高教自考

高等数学(一)

试卷解答

(1986－2001)

刘俊山 编

NEUPRESS
东北大学出版社

高教自考

高等数学(一)
试卷解答

(1986－2001)

刘俊山 编

东北大学出版社

内 容 提 要

全书分为函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程简介等九章.

每章的第一部分为内容要点及典型例题,第二部分为试题及解答,是结合1986－2001年以来全国高等教育自学考试的有关试题,分别按填空题、单项选择题、多项选择题、计算题、应用题及证明题等进行了系统的选编并给予解答.

最后,为保持试题的完整性,还将18套试题编在附录中,均作了详细的解答,并注重了一题多解,供考生选择.

本书可作为参加自学考试与国家学历文凭考试的学生使用,也可作为财经类的大专学生的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)试卷解答/刘俊山编.—3版.—沈阳:东北大学出版社,2001.7
ISBN 7-81006-881-4

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学－高等学校－解题 Ⅳ.O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第046161号

(沈阳市和平区文化路3号巷11号 邮政编码110004)

铁岭市新华印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32 字数:343千字 印张:12.75
2001年7月第3版 2001年7月第7次印刷
印数:1－7000册

责任编辑:冯淑琴 刘宗玉　　责任校对:米 戎
封面设计:唐敏智　　责任出版:秦 力

定价:18.00元

前言

1994年由我编写的高教自考《高等数学(一)试卷解答》一书至今已修订七次,使用过本书的广大教师与读者反映很好.由于本书涵盖了全部的自学考试的所有试题,时间跨度为1986－2001年,共收集16年的考试试题,本书基本上是高等数学(一)的试题库.为了使广大读者更加清晰地掌握题库中的内容,现将《高等数学(一)试卷解答》一书进行重新改编.

由于本书涵盖了16年来高教自学考试中的高等数学(一)的全部试题,有些试题多次重复出现,为了使全书的内容清晰、简明,避免重复,为此将1986－1993年的全部试题选编到第一章到第九章的试题及解答中来,这样一来,全书的内容更加精练且不重复.

在编写过程中注意了试题的完整性,特将1994－2001年的18套试题保持原型,加上解答作为本书的附录.

为了使考生在总复习中系统复习并重点掌握教材内容,本书各章按教学大纲的要求作了内容要点的概述及其典型例题的分析解答,并把有关的试题分类放在其后,便于考生对试题的理解和掌握,鉴于试题量比较大,题型面涉及广,基本上将试题库中的题含在其中,希望考生要认真系统地读完全书,对于进一步掌握高等数学的知识,提高考试成绩,一定会有很大的帮助.

限于水平,可能有谬误与不妥之处,敬请广大读者批评指正.

刘俊山

2001年5月

目　　录

第一章 函　　数

§1.1 内容要点、典型例题

内容要点

1. 集合的概念及其定义

集合定义：我们的感觉或者思维中确定的个别对象的汇总.通俗地说，所谓集合，是指具有某个共同性质的元素 x 的全体.

2. 实数与数轴

实数可分为有理数和无理数.有理数是形如 q/p 这一类的数，其中 p 和 q 为互质的整数，$p\neq 0$，有理数又可分为正、负整数，零以及分数.

将数轴上的所有点与全体实数建立一一对应，每一实数在数轴上对应一个点，数轴上每一点也对应一个实数.称有理数对应的点为有理点，无理数对应的点为无理点.

3. 区间、邻域

区间是指界于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点.

设 x_0 与 δ 是两个实数，对满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径.

在微积分中还常用到集合

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，其余的点所组成的集合，即集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的空心邻域.

4. 函数概念中的五个要素

(1)自变量 x,可看作主动变化的实变量.

(2)定义域 $D(f)$,表示自变量 x 的变化范围.

(3)因变量 y,它是随着 x 的变化而变化的实变量.

(4)因变量 y 关于自变量 x 的依存关系 $f: y=f(x)$,它表示一个对应规则,对于每一个 $x\in D(f)$,相应地确定惟一的 $y=f(x)$.

(5)值域 $Z(f): Z(f)=\{f(x)\,|\,x\in D(f)\}$.

5. 函数的几种特性

(1)有界性　设函数 $y=f(x)$在 $D(f)$上有定义,若存在某一正数 M,使得对于一切 $x\in D(f)$都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$为 $D(f)$上的有界函数.

(2)单调性　设函数 $y=f(x)$在 $D(f)$上有定义,若对任意两点 $x_1,x_2\in D(f)$,当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_2)>f(x_1)$,则称函数 $f(x)$为 $D(f)$上的单调增加函数.反之,为单调减少函数.

(3)周期性　对于函数 $y=f(x)$,若存在不为零的实数 l,使得对于任一 $x\in D(f)$有 $(x+l)\in D(f)$,且 $f(x+l)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 为 $f(x)$的一个周期,通常说函数的周期是指最小正周期.

(4)奇偶性　设 $y=f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$的函数,若对于任意 $x\in D(f)$都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数;若成立 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.奇函数的几何图形关于原点对称,而偶函数的几何图形关于 y 轴对称.

6. 复合函数和反函数

(1)两个函数的所谓复合,实际上就是中间变量介入从自变量到因变量的变化过程.设函数 $y=f(u)$的定义域为$D(f)$,$u=\varphi(x)$的定义域为 $D(\varphi)$,值域为 $Z(\varphi)$.若有 $Z(\varphi)\subset D(f)$,则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数,x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

函数 f 与 φ 能否构成复合函数 $f[\varphi(x)]$,关键在于第二个函数的值域 $Z(\varphi)$是否包含在第一个函数的定义域 $D(f)$中.

(2) 设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一函数，值域为 $Z(f)$. 如果对每一个 $y\in Z(f)$ 有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，将其对应规则记作 f^{-1}，这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 于是 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形是对称于直线 $y=x$，此时其定义域 $D(f^{-1})=Z(f)$，值域 $Z(f^{-1})=D(f)$.

7. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为基本初等函数，凡是由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的函数，叫做初等函数.

典型例题

例 1 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，求集合 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$.

解 $A\cup B=\{x\mid x\geqslant -1\}$

$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

$A-(A\cap B)$ $\underline{A-B}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$

例 2 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 由 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$，即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$，$-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$，于是所求函数定义域是 $[-4,5)$.

例 3 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问

(A) $f(x^2)$ (B) $f(\sin x)$ (C) $f(x+a)(a>0)$

(D) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域是什么?

解 (A) 因为 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(B) 因 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，故 $2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi$，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，

$f(\sin x)$的定义域为：

$$[2k\pi,(2k+1)\pi], k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(C) 因为 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，所以 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$，$f(x+a)(a>0)$的定义域为$[-a,1-a]$.

(D) 因为 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant x-a \leqslant 1$，所以 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$ 且 $a \leqslant x \leqslant 1+a$，而 $a>0$，因此 $a \leqslant x \leqslant 1-a$.

当 $a \leqslant 1-a$，$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，定义域是$[a,1-a]$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，定义域为空集，即函数在$(-\infty,+\infty)$上处处无定义.

例 4 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$.

解

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$\therefore \quad f(x)=x^2-2$$

例 5 求函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解

$$\frac{1}{y}=\frac{2^x+1}{2^x}=1+\frac{1}{2^x}$$

$$\frac{1}{2^x}=\frac{1}{y}-1=\frac{1-y}{y}$$

$$2^x=\frac{y}{1-y}$$

$$\therefore \quad x=\log_2 \frac{y}{1-y}$$

于是 $y=\log_2 \frac{x}{1-x}$为反函数.

例 6 判断函数

(A) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ (B) $y=\sin x \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1}$的奇偶性.

解 (A) 设 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，则

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) \\
&= \log_a(-x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= \log_a \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= -\log_a(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

因此 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

(B)　设 $f(x)=\sin x \cdot \dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,则

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \sin(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} \\
&= -\sin x \frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1} \\
&= -\sin x \frac{1-a^x}{1+a^x} \\
&= \sin x \frac{a^x-1}{a^x+1} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

因此 $y=\sin x \cdot \dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是偶函数.

例 7　已知函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则函数$f(x)$是　　　　(A)

(A)　奇函数　　　　(B)　偶函数

(C)　非奇非偶函数　　　　(D)　不能确定

解　因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,所以 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,$f(0)=0$. 因为

$$
\begin{aligned}
0=f(0)=f(x-x) &= f[x+(-x)] \\
&= f(x)+f(-x)
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad f(-x)=-f(x)$

因此 $f(x)$是奇函数.

例 8 若 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,则下列等式正确的是 (A)

(A) $f(-2-x)=-2-f(x)$

(B) $f(-x)=f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(C) $f(x^{-1})=f(x)$

(D) $f[f(x)]=-x$

解 因为 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,令 $y=\frac{1-x}{1+x}$,有

$$f(y)=\frac{1-y}{1+y},\quad f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(-2-x)&=\frac{1+2+x}{1-2-x}\\&=\frac{-2-2x-(1-x)}{1+x}\\&=-2-\frac{1-x}{1+x}\\&=-2-f(x)\end{aligned}$$

例 9 已知函数 $y=x^{\frac{2}{3}}(x\leqslant 0)$,则它的反函数是 (C)

(A) $y=\sqrt{x^3}(x\geqslant 0)$ (B) $y=\pm\sqrt{x^3}(x\leqslant 0)$

(C) $y=-\sqrt{x^3}(x\geqslant 0)$ (D) $y=-\sqrt{x^3}(x\leqslant 0)$

解 $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}(x\leqslant 0)$的定义域$(-\infty,0]$和值域$[0,+\infty)$,分别是其反函数的值域和定义域,故其反函数是

$$y=-\sqrt{x^3}(x\geqslant 0)$$

例 10 函数 $y=\ln(x^2-x-2)$的定义域是 (C)

(A) $(2,+\infty)$ (B) $(-1,2)$

(C) $(-\infty,-1),(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1],[2,+\infty)$

解 设 $x^2-x-2=0$,则 $x_1=-1,x_2=2$,若使 $x^2-x-2>0$,须有$-\infty<x<-1$ 或 $2<x<+\infty$,因此函数 $y=\ln(x^2-x-2)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

§1.2 试题及解答

一、填空题

试题 1 设集合 $A=\{x\mid x\leqslant 1986\}$，$B\{x\mid x\geqslant 1986\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{1986}$.

试题 2 $[(-1,2)\cap(0,2)]\cup[1,3]=\underline{(0,3]}$.

试题 3 设集合 $M=\{x\mid -2\leqslant x<4\}$，$N=\{x\mid 1<x<6\}$，则 $M\cup N=\underline{\{x\mid -2\leqslant x<6\}}$.

试题 4 函数 $y=\dfrac{1}{|1-x|}$的定义域是 $\underline{x\neq 1}$.

试题 5 函数 $y=\dfrac{1}{\ln x}$的定义域是 $\underline{x>0 \text{ 且 } x\neq 1}$.

试题 6 设 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，则 $f(x^2)$的定义域是 $\underline{[-1,1]}$.

试题 7 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$的定义域是$\underline{(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)}$.

试题 8 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，则 $f(x+1)$的定义域是 $\underline{-1\leqslant x\leqslant 0}$.

试题 9 函数 $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$的定义域是$\underline{(-2,3)}$.

试题 10 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant 0\\ x-2, & x>0,\end{cases}$则 $f(1)=\underline{-1}$.

试题 11 设 $f(x)=e^{(x-a)^2}$，$\varphi(x)=a+\cos x$，则 $f[\varphi(x)]=\underline{e^{\cos^2 x}}$.

试题 12 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\underline{1+\dfrac{\pi^2}{4}}$.

试题 13 设函数 $f(x)=1+\ln x$，$g(x)=\sqrt{x}+1$，则$f[g(x)]=$ $\underline{1+\ln(\sqrt{x}+1)}$.

试题 14 函数 $y=1+\ln x$ 的反函数是 $\underline{\;y=e^{x-1}\;}$.

试题 15 函数 $y=e^{x+1}$的反函数是 $\underline{\;y=\ln x-1\;}$.

试题 16 函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$的反函数是 $\underline{\;y=\dfrac{x}{1-x}\;}$.

试题 17　函数 $y=\frac{x-1}{x+1}$的反函数是 $y=\frac{1+x}{1-x}$.

试题 18　$y=x^3(x\leqslant 0)$的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\leqslant 0)$.

试题 19　$y=x^2,x\in[0,+\infty)$的反函数是 $y=\sqrt{x}$.

二、单项选择题

试题 1　对任意一个非空集合 A，恒有　(B)

(A)　$A\cup\varnothing=\varnothing$　　(B)　$A\cap\varnothing=\varnothing$

(C)　$A\cup A=\varnothing$　　(D)　$A\cap A=\varnothing$

试题 2　设集合 $E=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，$F=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，则有关系　(D)

(A)　$E\supset F$　　(B)　$E\subset F$

(C)　$E\cap F\supset F$　　(D)　$E\cap F\subset F$

试题 3　设集合 $E=\{x|x\geqslant 0\}$，$F=\{x|x<1\}$，则 $E\cap F$ 是　(D)

(A)　$\{x|x\geqslant 0$ 或 $x<1\}$　　(B)　$\{x|0<x<1\}$

(C)　$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　(D)　$\{x|0\leqslant x<1\}$

试题 4　设集合 $M=\{x|-2\leqslant x<3\}$，$N=\{x|-1<x<5\}$，则 $M\cup N=$　(B)

(A)　$\{x|-1<x<3\}$　　(B)　$\{x|-2\leqslant x<5\}$

(C)　$\{x|-2\leqslant x<3\}$　　(D)　$\{x|-1<x<5\}$

试题 5　设有集合 $E=\{1,2,3,4\}$，$F=\{1,2,5,6\}$，$H=\{4,7\}$，则$(E\cup F)\cap H=$　(B)

(A)　$\{1,2,3,4,5,6\}$　　(B)　$\{4\}$

(C)　$\{1,2,4,7\}$　　(D)　$\varnothing$

试题 6　设集合 $E=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$F=\{x|0<x\leqslant 4\}$，则 $E\cap F=$　(B)

(A)　$\{x|-1\leqslant x<0\}$　　(B)　$\{x|0<x<2\}$

(C)　$\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$　　(D)　$\{x|2<x\leqslant 4\}$

试题 7　如果集合 $E=\{x|x(x^2-1)=0\}$，下列集合中哪个集合与 E 相等　(B)

(A) $\{x|x(x+1)=0\}$ (B) $\{x|x^2(x^2-1)=0\}$

(C) $\{x|(x-1)(x^2-1)=0\}$ (D) $\{x|e^x(x^2-1)=0\}$

试题 8 设集合 $E=\{x||x|\leqslant 1\}$,$F=\{x|x^2-1<0\}$,则有 (B)

(A) $E\subset F$ (B) $E\supset F$

(C) $E=F$ (D) $E\cap F=\varnothing$

试题 9 点 x_0 的 δ 邻域($\delta>0$)是区间 (D)

(A) $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ (B) $[x_0-\delta,x_0+\delta)$

(C) $(x_0-\delta,x_0+\delta]$ (D) $(x_0-\delta,x_0+\delta)$

试题 10 $y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$的定义域是 (D)

(A) $(1,+\infty)$ (B) $(0,1)\cup(1,+\infty)$

(C) $(0,2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(1,2)\cup(2,+\infty)$

试题 11 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,2]$,则函数 $f(x-1)$的定义域是 (C)

(A) $[0,2]$ (B) $[-1,1]$

(C) $[1,3]$ (D) $[-1,0]$

试题 12 设函数 $f(x)=\ln x,g(x)=x+3$,则 $f[g(x)]$的定义域是 (A)

(A) $(-3,+\infty)$ (B) $[-3,+\infty)$

(C) $(-\infty,3)$ (D) $(-\infty,3]$

试题 13 函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是 (B)

(A) $\{x|x>-1\}$ (B) $\{x|x>1\}$

(C) $\{x|x\geqslant -1\}$ (D) $\{x|x\geqslant 1\}$

试题 14 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$的定义域是 (D)

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

(B) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$