC=AC\\ \angle DAC=\angle MAC\\ \angle ADC=\angle AMC=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow Rt\triangle AMC\cong Rt\triangle ADC\Rightarrow MC=CD$$

同理$Rt\triangle BCD\cong Rt\triangle BCN\Rightarrow CN=CD$

$$\Rightarrow MC=CD=CN.$$

(2) $\left.\begin{array}{l} Rt\triangle AMC\cong Rt\triangle ADC\Rightarrow AM=AD \\ Rt\triangle BCD\cong Rt\triangle BCN\Rightarrow BN=BD \\ CD\perp AB\Rightarrow CD^2=AD\cdot DB \end{array}\right\}\Rightarrow CD^2=AM\cdot BN.$

此题作辅助线的方法较多，读者可试证。

2. 问题所给图形有关元素之间位置关系比较分散，通过添置辅助线，把已知图形中有关的分散的元素集中到某一个图形中来，起到汇聚的作用。

例四 （一九七八年全国数学竞赛试题）如图4—1所示，线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD。令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，则直线PQ平分线段AC。

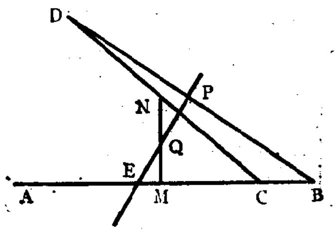


图4—1

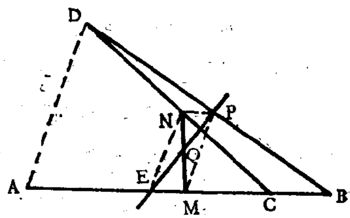


图4—2

已知：如图4—1，M、N、P、Q分别为线段AB、CD、BD、MN的中点。

求证：直线PQ平分线段AC。

分析：由已知M、N、P、Q各点分散在线段AB、CD、BD、MN上，怎样把它们集中起来，充分运用“中点”这

个已知条件呢？我们运用"执果索因"的办法，一步一步地进行分析.

要想证明直线 PQ 平分 AC，可设直线 PQ 交 AC 于 E，只要证明 $AE=EC$，就是证明 NE 是$\triangle CDA$的中位线，即证明$NE//AD$，但因为 PM 是$\triangle BDA$的中位线，即$PM//AD$，这样只要证明 $EN//PM$ 即可. 若 $MPNE$ 是平行四边形，那么问题就解决了，而要证明 $MPNE$ 是平行四边形，则只要证明 $NP \stackrel{\parallel}{=} EM$ 即可，也就是证明$\triangle EQM\cong\triangle PQN$. 为此，我们作辅助线 AD、NE、PM、NP，根据"中点"的性质，可以很容易证明结论的正确.

证明：设直线 PQ 交 AC 于 E，连结 AD、NE、PM、PN。

N、P 分别是 DC、DB 的中点$\Rightarrow NP//BC$

Q 为 MN 的中点$\Rightarrow NQ=QM$

$$\Rightarrow \triangle EQM\cong\triangle PQN \Rightarrow \left.\begin{matrix} NP=EM \\ NP//EM \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow EMPN \text{ 是平行四边形} \Rightarrow \left.\begin{matrix} NE//PM \\ AD//PM \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow NE//AD \\ DN=NC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AE=EC$$

$\therefore E$ 是 AC 的中点，即

直线 PQ 平分线段 AC.

这里我们通过作辅助线 AD、NE、PM、NP，就把分散零乱的各点，集中在隐含的$\triangle DBC$和$\triangle ADC$、$\triangle ABD$及平行四边形 $ENPM$ 中. 利用三角形中位线的性质和平行

四边形的性质，来达到证题的目的。

3. 通过辅助线能把已知条件和求证结论联系起来，辅助线为条件结论之间架起一座“桥”，通过辅助线使证题过程顺利进行。

例五 **已知**：在$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$，a、b、c分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边。

求证：$c^2=b(a+b)$。

分析：此题的已知条件是角的关系，而结论是边的关系，由平面几何知识很难直接发现已知和求证之间有什么联系。用综合几何方法若不作辅助线，命题是无法得到证明的。

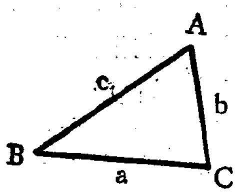


图5—1

这里我们从结论出发进行分析。根据线段成比例的证题术 一般把线段的等积式化为比例式，再由比例式通过“横线”或“竖线”找这些线段所在的三角形，然后证明它们相似即可达到证题的目的。

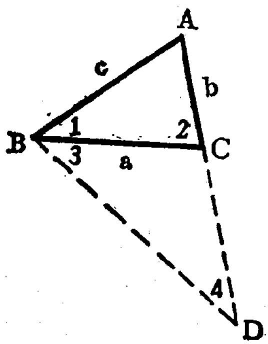


图5—2

要证 $c^2=b(a+b)$ （线段等积式）

即$\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+b}{c}$。（化线段等积式为比例式）

即证b、c所在的三角形和$a+b$、c所在的三角形相似。

但是，在已知条件中，根本不存在以$a+b$、c为边的三角形，不作辅助线，是无法证明的。很自然，“$a+b$”这条线段必在AC的延长线上（或反向延长线上）.我们不妨延长线段AC至D，使$CD=a$，那么线段$AD=a+b$. 这样线段c，$a+b$就可确定一个$\triangle ABD$，因此问题就转化为证明$\triangle ABC$和$\triangle ADB$相似。通过已知条件及所显示出来的图形，要证明这两个三角形相似是很容易的。因为这两个三角形有一个公共角，即$\angle A=\angle A$,这样,只要证明另一对对应角相等就行了.

证明：延长线段AC至D，使$CD=BC=a$，

连结BD。 $\because BC=CD=a$

$\therefore \angle 3=\angle 4$（等腰三角形的底角相等）。

又$\because \angle 2=\angle 3+\angle 4$，

$\therefore \angle 2=2\angle 4$， 即 $\angle 4=\dfrac{1}{2}\angle 2$.

又 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle 2$(已知) $\therefore \angle 1=\angle 4$(等量代换).

又 $\angle A=\angle A$ $\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADB$(如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$（相似三角形对应边成比例），

即 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+b}{c}$， $\therefore$ $c^2=b(a+b)$.

从以上几个例子可以看出：作辅助线是解几何题的一个重要手段. 然而，辅助线问题却是学习平面几何的难点，特