中学数学解题方法

几何变换法

邓安邦

四川教育出版社

中学数学解题方法

几何变换法

邓安邦 编

1990·成都

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵

中学数学解题方法　　　　几何变换法

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　攀枝花新华印刷厂印刷

开本 787×960 毫米　1/32　印张 3.25　字数 60 千
1990年2月第一版　1991年8月第二次印刷
印数：5,401—12,500 册

ISBN7-5408-1215-X/G·1184　定价：1.04元

内容提要

本书介绍了中学数学中常用的解题方法——几何变换法，包括平移变换、旋转变换、反射变换、位似变换以及等积变换等基本内容，并通过典型例题说明了这些变换在解决平面几何问题中的巧妙运用，同时还阐明了它们各自在什么情况下使用和怎样使用等。

本书主要供中学生课外阅读，也可作为教师和广大数学爱好者的参考读物。

前　　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助广大中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的“钥匙”。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以“方法”为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上，帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1. 以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种

方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2.方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3.例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高职数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

1988.10

目　　录

几何变换法的意义与作用

什么是几何变换法？

这自然是读者翻开书就急于想知道、也是我们首先要回答的问题。

大家知道，当我们要解答或证明稍微复杂一些的几何问题时，往往都要添辅助线才能解决。添辅助线的实质是什么呢？这里，我们举两个问题来说明。

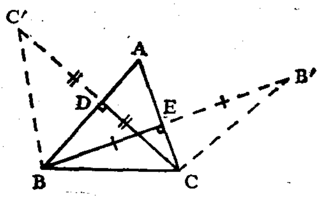


图 1

问题1　如图1，在$\triangle ABC$中，若$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，且$AB>AC$，则$BE>CD$。

证明：延长BE至B'，使$B'E=BE$，连结$B'C$；延长CD至C'，使$C'D=CD$，连结$C'B$。易知，$\triangle B'CE\cong\triangle BCE$，$\triangle C'BD\cong\triangle CBD$。故有$B'C=BC$，$BC'=BC$。从而，$\triangle BCB'$和$\triangle CBC'$都是等腰三

角形，并且它们的腰相等。

$\because$ $AB > AC$，$\therefore \angle ACB > \angle ABC$。

又 $\angle B'CA = \angle ACB$，$\angle C'BA = \angle ABC$。

$\therefore$ $\angle BCB' > \angle CBC'$，故 $BB' > CC'$，

即 $BE > CD$。

在这里，"延长 BE 至 B'，使 $B'E = BE$，连结 $B'C$。"实际上就是按照某种法则，把 $\triangle BCE$ 变成 $\triangle B'CE$。具体地说，这种法则就是：将 $\triangle BCE$ 的 CE 边上的每一点（包括 C、E）都变成自己；它的其余两边 BE 和 BC 上的每一点都变成关于直线 AC 的对称点；$\triangle BCE$ 随之变成 $\triangle B'CE$。

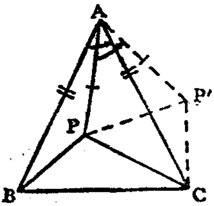


图 2

同样，我们"延长 CD 至 C'，使 $C'D = CD$，连结 $C'B$。"也是按照某种法则把 $\triangle CBD$ 变成 $\triangle C'BD$。

问题2 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，P 是三角形内一点，$\angle APB > \angle APC$，则 $PB < PC$。

证明：如图2，在 AP 关于 AC 的另一侧作射线 AP'，使 $\angle PAP' = \angle BAC$。在 AP' 上截取 $AP' = AP$。连结 $P'C$，则有 $\triangle ACP' \cong \triangle ABP$。于是，

$$\angle AP'C = \angle APB > \angle APC，\quad P'C = PB。$$

又连结 PP'，则有 $\angle AP'P = \angle APP'$。

$\therefore \angle CPP' < \angle CP'P$。故 $PB = P'C < PC$。

这里，“在AP关于AC的另一侧作射线AP'，使$\angle PAP'=\angle BAC$。在AP'上截取$AP'=AP$，连结$P'C$。”其实也是遵循某种法则，把$\triangle ABP$变成$\triangle ACP'$。具体地说，这种法则就是：将$\triangle ABP$的顶点A变成自已；而其余的每一点都变成平面内绕A点沿逆时针方向旋转$\angle BAC$后所在位置上的一点；相应地$\triangle ABP$变成$\triangle ACP'$。

由此可见，在解答或证明几何问题时添辅助线，其实质就是按照某种法则，将问题中题设图形的一部分——一个图形变成另一个图形。象这种把一个几何图形变成另一个几何图形所遵循的某种法则，人们通常称为几何变换。

一般地，设f是平面内给定的某种法则。如果对于这个平面内的已知图形F上的每一点P，按照法则f都有确定的点P'与之对应：

$$P'=f(P).$$

那么我们就把图形F变成图形$F'=f(F)$的对应法则f叫做几何变换，简单地记作$F\xrightarrow{f}F'$。

这里，若把图形F上的点P称为原象，图形F'上对应的点P'称为映象，则原象P与映象P'的关系，就好比函数概念中的自变量x和函数y的关系。由于几何图形可以看作是点的集合，因此，我们可以把几何变换看成是从一个点的集合到另一个点的集合

上的映射。

应用几何变换的观点，以寻求解答或证明几何问题的解题途径的方法，就叫做几何变换法。在几何变换法中，最常用的有：平移变换法、旋转变换法、反射变换法、位似变换法和等积变换法等。

读者在知道了几何变换法的意义以后，自然会问：在寻求几何问题的解题途径时，几何变换法究竟能起什么样的作用呢？归纳起来，我们认为至少有以下四个方面：

第一，从理论上讲，全等形与相似形是平面几何中研究的两类最基本、最重要的图形，而这两类图形又分别对应于合同变换和相似变换，所以几何变换的思想方法自然是解决其有关问题的重要手段。从形式上看，它是通过对问题的图形的某些部分施行变位、变形，以便化繁为简、化难为易，从而获得一种解题途径。因此，掌握几何变换法，可以使我们用较高的观点来研究几何问题的解法，看清问题的实质。

第二，在寻求几何问题的解题途径时，最困难的一步是添辅助线。但若运用几何变换的观点来进行分析，并注意到问题中图形的某些特征，则就不需要太多的技能技巧，也能迅速地想到应对图形的哪些部分施行变位、变形，从而添出必要的辅助

线，使解题的途径显现出来。因而，掌握几何变换法，可以使我们在添辅助线时减少盲目性，增强目的性，进而掌握一些添辅助线的规律。

第三，有些几何问题，由于涉及的元素分散或交错，因而难以发现题设和结论间的关系。但若能适当地运用几何变换法，将图形的某些部分变换到适当的新位置，则常可使分散的元素集中起来，或者把交错的元素适当分散，从而构造出我们所熟悉的基本图形，使问题变得容易解决。所以，掌握几何变换法，可以使我们领会一些处理较困难的几何问题的基本方法与技能。

第四，大家知道，比较线段与折线或者折线与折线间的长短是较麻烦的。但若能适当地采用几何变换法，将折线的一段或若干段逐次进行变换，则常可将折线化为直线段或另一便于比较的折线，从而发现解题的途径。因此，掌握几何变换法，可以使我们学会一些处理几何问题的特殊的技能与技巧。

当然，我们还可以列出一些几何变换法的作用。不过，仅从上述几个方面就足以说明它是研究和解决一些平面几何困难问题的犀利工具。这也是笔者想把本书献给读者的动机所在。

现在，我们来讨论几何变换法的常用方法及其在解题中的应用。

几何变换法的方法与应用

一、平移变换法

为了说明平移变换的意义，我们先引进向量的概念。设 AA' 是平面内的一条固定线段，如果把 A 点看作这条线段的起点，A' 点看作这条线段的终点，那么就得到一条有方向的线段。这种有方向的线段，就称为向量。

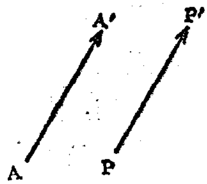


图 3

在图形上，向量用带箭头的线段表示，记作 $\overrightarrow{AA'}$（图3）。过平面内任一点 P，作线段 PP'，使 $PP' \mathrel{\underline{\parallel}} AA'$，即向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的方向与向量 $\overrightarrow{PP'}$ 的方向相同，且长度相等。这种长度相等并且方向相同的两个向量，称为相等向量，记作 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'}$。

如图 4，设 $\overrightarrow{MM'}$ 是平面内给定的一向量。如果对于这个平面内的已知图形 F 上的每一点 P，都有按照如下法则 T 所确定的点 P' 与之对应：

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{MM'},$$

则把图形F变成图形$F'=T(F)$，这样的变换叫做平移变换，记作$T(\overrightarrow{MM'})$。其中，向量$\overrightarrow{MM'}$叫做平移向量。

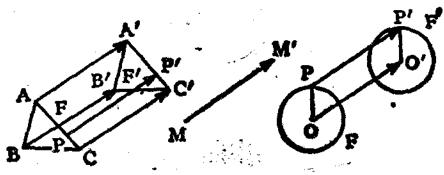


图 4

根据平移变换的定义和平行四边形的性质，可以证明：在平移变换下，每一个图形都变成与它自己全等的图形。

由平移变换的定义可以知道，平面内已知图形F的一个平移变换，由这个平面内一给定的向量$\overrightarrow{MM'}$唯一确定。$\overrightarrow{MM'}$的方向决定F的平移方向，它的长度决定F平移的距离。因此，要想对某个图形施行平移变换，必须适当地选择一条有向线段作为平移向量。

通过对图形的一部分施行平移变换，将分散的元素集中起来或者把交错的元素适当分散，从而找到解题途径的方法，叫做平移变换法。这种方法，常用于解决如下两类问题：

1. **题设中有平行条件的问题。**

例1 在△ABC中，已知$AB:AC=7:5$，$BC=18$。在边AB、AC上分别取一点D、E，使$AD=CE$，且$DE\parallel BC$。求DE的长。

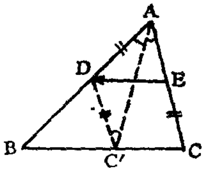


图 5

分析：如图5，由于条件$AD=CE$中的两条线段分散，不便利用，所以，可考虑如何集中起来。注意到条件$DE\parallel BC$，可作$CE\xrightarrow{T(\overrightarrow{ED})}C'D$。连结$AC'$，则点$C'$必在$BC$边上，且$C'C=DE$，$\angle BAC'=\angle DC'A=\angle CAC'$，因此$AC'$平分$\angle A$。而$AB:AC=7:5$，$BC=18$，故$CC'$的长可求得。

解：作$CE\xrightarrow{T(\overrightarrow{ED})}C'D$。连结$AC'$，则由$DE\parallel BC$，知点$C'$必在$BC$边上，且$DE=C'C$，$DC'=CE=AD$。

$\therefore$ $\angle BAC'=\angle DC'A=\angle CAC'$。即$AC'$平分$\angle A$。

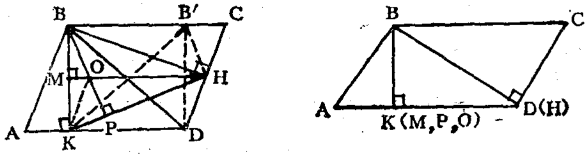
因此，$BC':C'C=AB:AC$。

即 $(18-C'C):C'C=7:5$。

故 $DE=C'C=7.5$。

评注：通过平移，把分散的相等线段集中起来，使之得以利用，是顺利找到本例解题途径的关键。

例2　如图6，在▱$ABCD$中，$BH\perp CD$，$BK\perp AD$，O是$\triangle BKH$的垂心。设$KH=a$，$BD=b$，求BO。



(1)　　　　(2)

图 6

分析：先考虑特殊情况，若H趋于D，记作$H\to D$，则$M\to K$，$P\to K$，$O\to K$，$BO=BK$(图6(2))。

在$Rt\triangle BKD$中，$BK=\sqrt{BD^2-KD^2}=\sqrt{b^2-a^2}$。

由此发现，BO由一个直角三角形中求得，并且$BO=\sqrt{b^2-a^2}$。可见，解决本题的关键，是要设法作出一个以BD为斜边、KH和BO为直角边的三角形。为此，连结KO，则由条件易知四边形$OKDH$为▱。于是，可考虑作$\triangle BOK\xrightarrow{T(\overrightarrow{OH})}\triangle B'DH$。连结$KB'$(图6(1),则由$BP\perp KH$知$B'H\perp KH$；又由$BK\perp AD$，知$BKDB'$为矩形，从而$KB'=BD$。

解：$\because O$是$\triangle BKH$的垂心，

$\therefore$　$BK\perp HM$，$BH\perp KO$，$BO\perp KH$。

又$\because$　$BH\perp CD$，$BK\perp AD$，

$\therefore$　$KO\parallel CD$，$MH\parallel AD$，

∴四边形$OKDH$为▱。

作$\triangle BKO \xrightarrow{T(\overrightarrow{OH})} \triangle B'DH$，连结$KB'$，则有

$$KB'=BD,\ B'H=BO,\ B'H\perp KH.$$

故　$BO=B'H=\sqrt{KB'^2-KH^2}=\sqrt{b^2-a^2}$

评注：由于"一般寓于特殊之中"，所以在一般性的求值时，可先把问题化为它的一个特殊情形去考察，然后利用从解决特殊情形中所受到的启示，以找到一般情况下的解决办法。这是一种十分重要的解题思想。

例3　在矩形$ABCD$内取一点P，使$\angle PBC=\angle PDC$。求证以PA和PC为边的矩形面积与以PB和PD为边的矩形面积之和等于矩形的$ABCD$面积。

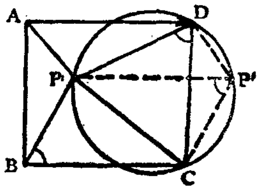


图 7

分析：如图7，由于要证的结论$PA\cdot PC+PB\cdot PD=BC\cdot CD$涉及到六条线段，所以要直接发现它们与题设条件间的联系有一些困难。但若注意到$AD\perp\!\!\!\!= BC$，则可考虑作$\triangle ABP\xrightarrow{T(\overrightarrow{AD})}\triangle DCP'$。连结$PP'$，则就把要证结论中所涉及的线段全部都转移到了四边形$PCP'D$中。易知，要证本题成立，只需证P、C、P'、D四点共圆。

证明：作$\triangle ABP\xrightarrow{T(\overrightarrow{AD})}\triangle DCP'$，连结$PP'$，则