初等数学

几　何

上海人民出版社

初 等 数 学

几 何

《初等数学》编写组

上 海 人 民 出 版 社

初 等 数 学

几 何

《初等数学》编写组

上海人民出版社出版

（上 海 绍 兴 路 5 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 245,000

1973 年 8 月第 1 版 1973 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—28.000

统一书号：13171·57 定价：1.00 元

出版说明

这部《初等数学》分代数与几何两分册．代数分册介绍代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容．几何分册的前半部分介绍三角形（包括边角计算）和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容．

本书可供准备学习高等数学和理工科其他专业知识的读者选用，但使用时必须注意两册的配合．

由于我们思想水平不高，教学实践又少，教材中一定有不少缺点和错误，望同志们指正．

《初等数学》编写组

1973年5月

目　　录

第一章　几何的初步知识

第一节　几何的研究对象

一、形的概念

恩格斯说："**和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。**"1)

人们在生产实践中，接触到各种各样的物体．每种物体都有一定的形状，还有颜色、质料、硬度、重量等其它属性．所有这些属性，都需要分门别类地加以研究．当我们考察物体的形状，即其空间形式时，就把物体的其他属性暂时撇开，而只是把它们的形状拿来比较，概括其共性，从而得到反映物体空间形式的几何图形．譬如，不论是瓷杯，玻璃杯，还是塑料杯，它们的杯口都是圆形的；不论是木球，皮球，还是铅球，它们都是球形的，这里，圆和球都是几何图形．

几何学从空间关系出发，通过研究几何图形的内部规律性，解决实践中遇到的有关形的问题．

例如建造房屋时，要设计屋架的形状．许多屋架的形状如图 1-1 所示．下面一根梁叫做下弦杆，中间一根柱叫做直腹杆．在实践中常遇到这样的问题：

已知下弦杆和直腹杆的长度，要求屋架中其他杆的长度．

1) 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页．

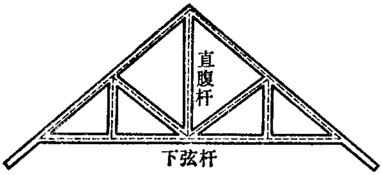


图 1-1

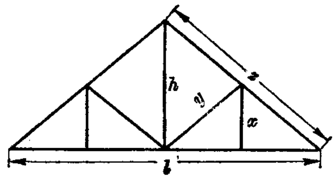


图 1-2

为了研究的方便，我们用线段表示杆，从而把屋架的形状抽象成如图 1-2 所示的几何图形．这样，刚才提出的实际问题就转化为已知两线段长度 l 和 h，求另外三线段长度 x、y 和 z.

为了求 x、y 和 z，可以使用判断和推理的方法，来分析图 1-2 中各线段的内在联系，找出它们长度间的关系，然后利用这些关系算出 x、y 和 z.

求出 x、y 和 z 后，把这些结果用到实际中去，就解决了屋架设计的问题.

几何学的研究就是这样遵循“实践——理论——实践”的道路前进的.

二、常见的一些几何图形

下面介绍一些常见的简单的几何图形.

任何一个几何图形都是由面、线、点组成的，面、线、点叫做几何的基本元素．例如长方体，它的表面就是面，面与面相交的地方就是线，线与线相交的地方就是点（图 1-3）.

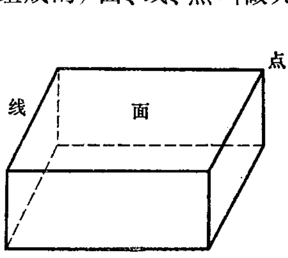


图 1-3

由这些基本元素构成的简单几何图形有直线、角、平行线、三角形和长方体等.

1. 直线

如长方体的边沿、书本的边沿、一段拉直的电线等等，它们都

是有两个端点的线，这种线叫做线段.

把线段向一方无限延长就叫做射线，射线只有一个端点，例如探照灯发出的光线就是射线.

把线段向两方无限延长就叫做直线，直线是没有端点的. 人们通过实践认识到过两点能够作也只能够作一条直线，也就是说，直线的位置由它上面任意两点的位置所确定，即两点决定一直线.

对于线段，我们把它的端点用两个大写字母例如 A、B 表示，并把这条线段记作 AB，或用一个小写字母 l 表示（图 1-4）.

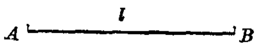


图 1-4

图 1-5

对于射线，如把它的一个端点记作 A，再在射线上任意取一点 X，则这条射线可记作AX（图 1-5）.

对于直线，可在其上任意取两点 M、N，记这直线为 MN（图 1-6）

图 1-6

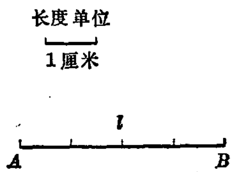


图 1-7

因为线段有两个端点，它是界于两个端点间的部分，所以它有一定的长度. 要度量一条线段的长度，需要选定一种长度单位. 比如选 1 厘米做长度单位，用它去度量线段 AB，如果刚好是 1 厘米的 4 倍，那么这条线段 AB 就有 4 厘米长（图 1-7）.

2. 角

角是简单的直线图形，图 1-2 中屋架的各根杆之间都形成了角. 又如时钟的长、短针之间也形成了角.

一般地，从一点引出两条射线所组成的图形就是角. 引出射

线的点叫做角的顶点，两条射线叫做角的边．如图 1-8，角由射线 OA 和 OB 组成，O 点是角的顶点，这个角记为 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$，读作“角 AOB”或“角 BOA”．在不与其它角混淆的情况下，可简记为 $\angle O$．有时，为了方便起见，在角里注上数字或小写希腊字母，如图 1-9 中所示的角，可分别记作 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle\alpha$，$\angle\beta$．

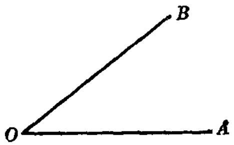


图 1-8

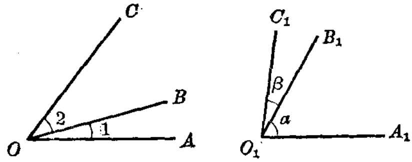


图 1-9

角也可以看成由一条射线绕它的端点旋转而得到．如图 1-10 中，一条射线绕着端点 O，从 OA 位置转到 OB 位置，形成了角 $\angle AOB$．

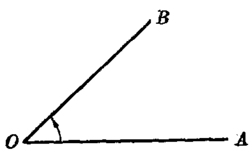
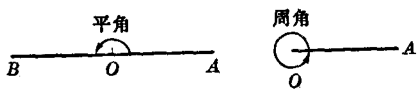


图 1-10



（甲）　　（乙）

图 1-11

特别，若射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB，当 OA、OB 形成反向射线时（图 1-11（甲）），$\angle AOB$ 叫做平角；继续转下去，使 OB 回到原来位置 OA（图 1-11（乙）），形成的角叫做周角．

度量一个角的大小与度量一条线段的长短一样，需要选择一个度量单位．把一个周角分成 360 等分，这周角的 $\frac{1}{360}$ 我们称为 1 度，记为 1°；把 1° 分成 60 等分，这 1° 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 分，记为 $1'$；把 $1'$ 分成 60 等分，这 $1'$ 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 秒，记为 $1''$．如 24 度 13 分 6 秒可记为 $24^\circ 13' 6''$．

这样，周角就等于 360°；平角是周角的一半，等于 180°．

通常，我们是用量角器来度量角的大小的．如图 1-12，把量角器上的圆心和角的顶点重合，并使量角器上 0° 的刻线对准角的一边．这时，角的另一条边在量角器上所对的读数，就是这个角的度数．如图 1-12 中，$\angle AOB=50^\circ$．

我们把平角的一半也就是 90° 的角叫做直角，把小于 90° 的角叫做锐角，大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角．

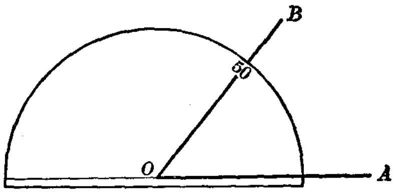


图 1-12

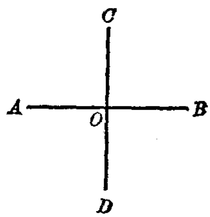


图 1-13

形成直角的两边叫做互相垂直．一般地说，当两条直线夹成直角时，这两条直线叫做互相垂直，其中一条叫另一条的垂线，交点叫垂足．如图 1-13 中，AB 与 CD 垂直，就记为 $AB\perp CD$ 或 $CD\perp AB$．记号“$\perp$”读作“垂直于”．建筑施工中定出的水平线与铅直线，机械加工中在工件上划出的十字线，都是互相垂直的直线，因而形成的角都是直角．

如果两只角的和等于 90°，就称这两只角互为余角．如图 1-14 中 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为余角．如果两只角的和等于 180°，就称这两只角互为补角．如图 1-15 中的 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 互为补角．又如，$52^\circ10'$ 的余角为 $90^\circ-52^\circ10'=37^\circ50'$，而补角为

$$180^\circ-52^\circ10'=127^\circ50'.$$

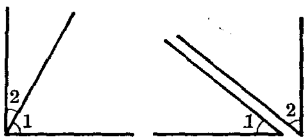


图 1-14

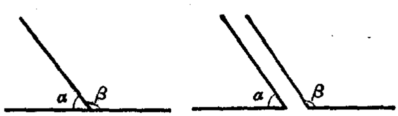


图 1-15

如果两条直线相交，它们形成四个角 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ (图 1-16)，我们把其中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 叫做对顶角，同样 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

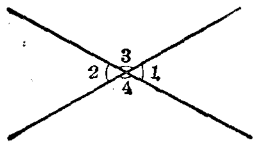


图 1-16

从图 1-16 直观地看到对顶角是相等的.

事实上，根据补角关系有

$$\angle 1=180^\circ-\angle 3, \qquad \angle 2=180^\circ-\angle 3,$$

可知 $\angle 1$, $\angle 2$ 都等于 $180^\circ-\angle 3$, 所以 $\angle 1=\angle 2$.

因此得到：凡对顶角都相等.

几何中把通过实践总结出来或经过推理得到的图形的基本规律，叫做定理，象上面说的“凡对顶角都相等”就是一条定理.

3. 平行线

铁路上的两条笔直的铁轨，门的两条对边，都可以想象为无论怎样延长也不会相交的直线. 在几何中，把同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 若直线 AB 平行于 CD, 就记为 $AB\parallel CD$.

劳动人民在长期实践中，不断总结经验，创造了许多画平行线的方法. 例如，把扳成一定角度的活络角尺贴紧木板一边，从一个位置移到另一个位置，就能划出一条条平行的直线 (图 1-17). 这种画法的特点，是活络角尺的角度始终不变，即 $\angle 1=\angle 2$. 由此可见，画出的直线 l_1、l_2 所以会平行，是与角度 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的相等分不开的.

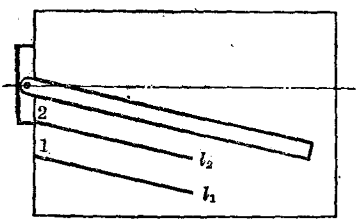


图 1-17

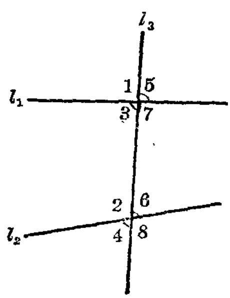


图 1-18

一般地，两直线 l_1、l_2 被第三条直线所截，构成八只角（图 1-18）．我们称 $\angle 1$ 和 $\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$、$\angle 5$ 和 $\angle 6$、$\angle 7$ 和 $\angle 8$ 为同位角；$\angle 2$ 和 $\angle 7$、$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 为内错角．

用活络角尺画平行线的事实告诉我们，两直线被第三条直线所截，如果同位角相等，这两条直线就一定平行．我们把这条判定两直线平行的重要方法简单叙述为

定理 同位角相等，则两直线平行．

反过来，如果两条平行直线被第三条直线所截，同位角一定相等．我们也可以简单叙述为

定理 两直线平行，则同位角相等．

上述定理中的同位角还可以换为内错角．在图 1-18 中，根据对顶角相等的定理，$\angle 1=\angle 7$．于是，由 $\angle 1=\angle 2$ 可推知 $\angle 7=\angle 2$．因此，可以建立反映平行线与内错角之间联系的两个定理．

定理 内错角相等，则两直线平行．

定理 两直线平行，则内错角相等．

4．三角形

三角形是研究一般几何图形的基础，实际应用也最广泛．

三角形也叫三边形，它有三条边和三个角，三条边两两相交，它们的交点叫做三角形的顶点．每一顶点用一大写字母表示，如图 1-19 中这个三角形可记为 $\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”．其中 $\angle A$ 对的边是 BC，就称 $\angle A$ 是 BC 的对角，或称 BC 是 $\angle A$ 的对边．

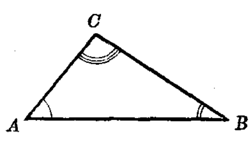


图 1-19

三角形中任意两边的和一定大于第三边，否则就不能构成三角形．又三角形的三只角的和等于 $180°$（理由在第二章中介绍）．

三角形除了以上最基本的性质外，它的面积的计算也是经常要用到的．

为了寻求三角形的面积的计算公式，我们从计算正方形和长

方形(又称矩形)的面积着手.

我们知道,正方形的四边都相等,长方形的对边相等而长与宽是不相等的,它们的每一只角都是直角,图 1-20 (甲) 是正方形 $ABCD$, (乙) 是长方形 $ABCD$. 要度量正方形和长方形的面积,首先要给出一个作为标准的面积单位. 例如,选边长为 1 厘米的正方形作为面积单位,就记这个面积单位为 1 厘米^2, 读做"1 平方厘米".

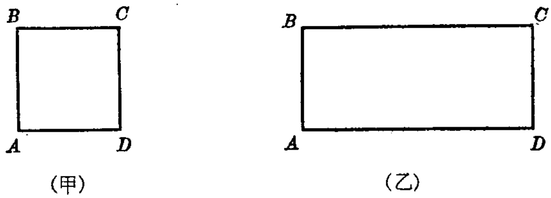


图 1-20

在图 1-21 中,(甲)是一个正方形,它的边长为 3 厘米,这个正方形的大小正好是面积单位的 $3\times3=9$ 倍, 所以该正方形的面积是 9 厘米^2; 图 1-21 (乙)是一个长方形,长为 4 厘米,宽为 2 厘米,这个长方形的大小是面积单位的 $2\times4=8$ 倍, 所以该长方形的面积为 8 厘米^2.

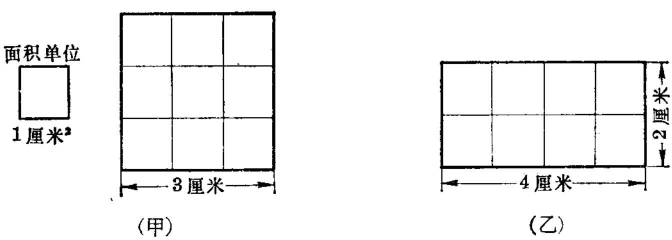


图 1-21

一般,正方形和长方形的面积计算公式分别为

正方形面积 = 边长的平方,

长方形面积 = 长 × 宽.

三角形的面积如何计算呢?

我们先讲直角三角形面积的计算方法．有一只角是直角的三角形叫做直角三角形．夹直角的两条边叫做直角边．取两个形状相同、大小相等的直角三角形 ABC 和 ACD 拼成如图 1-22 中的长方形 $ABCD$.

由于长方形 $ABCD$ 的面积等于 AB与BC 的乘积，而 $\triangle ABC$ 的面积是长方形 $ABCD$ 面积的一半,因而

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}(AB\times BC).$$

也就是说,直角三角形的面积等于两直角边乘积的一半.

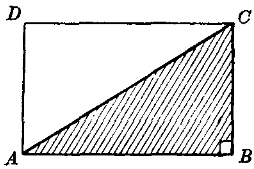


图 1-22

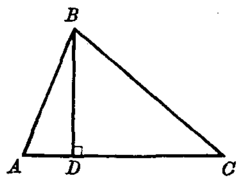


图 1-23

对于一般的三角形,可以把它分成两个直角三角形(图1-23),于是

$$\begin{aligned}&\triangle ABC\text{ 的面积}\\&\quad=\triangle ADB\text{ 的面积}+\triangle BDC\text{ 的面积}\\&\quad=\frac{1}{2}(AD\times BD)+\frac{1}{2}(DC\times BD)\\&\quad=\frac{1}{2}(AD+DC)BD=\frac{1}{2}(AC\times BD).\end{aligned}$$

从三角形的顶点向对边作垂线，顶点到垂足的距离叫做三角形在这条边上的高,相应地那条边叫做三角形的底．于是,三角形面积计算公式可写为

$$\text{三角形的面积}=\frac{1}{2}(\text{底}\times\text{高}).$$

5．圆

圆是常见的曲线图形．如果要在平面上画一个圆，可以把圆规的一只脚固定在某点 O，另一只脚绕它旋转一周，就画出一个位置和大小完全确定的圆．从画圆的过程可以看出，圆上每一点到定点 O 的距离都相等，这个距离 r 就是圆的半径，而 O 是圆心（图 1-24）．这就是说，固定了圆心，决定了半径的长度，圆就完全确定了，所以，圆心决定圆的位置，半径决定圆的大小．

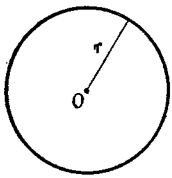


图　1-24

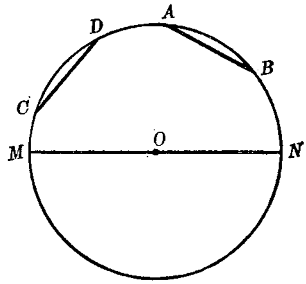


图　1-25

圆上任意两点之间的部分叫做圆弧，简称弧．如图 1-25 的 AB 弧，可记作 $\overset{\frown}{AB}$.

连接弧的两个端点的线段叫做弦，过圆心的弦叫做直径．在图 1-25 中，AB 是弦，MN 是直径．显然，直径等于半径的两倍．

在同圆内，两段相等的弧所对的弦也相等．反过来，等弦所对的弧也相等．如在图 1-25 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则 $AB=CD$，反之，若 $AB=CD$，则 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

工件轮廓线中转弯部分常常用圆弧连接，如图 1-26.

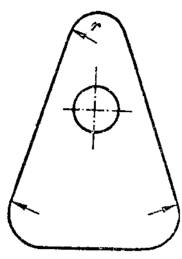


图　1-26

6．长方体

长方体是由六个两两平行的长方形的面围成的立体图形，六个面的交线形成十二根线段，这些线段的长度分三组，每组四