

初等数学

几 何

上海人民教育出版社

初 等 数 学

几 何

〈初等数学〉编写组

上海人民出版社

初 等 数 学

几 何

《初等数学》编写组

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 860×1168 1/32 印张 10 字数 245,000

1973年8月第1版 1973年8月第1次印刷

印数: 1—28,000

统一书号: 13171·57 定价: 1.00 元

出版说明

这部《初等数学》分代数与几何两分册。代数分册介绍代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容。几何分册的前半部分介绍三角形（包括边角计算）和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容。

本书可供准备学习高等数学和理工科其他专业知识的读者选用，但使用时必须注意两册的配合。

由于我们思想水平不高，教学实践又少，教材中一定有不少缺点和错误，望同志们指正。

《初等数学》编写组

1973年5月

目 录

第一章 几何的初步知识	1
第一节 几何的研究对象	1
一、形的概念(1) 二、常见的一些几何图形(2) 习题(12)	
第二节 几何中的推理论证	13
一、推理方法(13) 二、理论和实践的统一(16) 习题(17)	
第二章 三角形	19
第一节 三角形三内角的和与勾股定理	19
一、三角形三内角的和(20) 二、勾股定理(23) 小结(26) 习题(26)	
第二节 全等三角形	28
一、全等三角形的判定(29) 二、等腰三角形(37) 小结(42) 习题(43)	
第三节 相似三角形	46
一、相似三角形的判定(46) 二、应用举例(50) 小结(54) 习题(55)	
复习题	57
第三章 三角形的边角计算	60
第一节 直角三角形的边角计算	60
一、直角三角形的边角分析(60) 二、正弦和余弦(63) 三、正切(66) 四、解直角三角形的应用举例(68) 五、三角比之间的关系(72) 小结(74) 习题(76)	
第二节 一般三角形的边角计算	79
一、正弦定理(80) 二、余弦定理(82) 三、应用举例(84) 小结(90) 习题(90)	
复习题	91
第四章 圆	95
第一节 圆内的角和弦	95
一、弦和直径(96) 二、圆心角和圆周角(98) 小结(101) 习题(102)	

第二节 直线与圆弧、圆弧与圆弧的连接.....	103
一、直线与圆相切 圆与圆相切(103) 二、直线与圆弧的连接 (109) 三、圆弧与圆弧的连接(113) 小结(114) 习题(115)	
第三节 弧长和弧度制	117
一、圆周长 弧长(117) 二、弧度制(119) 小结(122) 习题(122)	
第四节 圆的面积	123
一、圆和扇形的面积(123) 二、展开图的面积(126) 习题(136)	
复习题	138
第五章 直线和圆的方程	141
第一节 点和坐标	142
一、距离公式(142) 二、定比分点公式(144) 三、坐标轴的平移 移轴公式(146) 小结(148) 习题(149)	
第二节 曲线和方程	150
一、曲线和方程(150) 二、应用实例(153) 三、圆的方程(154) 小结(158) 习题(159)	
第三节 直线的方程	160
一、直线的方程(161) 二、一次方程与直线(164) 小结(165) 习题(166)	
第四节 直线和直线、直线和圆的位置关系	167
一、两直线的交角 平行、垂直条件(167) 二、直线和圆的相交、 相切(171) 三、点到直线的距离(174) 小结(176) 习题(176)	
复习题	178
第六章 抛物线 椭圆 双曲线	181
第一节 抛物线	181
一、抛物线的定义和标准方程(181) 二、抛物线的图形(183) 三、抛物线的光学性质(186) 四、 $y=ax^2+bx+c$ 的图形(190) 五、用待定系数法求抛物线方程(192) 小结(193) 习题(194)	
第二节 椭圆	196
一、椭圆的定义和标准方程(196) 二、椭圆的图形(198) 小结(202) 习题(203)	
第三节 双曲线	203
一、双曲线的定义和标准方程(203) 二、双曲线的图形(205) 小结(210) 习题(211)	
复习题	211

第七章 极坐标与参数方程	214
第一节 极坐标	214
一、极坐标系(214) 二、曲线的极坐标方程(215) 三、等速螺线和凸轮(220) 四、极坐标与直角坐标的互换(223) 小结(225) 习题(226)	
第二节 参数方程	227
一、曲线的参数方程(227) 二、渐开线和摆线(232) 小结(235) 习题(236)	
复习题	237
附录 I 初等数学应用选编	239
一、十等分圆周(239) 二、制作圆台形风帽的落料方法(242) 三、正弦量具(244) 四、螺纹中径的测量(247) 五、圆弧半径的测量(249) 六、正弦尺铲磨机(251) 七、万能工具显微镜(253) 八、渐开线检查仪(255) 九、正多边形切削的数学原理(257) 十、三角活塞旋转式发动机的缸体型线(261) 十一、圆弧凸轮(265) 十二、合理落料问题(269)	
附录 II 坐标变换与二次曲线	272
第一节 坐标变换	272
一、移轴(272) 二、转轴(273) 三、一般坐标变换(274) 四、曲线方程变形举例(276)	
第二节 二次曲线	279
一、二次曲线一般方程的化简(279) 二、二次曲线的分类(283) 三、二次曲线类型的判定(286) 习题(288)	
附录 III 空间直线与平面	289
第一节 平面的确定	290
一、平面的表示法(290) 二、平面的确定(291)	
第二节 异面直线	292
一、三线平行定理(293) 二、异面直线的夹角和距离(294) 习题(296)	
第三节 直线与平面	297
一、直线和平面平行(297) 二、直线与平面相交(299) 习题(305)	
第四节 平面与平面	306
一、平行平面(307) 二、相交平面(308) 习题(312)	

第一章 几何的初步知识

第一节 几何的研究对象

一、形的概念

恩格斯说：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。”¹⁾

人们在生产实践中，接触到各种各样的物体。每种物体都有一定的形状，还有颜色、质料、硬度、重量等其它属性。所有这些属性，都需要分门别类地加以研究。当我们考察物体的形状，即其空间形式时，就把物体的其他属性暂时撇开，而只是把它们的形状拿来比较，概括其共性，从而得到反映物体空间形式的几何图形。譬如，不论是瓷杯，玻璃杯，还是塑料杯，它们的杯口都是圆形的；不论是木球，皮球，还是铅球，它们都是球形的，这里，圆和球都是几何图形。

几何学从空间关系出发，通过研究几何图形的内部规律性，解决实践中遇到的有关形的问题。

例如建造房屋时，要设计屋架的形状。许多屋架的形状如图1-1所示。下面一根梁叫做下弦杆，中间一根柱叫做直腹杆。在实践中常遇到这样的问题：

已知下弦杆和直腹杆的长度，要求屋架中其他杆的长度。

1) 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

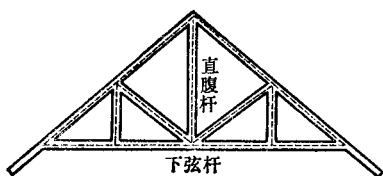


图 1-1

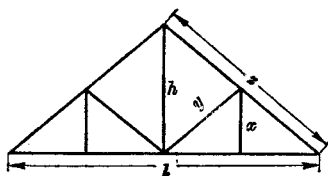


图 1-2

为了研究的方便,我们用线段表示杆,从而把屋架的形状抽象成如图 1-2 所示的几何图形。这样,刚才提出的实际问题就转化为已知两线段长度 l 和 h , 求另外三线段长度 x 、 y 和 z 。

为了求 x 、 y 和 z , 可以使用判断和推理的方法,来分析图 1-2 中各线段的内在联系,找出它们长度间的关系,然后利用这些关系算出 x 、 y 和 z 。

求出 x 、 y 和 z 后,把这些结果用到实际中去,就解决了屋架设计的问题。

几何学的研究就是这样遵循“实践——理论——实践”的道路前进的。

二、常见的一些几何图形

下面介绍一些常见的简单的几何图形。

任何一个几何图形都是由面、线、点组成的,面、线、点叫做几何的基本元素。例如长方体,它的表面就是面,面与面相交的地方就是线,线与线相交的地方就是点(图 1-3)。

由这些基本元素构成的简单几何图形有直线、角、平行线、三角形和长方体等。

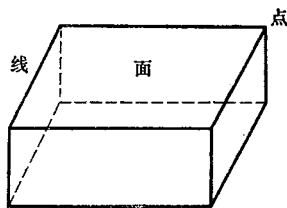


图 1-3

1. 直线

如长方体的边沿、书本的边沿、一段拉直的电线等等,它们都

是有两个端点的线,这种线叫做线段。

把线段向一方无限延长就叫做射线,射线只有一个端点,例如探照灯发出的光线就是射线。

把线段向两方无限延长就叫做直线,直线是没有端点的。人们通过实践认识到过两点能够作也只能作一条直线,也就是说,直线的位置由它上面任意两点的位置所确定,即两点决定一直线。

对于线段,我们把它的端点用两个大写字母例如 A 、 B 表示,并把这条线段记作 AB , 或用一个小写字母 l 表示 (图 1-4)。

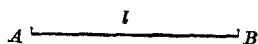


图 1-4



图 1-5

对于射线,如把它的一个端点记作 A , 再在射线上任意取一点 X , 则这条射线可记作 AX (图 1-5)。

对于直线,可在其上任意取两点 M 、 N , 记这直线为 MN (图 1-6)



图 1-6

长度单位
┌───┐
1 厘米

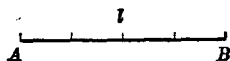


图 1-7

因为线段有两个端点,它是介于两个端点间的部分,所以它有一定的长度。要度量一条线段的长度,需要选定一种长度单位。比如选 1 厘米做长度单位,用它去度量线段 AB , 如果刚好是 1 厘米的 4 倍,那么这条线段 AB 就有 4 厘米长 (图 1-7)。

2. 角

角是简单的直线图形,图 1-2 中屋架的各根杆之间都形成了角。又如时钟的长、短针之间也形成了角。

一般地,从一点引出两条射线所组成的图形就是角。引出射

线的点叫做角的顶点，两条射线叫做角的边。如图 1-8，角由射线 OA 和 OB 组成， O 点是角的顶点，这个角记为 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$ ，读作“角 AOB ”或“角 BOA ”。在不与其它角混淆的情况下，可简记为 $\angle O$ 。有时，为了方便起见，在角里注上数字或小写希腊字母，如图 1-9 中所示的角，可分别记作 $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$ 。

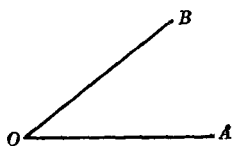


图 1-8

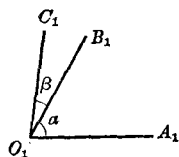
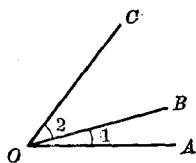


图 1-9

角也可以看成由一条射线绕它的端点旋转而得到。如图 1-10 中，一条射线绕着端点 O ，从 OA 位置转到 OB 位置，形成了角 $\angle AOB$ 。

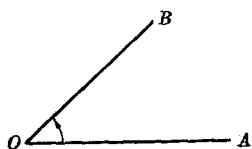
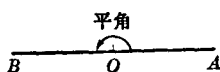
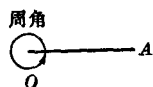


图 1-10



(甲)



(乙)

图 1-11

特别，若射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB ，当 OA 、 OB 形成反向射线时（图 1-11 (甲)）， $\angle AOB$ 叫做平角；继续转下去，使 OB 回到原来位置 OA （图 1-11 (乙)），形成的角叫做周角。

度量一个角的大小与度量一条线段的长短一样，需要选择一个度量单位。把一个周角分成 360 等分，这周角的 $\frac{1}{360}$ 我们称为 1 度，记为 1° ；把 1° 分成 60 等分，这 1° 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 分，记为 $1'$ ；把 $1'$ 分成 60 等分，这 $1'$ 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 秒，记为 $1''$ 。如 24 度 13 分 6 秒可记为 $24^\circ 13' 6''$ 。

这样，周角就等于 360° ；平角是周角的一半，等于 180° 。

通常，我们是用量角器来度量角的大小的。如图 1-12，把量角器上的圆心和角的顶点重合，并使量角器上 0° 的刻线对准角的一边。这时，角的另一条边在量角器上所对的读数，就是这个角的度数。如图 1-12 中， $\angle AOB = 50^\circ$ 。

我们把平角的一半也就是 90° 的角叫做直角，把小于 90° 的角叫做锐角，大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角。

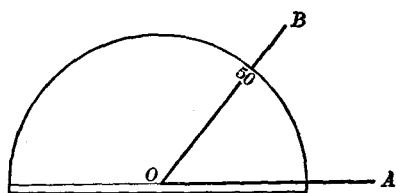


图 1-12

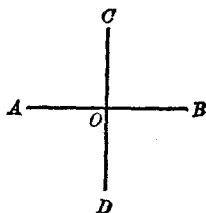


图 1-13

形成直角的两边叫做互相垂直。一般地说，当两条直线夹成直角时，这两条直线叫做互相垂直，其中一条叫另一条的垂线，交点叫垂足。如图 1-13 中， AB 与 CD 垂直，就记为 $AB \perp CD$ 或 $CD \perp AB$ 。记号“ \perp ”读作“垂直于”。建筑施工中定出的水平线与铅直线，机械加工中在工件上划出的十字线，都是互相垂直的直线，因而形成的角都是直角。

如果两只角的和等于 90° ，就称这两只角互为余角。如图 1-14 中 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为余角。如果两只角的和等于 180° ，就称这两只角互为补角。如图 1-15 中的 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 互为补角。又如， $52^\circ 10'$ 的余角为 $90^\circ - 52^\circ 10' = 37^\circ 50'$ ，而补角为

$$180^\circ - 52^\circ 10' = 127^\circ 50'.$$

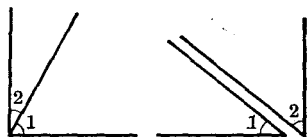


图 1-14



图 1-15

如果两条直线相交，它们形成四个角 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ (图 1-16)，我们把其中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 叫做对顶角，同样 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角。

从图 1-16 直观地看到对顶角是相等的。

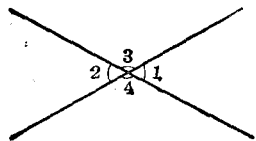


图 1-16

事实上，根据补角关系有

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 3, \quad \angle 2 = 180^\circ - \angle 3,$$

可知 $\angle 1$, $\angle 2$ 都等于 $180^\circ - \angle 3$ ，所以 $\angle 1 = \angle 2$ 。

因此得到：凡对顶角都相等。

几何中把通过实践总结出来或经过推理得到的图形的基本规律，叫做定理，象上面说的“凡对顶角都相等”就是一条定理。

3. 平行线

铁路上的两条笔直的铁轨，门的两条对边，都可以想象为无论怎样延长也不会相交的直线。在几何中，把同一平面内不相交的两条直线叫做平行线。若直线 AB 平行于 CD ，就记为 $AB \parallel CD$ 。

劳动人民在长期实践中，不断总结经验，创造了许多画平行线的方法。例如，把扳成一定角度的活络角尺贴紧木板一边，从一个位置移到另一个位置，就能划出一条条平行的直线 (图 1-17)。这种画法的特点，是活络角尺的角度始终不变，即 $\angle 1 = \angle 2$ 。由此可见，画出的直线 l_1 、 l_2 所以会平行，是与角度 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的相等分不开的。

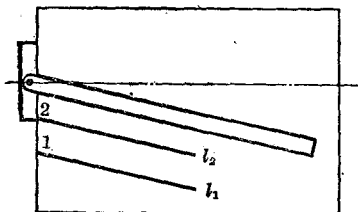


图 1-17

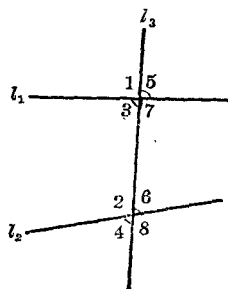


图 1-18

一般地，两直线 l_1 、 l_2 被第三条直线所截，构成八只角（图 1-18）。我们称 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 和 $\angle 6$ 、 $\angle 7$ 和 $\angle 8$ 为同位角； $\angle 2$ 和 $\angle 7$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 为内错角。

用活络角尺画平行线的事实告诉我们，两直线被第三条直线所截，如果同位角相等，这两条直线就一定平行。我们把这条判定两直线平行的重要方法简单叙述为

定理 同位角相等，则两直线平行。

反过来，如果两条平行直线被第三条直线所截，同位角一定相等。我们也可以简单叙述为

定理 两直线平行，则同位角相等。

上述定理中的同位角还可以换为内错角。在图 1-18 中，根据对顶角相等的定理， $\angle 1 = \angle 7$ 。于是，由 $\angle 1 = \angle 2$ 可推知 $\angle 7 = \angle 2$ 。因此，可以建立反映平行线与内错角之间联系的两个定理。

定理 内错角相等，则两直线平行。

定理 两直线平行，则内错角相等。

4. 三角形

三角形是研究一般几何图形的基础，实际应用也最广泛。

三角形也叫三边形，它有三条边和三个角，三条边两两相交，它们的交点叫做三角形的顶点。每一顶点用一大写字母表示，如图 1-19 中这个三角形可记为 $\triangle ABC$ ，读作“三角形 ABC ”。其中 $\angle A$ 对的边是 BC ，就称 $\angle A$ 是 BC 的对边，或称 BC 是 $\angle A$ 的对边。

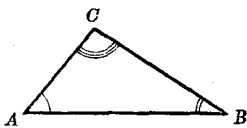


图 1-19

三角形中任意两边的和一定大于第三边，否则就不能构成三角形。又三角形的三只角的和等于 180° （理由在第二章中介绍）。

三角形除了以上最基本的性质外，它的面积的计算也是经常要用到的。

为了寻求三角形的面积的计算公式，我们从计算正方形和长

方形 (又称矩形) 的面积着手。

我们知道, 正方形的四边都相等, 长方形的对边相等而长与宽是不相等的, 它们的每一只角都是直角, 图 1-20 (甲) 是正方形 $ABCD$, (乙) 是长方形 $ABCD$. 要度量正方形和长方形的面积, 首先要给出一个作为标准的面积单位. 例如, 选边长为 1 厘米的正方形作为面积单位, 就记这个面积单位为 1 厘米², 读做“1 平方厘米”。

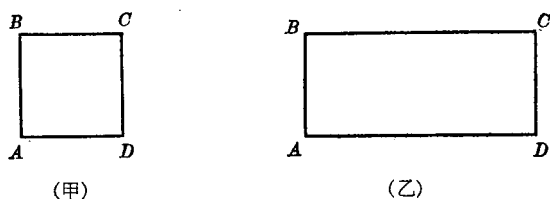


图 1-20

在图 1-21 中, (甲) 是一个正方形, 它的边长为 3 厘米, 这个正方形的大小正好是面积单位的 $3 \times 3 = 9$ 倍, 所以该正方形的面积是 9 厘米²; 图 1-21 (乙) 是一个长方形, 长为 4 厘米, 宽为 2 厘米, 这个长方形的大小是面积单位的 $2 \times 4 = 8$ 倍, 所以该长方形的面积为 8 厘米²。

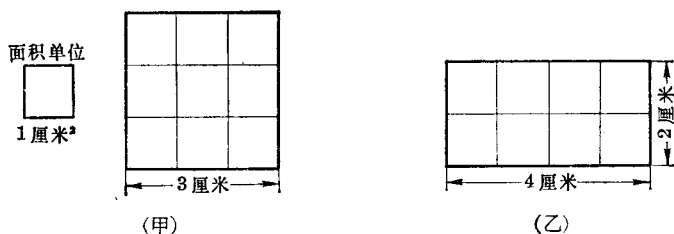


图 1-21

一般, 正方形和长方形的面积计算公式分别为

正方形面积 = 边长的平方,

长方形面积 = 长 \times 宽.

三角形的面积如何计算呢？

我们先讲直角三角形面积的计算方法。有一只角是直角的三角形叫做直角三角形。夹直角的两条边叫做直角边。取两个形状相同、大小相等的直角三角形 ABC 和 ACD 拼成如图 1-22 中的长方形 $ABCD$ 。

由于长方形 $ABCD$ 的面积等于 AB 与 BC 的乘积，而 $\triangle ABC$ 的面积是长方形 $ABCD$ 面积的一半，因而

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} (AB \times BC).$$

也就是说，直角三角形的面积等于两直角边乘积的一半。

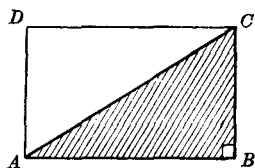


图 1-22

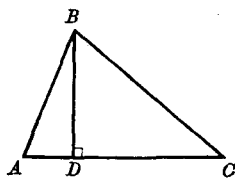


图 1-23

对于一般的三角形，可以把它分成两个直角三角形(图 1-23)，于是

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面积} &= \triangle ADB \text{ 的面积} + \triangle BDC \text{ 的面积} \\ &= \frac{1}{2} (AD \times BD) + \frac{1}{2} (DC \times BD) \\ &= \frac{1}{2} (AD + DC) BD = \frac{1}{2} (AC \times BD). \end{aligned}$$

从三角形的顶点向对边作垂线，顶点到垂足的距离叫做三角形在这条边上的高，相应地那条边叫做三角形的底。于是，三角形面积计算公式可写为

$$\text{三角形的面积} = \frac{1}{2} (\text{底} \times \text{高}).$$

5. 圆

圆是常见的曲线图形。如果要在平面上画一个圆，可以把圆规的一只脚固定在某点 O ，另一只脚绕它旋转一周，就画出一个位置和大小完全确定的圆。从画圆的过程可以看出，圆上每一点到定点 O 的距离都相等，这个距离 r 就是圆的半径，而 O 是圆心 (图 1-24)。这就是说，固定了圆心，决定了半径的长度，圆就完全确定了，所以，圆心决定圆的位置，半径决定圆的大小。

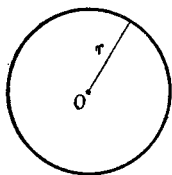


图 1-24

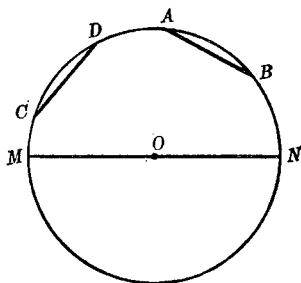


图 1-25

圆上任意两点之间的部分叫做圆弧，简称弧。如图 1-25 的 AB 弧，可记作 \widehat{AB} 。

连接弧的两个端点的线段叫做弦，过圆心的弦叫做直径。在图 1-25 中， AB 是弦， MN 是直径。显然，直径等于半径的两倍。

在同圆内，两段相等的弧所对的弦也相等。反过来，等弦所对的弧也相等。如在图 1-25 中， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ，则 $AB = CD$ ，反之，若 $AB = CD$ ，则 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 。

工件轮廓线中转弯部分常常用圆弧连接，如图 1-26。

6. 长方体

长方体是由六个两两平行的长方形的面围成的立体图形，六个面的交线形成十二根线段，这些线段的长度分三组，每组四

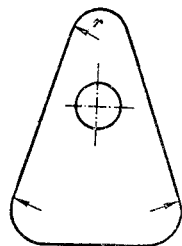


图 1-26