红魔理科王

主编 唐剑英

高一数学一本通

国防科技大学出版社

红魔理科王

高一数学一本通

MATHS

主　　编　唐剑英

执行主编　李　坤

编　　著　李　坤　杨亚玺

　　　　　汤　灏　徐国良

图书在版编目(CIP)数据
红魔理科王·数学(高一)一本通/唐剑英主编 –长沙:国防科技大学出版社，2004.6
ISBN 7-81099-091-8
Ⅰ.红 … Ⅱ.唐… Ⅲ.数学–高中–教学参考资料
Ⅳ.G654.448

红魔理科王·数学(高一)一本通

主　　编: 唐剑英
执行主编: 李　坤
编　　著: 李　坤　杨亚玺　汤　灏　徐国良

总 策 划 : 周艺文
责任编辑: 徐　飞
责任校对: 曹　红
版式设计: 肖　芳
全案策划: 万卷(香港)文化有限公司
湖南艺文出版策划有限公司
电话: (0731)4450597 邮政编码: 410005
E-mail: zhouyiwen@vip.163.com
出　　版: 国防科技大学出版社
电话: (0731)4572640 邮政编码: 410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
经　　销: 新华书店
湖南万卷文化实业有限公司 (0731-4448350)
印　　装: 湖南东方速印科技股份有限公司 (0731-8807850)
开　　本: 787×1092　1/20
印　　张: 14.4
字　　数: 400 千字
版　　次: 2004 年 7 月第 1 版
印　　次: 2004 年 7 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-81099-091-8/0·9
定　　价: 19.80 元

编者的话

本书是根据教育部最新颁布的《全日制普通高级中学课程计划》和《全日制普通高级中学数学教学大纲》而编写的，是人民教育出版社出版的《全日制普通高级中学教科书（必修）数学第一册》的同步辅导读物。本书是高一学生学习数学的理想辅导用书，同时也可供高三学生在数学第一轮复习时使用。

编者根据自己多年的研究成果和教育学、心理学的有关原理，为本书设计了如下栏目：

知识要点 简明扼要地列出了教学大纲所规定的知识点，指明了学习方向。

典例精析 精选典型试题，深入浅出地对其进行分析，结合实例引导学生掌握知识要点。

跳出陷阱 针对学习中易出错的问题，指出常犯的错误，剖析错误原因，给出正确的解法，及时帮助学生克服思维定势的负面影响，提醒学生不走弯路。

思维拓展 对所学知识进行提高性的总结，对解题方法进行全面归纳，对课本知识进行适当拓展，有利于开拓思维，使学习更上一层楼。

考题透视 精选与所学知识点有关的高考题，给出答案，并对较难的高考题进行了分析。有利于学生了解高考对所学知识点的考查，掌握学习重点，及时调控学习方向，为以后参加高考打下坚实的基础。

习题精练 精选、编撰典型习题，进行少而精的训练，既起到了举一反三的作用，又减轻了学业负担。

本书的栏目设计科学合理："知识要点"指明学习方向；"典例精析"深入浅出地讲解例题，学习通俗易懂；"跳出陷阱"教学生少走弯路；"思维拓展"使学生更上一层楼；"考题透视"让学生了解高考考点，有针对性地学习；"习题精练"使学生收到举一反三之效。本书的主要特点是：集知识要点指南、例题讲解、纠错、思维拓展、高考题分析于一体，能全方位地、全面地辅导学生，使学生提高综合能力，迈向新台阶。

为了介绍最新的研究成果和巧妙的解题方法、技巧，本书介绍了一些思维层次较深的知识，供学有余力的学生选学。

本书在编写过程中，参考了有关报刊书籍上的文章，吸取了其中的最新研究成果。在此对有关作者和出版单位表示深切的感谢。

本书是一本在每一节内将知识要点、例题、纠错、思维拓展、考题分析有机组合起来的全方位的同步辅导读物，所涉及的知识面广，思维层次深，知识跨度大。因此，编写难度较大。限于作者水平，在某些方面还有待进一步完善。热忱希望老师、同学们批评指正。

目　录

第四章 三角函数

第五章 平面向量

Chapter

01 集合与简易逻辑

第一节 集 合

知识要点

1. 集合的基本概念

(1) 某些指定的对像集在一起就成为一个集合,简称集.集合中的每个对像叫做这个集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$(或 $a\bar{\in} A$).集合的元素具有确定性、互异性和无序性,常称此为集合的三要素.

下面是一些常用的数集及其记法:

全体非负数整数的集合通常简称非负整数集合(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

非负整数集内排除 0 的集,也称正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数的集合通常简称整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数的集合通常简称有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数的集合通常简称实数集,记作 $\mathbf{R}$.

(2) 不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

2. 集合的分类

根据集合中含有元素的多少可将集合分为无限集、有限集、空集.

3. 集合的表示方法

集合的表示方法有列举法、描述法和图示法.

典例精析

例 1 下列各组集合中,M 与 P 表示同一集合的是( )

A. $M=\{0\}$, $P=\varnothing$　　　　B. $M=\{3\}$, $P=\{0,3\}$

C. $M=\{(1,2)\}$, $P=\{(2,1)\}$　　　　D. $M=\{-1,3\}$, $P=\{3,-1\}$

分析 选项 A 中,M 是单元素集,P 是空集, 故 M 和 P 不是同一集合; 选项 B 中,$0\notin M$, $0\in P$,故 M 和 P 不是同一集合;选项 C 中,$(1,2)$和$(2,1)$是两个不同的点,故 M 和 P 不是同一集合;对选项 D,M 和 P 的元素完全相同,又集合具有无序性,所以 M 和 P 是同一个集合.

解 选 D.

例 2 设非空集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$且若 $a\in A$,则 $6-a\in A$,这样的集合 A 共有 ______ 个.

分析 若把$\{1,2,3,4,5\}$的子集全部写出,再一一检验,虽然可行,但太繁琐.注意 $a+(6-a)=6$,我们可把子集分单元素集、二元素集、三元素集、四元素集、五元素集等五类,并注意其联系,便可得到较为简便的方法.

解 满足条件的集合 A 有:$\{3\}$,$\{1,5\}$,$\{2,4\}$,$\{1,3,5\}$,$\{2,3,4\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$.所以满足条件的集合 A 共有七个.

例 3 设三个元素的集合 $A=\{x,y,x+y\}$,$B=\{0,x^2,xy\}$,且 $A=B$,求实数 x、y 的值.

分析 因为 $A=B$，所以两个集合中的元素必须相同，同时，由于集合中的元素具有互异性，从而对 x、y 的取值提出了约束，为便于讨论，可先确定 B 集中的元素 0 的对应元素.

解 令 $x=0$，则 $B=\{0,0,0\}$，此时集合 B 中只有一个元素，不合要求.

同理令 $y=0$ 时，也不合要求.

故$x+y=0$，

所以$\begin{cases}x+y=0\\x=x^2\\y=xy\end{cases}$ 或$\begin{cases}x+y=0\\x=xy\\y=x^2\end{cases}$，

解之得$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$.

故所求的值为 $x=1,y=-1$ 或 $x=-1,y=1$.

例 4 集合 $M=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=6n+3,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 若 $q\in Q$，求证：必存在 $m\in M,t\in T$，使 $q=m+t$；

(2) 对任意的 $m\in M,t\in T$，是否一定有 $m+t\in Q$？试证明你的结论.

分析 (1) 要证明结论成立，设 $q=6n+3,n\in\mathbf{Z}$，只须将 $6n+3$ 能表示为 $(3n+1)+(3n+2)$ 即可.对于(2)，设出 m,t 的表达式，再看 $m+t$ 是否具有集合 Q 的特征.

解 (1) $\because q\in Q$，

$\therefore$ 存在 $n\in Q$， 使 $q=6n+3=(3n+1)+(3n+2)$.

令 $m=3n+1,t=3n+2$，则 $m\in M,t\in T$，且 $q=m+t$.

故存在 $m\in M,t\in T$ 使 $q=m+t$.

(2) 设 $m\in M,t\in T$，则 $m=3k+1,t=3s+2,k,s\in\mathbf{Z},m+t=3(k+s)+3$，当 $k+s$ 是偶数即 $m+t=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$m+t=6n+3\in Q$；当 $k+s$ 是奇数即 $m+t=2n-1,n\in\mathbf{Z}$ 时 $m+t=6n\notin Q$.

故对任意的 $m\in M,t\in T$，不一定有 $m+t\in Q$.

跳出陷阱

题 1 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，试用例举法写出集合 A.

错解 $\because x^2+y^2=1$ 且 x、$y\in\mathbf{Z}$，$\therefore x=0,y=\pm1$ 或 $y=0,x=\pm1$.

$\therefore A=\{0,1,-1\}$.

剖析 上述错解将数集与点集混淆了，错将点集 A 看成了数集.

正解 $\because\ x^2+y^2=1$，

$\therefore\ \begin{cases}x=0\\y=\pm1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}$.

$\therefore\ A=\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$.

题 2 集合 A 的元素由 $kx^2-3x+2=0$ 的实数解构成，其中 $k\in\mathbf{R}$，若 A 中的元素至多有一个，求 k 的取值范围所构成的集合 M.

错解 $\because A$ 中的元素至多有一个，

$\therefore \Delta=(-3)^2-4\cdot k\cdot 2=9-8k\leqslant 0$,

$\therefore$ 方程 $kx^2-3x+2=0$ 只有一个实数根或无实数根，

$\therefore k\geqslant\dfrac{9}{8}$即为所求的范围,故 $M=\{k|k\geqslant\dfrac{9}{8}\}$.

剖析 上述错解没有考虑当方程的二次项系数为 0 时,$-3x+2=0$ 得 $x=\dfrac{2}{3}$ 也只有一个实根,符合题意.

正解 (1) 当 $k=0$ 时,方程有一实根 $x=\dfrac{2}{3}$ 符合题意;

(2) 当 $k\neq 0$ 时,$\Delta=(-3)^2-4\cdot k\cdot 2\leqslant 0$,解得 $k\geqslant\dfrac{9}{8}$.

故所求 k 构成的集合 $M=\{k|k=0$ 或 $k\geqslant\dfrac{9}{8}\}$.

思维拓展

$\varnothing$ 与$\{\varnothing\}$的区别与联系：

$\varnothing$ 是不含任何元素的集合.

$\{\varnothing\}$是只含有一个元素 $\varnothing$ 的集合,从而 $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

在后面的学习中我们规定:“空集是任何集合的子集.”所以又会得到 $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

因此下面的表示都是正确的：

$\varnothing\in\{\varnothing\}$,$\varnothing\neq\{\varnothing\}$,$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$,$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

考题透视

(2000 年上海高考题改编) 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$,$B=\{(x,y)|y=x+b\}$ 只有一个公共元素,求实数 b 的值.

解 $\because$ 集合 A 与集合 B 只有一个公共元素,

$\therefore$ 方程组$\begin{cases}x^2+y^2=4\\y=x+b\end{cases}$有唯一解,

即 $2x^2+2bx+b^2-4=0$ 有唯一解,

$\therefore \Delta=(2b)^2-4\cdot 2(b^2-4)=0$.

解之得:$b=\pm 2\sqrt{2}$.

故所求的 b 的值为$\pm 2\sqrt{2}$.

习题精练

1. 下列各条件中不能确定一个集合的是(　)

A. 平行四边形的全体　　B. 某学校身高不超过 1.7m 的学生

C. 所有的无理数　　D. 充分接近$\sqrt{3}$的所有实数的全体

2.在直角坐标系内,坐标轴上的点的集合可表示为(　　)

A. $\{(x,y)|x=0,y\neq 0$ 或 $x\neq 0,y\neq 0\}$　　B. $\{(x,y)|x=0$ 且 $y=0\}$

C. $\{(x,y)|xy=0\}$　　D. $\{(x,y)|x,y$ 不同时为 $0\}$

3. 集合{边长为 3,一个内角为 50°的等腰三角形}中,元素的个数为 ______.

4. 用列举法写出下列各个集合:

(1) {小于 10 的质数}=______;

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=5,x\in \mathbf{Z},y\in \mathbf{Z}\}$=______;

(3) $\{(x,y)|(x+1)^2+|y-1|=0,x,y\in \mathbf{R}\}$=______;

(4) $\{x|\frac{6}{3-x}\in \mathbf{Z},x\in \mathbf{N}\}$=______.

5. 若集合 $A=\{x|x^2+ax+b=x\}$中,仅有一元素 a,求 a、b 的值.

6. 设集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2},|a^2-2b^2=1,a\in \mathbf{Z},b\in \mathbf{Z}\}$.

求证:当$x\in A$ 时,有 $\frac{1}{x}\in A$.

习题答案

①. D　　②. C

③. 注意到边长为 3 的边可以是三角形的底,也可以是三角形的腰,50°的角可以是顶角,也可以是底角,故符合要求的等腰三角形有 4 个.

④. (1) $\{2,3,5,7\}$;

(2) $\{(-2,-1),(-2,1),(-1,-2),(-1,2),(1,-2),(1,2),(2,-1),(2,1)\}$;

(3) $\{(-1,1)\}$;

(4) $\{0,1,2,4,5,6,9\}$.

⑤.解:由题意知,方程度 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有等根 $x=a$.

$\because \begin{cases}(a-1)^2-4b=0\\ a^2+(a-1)\cdot a+b=0,\end{cases}$　　$\therefore \begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{9}.\end{cases}$

⑥. 证明:若 $x\in A$,那么,存在 $m\in \mathbf{Z},n\in \mathbf{Z}$ 使 $x=m+n\sqrt{2}$,且$|m^2-2n^2|=1$,即 $m^2-2n^2=\pm1$.

这时,$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n\sqrt{2}}=\frac{m-n\sqrt{2}}{m^2-2n^2}=\pm(m-n\sqrt{2})$.

$\because\ m\in \mathbf{Z},n\in \mathbf{Z}$,

$\therefore\ \pm m\in \mathbf{Z},\pm n\in \mathbf{Z}$ 且$|(\pm m)^2-2(\pm n)^2|=|m^2-2n^2|=1$.

$\therefore\ \frac{1}{x}\in A$.

第二节 子集、全集、补集

知识要点

1. 子集 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,就说集合 B 包含集合 A,记作 $A\subseteq B$,这时也说集合 A 是集合 B 的子集.(也称集合 A 包含于集合 B,记作 $B\supseteq A$).显然有

对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么 $A=B$;

任何一个集 A 是它本身的子集即 $A\subseteq A$.

特别规定:空集是任何集合的子集即 $\varnothing\subseteq A$.显然,空集是任何非空集合的真子集.

2. 全集 如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合称为全集,通常用 U 表示.

3. 补集 设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$),则由 S 中所有不 属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集,记作$\complement_S A$,

即 $\complement_S A=\{x|x\in S,x\notin A\}$.

4. 若集合 A 的元素有 n 个,则 A 的子集有 2^n个.

典例精析

例 1 (1)已知有下列关系:①$\varnothing\in\{0\}$;②$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;③$\varnothing=0$;④$0\in\{0\}$;⑤$0\subsetneqq\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$;⑦$0\subseteq\{0\}$,以上正确的有 ______.

(2) 下列命题:①空集是任何集合的真子集;②空集没有子集;③任一集合必有两个或两个以上子集;④若 $B\subseteq A$,那么凡不属于集合 A 的元素则必不属于 B,正确的有 ______.

分析 准确利用概念的实质进行判断.

解 (1) 只有②、④、⑥正确.

故应填②、④、⑥.

(2) 只有④正确.

故应填④.

例 2 写出集合 $M=\{x|-2<x<2,x\in\mathbf{Z}\}$的所有真子集.

分析 空集是任一非空集合的真子集,是任一集合的子集.一个含有 n 个元素的集合的子集有 2^n 个,真子集有 2^n-1 个.

解 $\because\ -2<x<2,x\in\mathbf{Z}$, $\therefore\ x=-1,0,1.$

即 $A=\{-1,0,1\}$.

$\therefore$ 集合 A 的真子集如下:$\varnothing,\{-1\},\{0\},\{1\},\{-1,0\},\{-1、1\},\{0、1\}$.

例 3 已知集合 $A=\{a|a^2+a-6=0\}$,$B=\{b|mb+1=0\}$满足 $A\subsetneqq B$,求 m 的值.

分析 要注意对字母的分类讨论和空集的性质.

解 $\because\ A=\{a|a^2+a-6=0\}=\{2,-3\}$,

$\therefore$ 当 $m=0$ 时,$B=\{b|mb+1=0\}=\{b|0\cdot b+1=0\}=\varnothing$,$A\subsetneqq B$ 不成立;

当 $m\neq0$ 时,$B=\{a|ma+1=0\}=\{-\frac{1}{m}\}$.

$\because\ A\subsetneqq B$ 成立,则有 $-\frac{1}{m}=2$ 或 $-\frac{1}{m}=-3$,$\therefore\ m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=\frac{1}{3}$.

故所求 m 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$.

跳出陷阱

题1 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,

(1) 若 $B\subseteq A$,求 a 的值;

(2) 若 $A\subseteq B$,求 a 的值.

错解 $A=\{x|x^2+4x=0\}=\{0,-4\}$.

(1) $\because\ B\subseteq A$,$\therefore\ B=A$ 或 $B\subsetneqq A$,

$\therefore\ 0\in B$ 或 $-4\in B$.

当 $0\in B$ 时 $0^2+2(a+1)\cdot0+a^2-1=0$,

解之得:$a=\pm1$.

当 $-4\in B$ 时,$(-4)^2+2(a+1)\cdot(-4)+a^2-1=0$,

解之得:$a=1$ 或 $a=7$.

验证 当 $a=1$ 时,$B=\{x|x^2+4x=0\}=A$;

当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}\subsetneqq A$;

当 $a=7$ 时,$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}\not\subseteq A$;

$\therefore\ a=\pm1$.

(2) $\because\ A\subseteq B$,$\therefore\ A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

由(1)的计算知 $a=\pm1$ 或 $a=7$.

剖析 对于(1)虽然对 a 的取值进行了验证,但没有讨论 $B=\varnothing$ 的情形;对于(2)因没有验证 a 的取值则可能会使 $A\not\subseteq B$.

正解 $A=\{0,-4\}$,

(1) $\because\ B\subseteq A$,$\therefore\ B=A$ 或 $B\subsetneqq A$.

若 $0\in B$,则 $a^2-1=0$ 解得 $a=\pm1$.

当 $a=1$ 时,$B=\{x|x^2+4x=0\}=A$;

当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}\subsetneqq A$.

若 $-4\in B$,则 $a^2-8a+7=0$ 解得 $a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=7$ 时,$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}\not\subseteq A$.

若 $B=\varnothing$,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a-1)^2<0$,

解得 $a<-1$.

综上所述得 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

(2) $\because A\subseteq B$, $\therefore A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

$\because A=\{0,-4\}$,

而 B 中最多有两个元素.

$\therefore A=B$,解得 $a=1$.

思维拓展

数形结合的思想在集合中的运用

由于集合与集合的关系比较抽像,以致解题时感到困难重重,但如果我们在解决问题时,能够数形结合,借助图形进行思考,不仅可以使各集合之间的相互关系直观明了,而且也便于将各元素的归属确定下来,使抽像的集合问题,变得直观形像,从而化难为易.

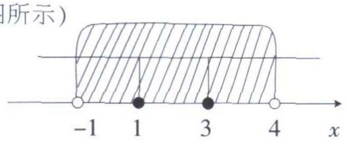
例 1 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x^2-4x+3\leqslant0\}$,集合 N 与 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 的所有元素组成全集 R,集合 N 与 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 的元素公共部分组成集合 $\{x|-1<x<1$ 或 $3<x<4\}$,求集合 N.

解 $\because M=\{x|x^2-4x+3\leqslant0\}=\{x|1\leqslant x\leqslant3\}$,

$\therefore\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$.

$\because N$ 与 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 的所有元素组成全集 $\mathbf{R}$,则 $M\subseteq N$,N 与 $\complement_{\mathbf{R}}M$ 的公共元素构成 $\{x|-1<x<1$ 或 $3<x<4\}$,则 $\{x|-1<x<1$ 或 $3<x<4\}\subseteq N$.

在数轴上表示(如下图所示)



所以集合 N 为 M 及 $\{-1<x<1$ 或 $3<x<4\}$ 的元素组成.

故 $N=\{x|-1<x<4\}$.

考题透视

1. (2000 年广东高考题)已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$,那么 A 的真子集的个数是(　　)

A. 15　　B. 16　　C. 3　　D. 4

解 可用列举法写出符合条件的真子集,也可通过 $n=2^4-1=15$ 计算得到.

故选 A.

2. (1999 年上海高考题)设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$,$B=\{x|\frac{2x-1}{x+1}<1\}$.若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

解 由已知 $A=\{x|a-2<x<a+2\}$,由 $\frac{2x-1}{x+1}-1<0$,得 $\frac{2x-1}{x+1}-1<0$.

$\because \dfrac{x-3}{x+2}<0$, $\therefore -2<x<3$.

$\therefore B=\{x|-2<x<3\}$.

$\because A\subseteq B$,

$\therefore \begin{cases}a-2\geqslant -2\\ a+2\leqslant 3,\end{cases}$ $\therefore 0\leqslant a\leqslant 1$.

故所求a的取值范围是$0\leqslant a\leqslant 1$.

习题精练

1. 下列六个关系式:(1)$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;(2)$\{a,b\}=\{b,a\}$;(3)$\{0\}\supsetneqq\varnothing$;(4)$0\in\{0\}$;(5)$\varnothing\in\{0\}$;(6)$\varnothing=\{0\}$. 其中正确的个数是(　　)

A.6　　B.5　　C.4　　D.小于 4

2. 设 $A=\{0,a\}$,且 $B=\{x|x\in A\}$,则集合 A 与集合 B 的关系是(　　)

A.$A\supsetneqq B$　　B.$B\subseteq A$　　C.$A=B$　　D.$A\in B$

3. 集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|2m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$,且 $A\supseteq B$,则实数 m 的取值范围是 ______.

4. 设全集 $U=\mathbf{Z}$,集合 $A=\{x|x<-3$ 或 $x\geqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}$,则$\complement_{\mathbf{Z}}A=$______.

5. 已知集合 $A=\{x,x^2,y^2-1\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,且 $A=B$,求 x,y 的值.

6. 设全集 $S=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$A=\{x|x^2-px+q=0\}$,若$\complement_S A=\varnothing$,求 p,q.

习题答案

1. C　　　　2. C

3. $-1\leqslant m\leqslant \dfrac{1}{2}$

4. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

5. 由 $A=B$,又 $0\in B$,得 $0\in A$.

若 $x=0$,则 $x^2=0$ 且 $|x|=0$,这样集合 A、B 中均有两个元素为 0,这与集合中的元素是互异的,即元素不能重复出现相矛盾,故 $x=0$ 不合题意.同理,若 $x^2=0$,则 $x=0$ 且 $|x|=0$,也出现 A 与 B 中均有两个元素为 0,故 $x^2=0$ 也不合题意.所以 $y^2-1=0$,解得 $y=\pm1$,若 $y=1$,则 $1\in B$,又因 $A=B$,所以 $1\in A$,若 $x=1$,有 $x^2=1$ 且 $|x|=1$,这样 $A=\{1,1,0\}$,$B=\{0,1,1\}$又与集合中元素不能重复出现相矛盾,故 $y=1$ 也不合题意.若 $y=-1$,则$-1\in B$,又因 $A=B$,所以$-1\in A$,x^2 为非负数,故 $x=-1$,这时 $x^2=1$,$|x|=1$,于是 $A=\{-1,1,0\}$,$B=\{0,1,-1\}$,即 $A=B$,综上所述 $x=-1$,$y=-1$.

6. 解:$S=\{1,2\}$.

$\because \complement_S A=\varnothing$, $\therefore A=S$.

$\therefore$ $x=1$,$x=2$ 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两根, $\therefore p=3$,$q=2$.

第三节 交集、并集

知识要点

1. 交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$(读作 A 交 B).

即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 并集 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$(读作 A 并 B).

即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

3. 重要性质

(1) $A\cap A=A$，$A\cup A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$；

(2) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cap B\subseteq A\cup B$；

(3) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

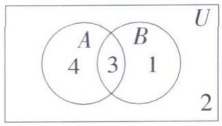
(4) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，

$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

典例精析

例 1 设集合 A、B 都是全集 $U=\{1,2,3,4\}$的子集，已知$(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$，求$\complement_U(A\cup B)$.

分析 由于题设条件较多，关系比较复杂可借助图形来考虑.



解 如右图，用方框表示全集 U，用两个圆分别表示集合 A 与 B.

由$(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，在 A 之外 B 之内填上 1；

由 $A\cap B=\{3\}$，在 A，B 的公共部分填上 3；

已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，因此应在 A 之内 B 之外填写 4.

因此由图知 $A\cup B=\{1,3,4\}$，从而$\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

例 2 已知 $M=\{(x,y)|y=x+a\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2=2\}$，求使得等式 $M\cap N=\varnothing$ 成立的实数 a 的取值范围.

分析 $M\cap N=\varnothing$，说明集合 M、N 无公共元素，从而它们对应的方程组无实数根.

解 $M\cap N=\{(x,y)|(x,y)\in M$ 且 $(x,y)\in N\}=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=x+a\\x^2+y^2=2\end{cases}\right\}$，

所以 $M\cap N=\varnothing$ 等价于方程组

$\begin{cases} y=x+a & \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$ 消去 y 化简整理得:$2x^2+2ax+a^2-2=0$ ……(3)无实数根，

所以 $\Delta=(2a)^2-4\cdot2\cdot(a^2-2)<0$.

解得 $a>2$ 或 $a<-2$.

故所求 a 的取值范围是$\{a|a>2$ 或 $a<-2\}$.

例 3 设全集 $S=\mathbf{R}$, $A=\{x|x^2+px+12=0, x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x|x^2+5x+q=0, x\in\mathbf{N}\}$, 若 $(\complement_S A)\cap B=\{2\}$, $(\complement_S B)\cap A=\{4\}$, $p, q\in\mathbf{Z}$.试求 $p+q$ 的值和 $A\cup B$.

分析 由$(\complement_S A)\cap B=\{2\}$, 有 $2\in\complement_S A$, $2\in B$, 即 $2\notin A$ 且 $2\in B$, 又由$(\complement_S B)\cap A=\{4\}$, 则有 $4\in A$ 且 $4\notin B$.

解 依题意, $2\in B$

$\because$ $2^2-5\times2+q=0$,

$\therefore$ $q=6$.

又 $\because$ $4\in A$, $\therefore$ $4^2+4p+12=0$.

$\therefore$ $p=-7$.

故 $A=\{x|x^2-7x+12=0, x\in\mathbf{N}\}=\{3,4\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0, x\in\mathbf{N}\}=\{2,3\}$.

所以 $p+q=-1$, $A\cup B=\{2,3,4\}$.

跳出陷阱

题 1 已知 $A=\{y|y=x^2-4x+3, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=-x^2-2x+2, x\in\mathbf{R}\}$, 求 $A\cap B$.

错解 由已知可得方程组

$\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ y=-x^2-2x+2 \end{cases}$ 消去 y, 得方程 $2x^2-2x+1=0$

因为 $\Delta=(-2)^2-4\cdot2\cdot1=-4<0$,

所以方程组无实根.因而 $A\cap B=\varnothing$.

剖析 产生上述错解的原因是未弄清集合 A、B 的元素是什么,把“数”y 误为“数对”$(x$、$y)$,以为求交集就是解方程组,就是找两抛物线的交点,其实本题是求两数集的交集.

正解 由 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$ 及

$y=-x^2-2x+2=3-(x+1)^2\leqslant3$

知 $A=\{y|y\geqslant-1\}$, $B=\{y|y\leqslant3\}$,

所以 $A\cap B=\{y|-1\leqslant y\leqslant3\}$.

题 2 设 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1\}=0, x\in R\}$, 且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$, 求实数 P 的取值范围.

错解 由 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 得 $x\leqslant0$.

所以 $\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0\\ x_1+x_2=-(p+2)\leqslant 0\\ x_1\cdot x_2=1\geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}p\geqslant 0 \text{ 或 } p\leqslant -4\\ p\geqslant -2.\end{cases}$

$\therefore\ p\geqslant -2.$

剖析 上述解法没有考虑到 $A=\varnothing$ 时的情况，实际上 $A=\varnothing$ 时，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 也成立.

正解 因为 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，

所以 ①当 $A\neq\varnothing$ 时，解法同上得 $p\geqslant -2$；

②当 $A=\varnothing$ 时，则

$x^2+(p+2)x+1=0$ 无实数根，

所以 $\Delta=(p+2)^2-4<0$.

解得 $-4<p<0$.

故由①、②讨论可知 p 的取值范围是 $p>-4$.

思维拓展

1. 准确转化集合用语

例 1 设全集 $U=\{(x,y)|x、y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=($　　$)$

A.$\varnothing$　　B.$\{(2,3)\}$　　C.$(2,3)$　　D.$\{(x,y)|y=x+1\}$

解法一 $\because\ M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}=\{(x,y)|y=x+1,x\neq 2,y\neq 3\}$，

$\therefore\ \complement_U M=\{(x,y)|y\neq x+1 \text{ 或 } x=2,y=3\}$，

$\complement_U N=\{(x,y)|y=x+1\}$，

$\therefore\ (\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{(2,3)\}$.

$\therefore$ 选 B.

解法二 因 M 表示直线 $y=x+1$ 上除去点 $(2,3)$ 的部分，$\complement_U M$ 表示点 $(2,3)$ 和除去直线 $y=x+1$ 的部分，$\complement_U N$ 表示直线 $y=x+1$ 上的点集，所以 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 表示的点集仅有点 $(2,3)$，即 $\{(2,3)\}$.

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-2ax+1=0\}$，$B=\{x|x<0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解法一 $\because\ A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore$ 方程 $x^2-2ax+1=0$ 有负根，从而方程的根有三种情况:

①当方程有两个负根时 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2=2a<0\\ x_1.x_2>0\end{cases}$ $\therefore\ a\leqslant -1$;