新世纪

高等职业教育
基础类课程规划教材

新编高等数学学习指导

（理工类 第四版）

GAODENG ZHIYE JIAOYU
JICHULEI KECHENG GUIHUA JIAOCAI

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主编 王国廷 刘 严

大连理工大学出版社

新世纪

高等职业教育基础类课程规划教材

新编高等数学学习指导

（理工类 第四版）

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主 编 王国廷 刘 严 副主编 丁 平 熊丽华

XINBIAN GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学学习指导(理工类) / 王国廷,刘严主编 . —4 版. — 大连 :大连理工大学出版社,2004.7

高等职业教育基础类课程规划教材

ISBN 7-5611-1460-5

Ⅰ. 新… Ⅱ. ①王… ②刘… Ⅲ. ①高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059632 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:13 字数:268 千字

印数:9 001 ~15 000

2002 年 8 月第 1 版 2004 年 7 月第 4 版

2004 年 7 月第 4 次印刷

责任编辑:李 波 责任校对:张战场

封面设计:波 朗

定 价:15.00 元

新世纪高等职业教育教材编委会教材建设指导委员会

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，迫人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高等职业教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走理论型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,高等职业教育从专科层次起步,进而高职本科教育、高职硕士教育、高职博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高职教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)理论型人才培养的教育并驾齐驱,还需假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高等职业教育教材编审委员会就是全国100余所高职院校和出版单位组成的旨在以推动高职教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职教材的特色建设为己任,始终会从高职教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的组织形式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职教学成果,探索高职教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高等职业教育教材编审委员会在推进高职教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意;也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友,在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高等职业教育教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)是新世纪高职教材编委会推出的《新编高等数学》(理工类 第四版)的配套辅助教材。

《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)是适应高职教育培养生产、建设、管理、服务需要的第一线技术应用型人才的需要,通过认真总结各相关高职院校数学教改经验,在经过几轮教学实践基础上完成的,是一部能较好地满足高职数学教学需要的配套辅导教材。《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)较之前三版在习题量上和难易程度上作了更为适当的把握。

《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)按照教学要求设计了下述四个板块:(1)本章教学目标及重点;(2)典型例题解析;(3)教材典型习题与难题解答;(4)综合测试题。在编写本学习指导的过程中,我们始终注意把握下述几点:

(1)通过每章知识点、重点的归纳,明确教学目标及要求,帮助学生把握重点知识,理解知识间的内在联系;

(2)典型例题与综合测试题的选取力求深浅适度,强调知识覆盖面,无论从题型、题量,还是从难易程度等方面都能恰到好处地反映高职院校高等数学课程教学基本要求;

(3)在帮助高职学生系统掌握相关数学知识的同时,更注重对学生获取知识和提高思维能力的培养。

《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)由辽宁工程技术大学职业技术学院王国廷、沈阳工程学院刘严任主编,辽宁石油化工大学职业技术学院丁平、大连轻工业学院职业技术学院熊丽华担任副主编。具体分工如下:第一章由熊丽华编写,第二章由熊丽华、孙丽共同编写,第三章由熊丽华、宿彦莉共同编写,第四章由王国廷编写,第五章由

王国廷、杨凤书共同编写；第六章由王国廷编写；第七章由刘严、张淑华共同编写。第八章由刘严、丁平、崔国生共同编写，第九章由刘严、丁平编写，第十章由刘严、刘凤敏共同编写，第十一、十二章由丁平编写。

尽管我们在《新编高等数学学习指导》(理工类 第四版)的特色建设方面做出了许多努力，但由于我们水平有限，书中仍难免有不妥之处，希望各教学单位和读者在使用本教材的过程中给予关注，并将意见及时反馈给我们，以便修订时改进。

所有意见和建议请发往：gzjckfb@163.com

联系电话：0411-84707604

编　者

2004 年 7 月

目 录

第一章

函数、极限与连续

一、本章教学目标及重点

【教学目标】

1. 理解函数的概念，了解函数的特性，会求函数的定义域，掌握复合函数与初等函数的概念。

2. 理解极限的概念，了解极限的性质，熟练掌握求极限的方法。

3. 理解、掌握极限的运算法则，熟练掌握两个重要极限。

4. 理解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小的性质，知道无穷小的比较，会利用等价无穷小求极限。

5. 理解函数的连续性概念，会求间断点并判断其类型。

6. 了解闭区间上连续函数的性质。

【知识点、重点归纳】

1. 定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域：

$y = \frac{1}{x}$　　定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$y = \sqrt[2n]{x}\quad(n = 1,2,3\cdots)$　　定义域为$[0,+\infty)$

$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$　　定义域为$(0,+\infty)$

$y = a^x(a > 0, a \neq 1)$　　定义域为$(-\infty,+\infty)$

$y = \sin x$ 或 $\cos x$　　定义域为$(-\infty,+\infty)$

$y = \tan x$　　定义域为$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

$y = \cot x$　　定义域为$\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$

$y = \arcsin x$ 或 $\arccos x$　　定义域为$[-1,1]$

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集(参见例 1)。

2. 复合函数的复合过程

首先要理解复合函数的定义，掌握基本初等函数及简单函数的定义域(见教材中附表)，其次清楚究竟谁为自变量、中间变量、因变量(参见例 2)。

3. 如何求极限

求极限是一元函数微积分中最基本的一种运算，其方法较多。主要有以下几种：

(1) 利用极限的定义，通过函数图像，直观地求出其极限；

(2) 利用极限的运算法则；

(3) 利用夹逼定理及单调有界原理；

(4) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；

(5) 利用无穷小的性质；

(6) 利用等价无穷小；常用的等价无穷小有：

当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$。

(7) 利用函数的连续性；

当 x_0 为函数的连续点时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$。

(8) 利用罗彼塔法则(详见第三章内容)。

4. 判断函数的连续性，确定间断点，其具体做法为：

(1) 寻找使函数 $f(x)$ 无定义的点 x_0，若有则 x_0 为间断点，否则进行第(2) 步；

(2) 寻找使 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在的点 x_0，若有则 x_0 为间断点，分段函数的间断点通常发生于分段点处；

(3) 寻找使 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ 的点 x_0，若有则 x_0 为间断点。

二、典型例题解析

【例 1】 求函数 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{x^2+5x}{6}}$ 的定义域。

【分析】 本题中涉及到两个基本函数 $y=\sqrt{x}$，$y=\lg x$，前者要求 $x\geq 0$，后者要求 $x>0$。

解
$$\begin{cases}\lg\dfrac{x^2+5x}{6}\geq 0\\ \dfrac{x^2+5x}{6}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+5x}{6}\geq 1\\ \dfrac{x^2+5x}{6}>0\end{cases}$$

即
$$\frac{x^2+5x}{6}\geq 1\Rightarrow x^2+5x-6\geq 0$$

由 $(x+6)(x-1)\geq 0$ 得

$$\begin{cases}x+6\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -6\\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$$

或
$$\begin{cases}x+6\leq 0\\ x-1\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq -6\\ x\leq 1\end{cases}\Rightarrow x\leq -6$$

所以函数的定义域为$(-\infty,-6]\cup[1,+\infty)$。

【例 2】　已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

【分析】　这是两个分段函数的复合，其核心问题是抓住中间变量的值域。

解　$f[g(x)]$ 的函数关系是

$$\begin{array}{ccccc} f & — & g & — & x \\ \text{因} & & \text{中} & & \text{自}\end{array}$$

由 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$ 得出 $g(x)$ 的取值范围。

当 $|x|\leqslant 1$ 时，$1\leqslant 2-x^2\leqslant 2$，$x=1$，$g(1)=1$；$x=-1$，$g(-1)=1$

当 $|x|>1$ 时，$g(x)=2$

所以
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$$

同样，对于 $g[f(x)]$ 有

$$\begin{array}{ccccc} g & — & f & — & x \\ \text{因} & & \text{中} & & \text{自}\end{array}$$

当 $|x|\leqslant 1$ 时，$f(x)=1$，$g(1)=1$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$，$g(0)=2$

所以
$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

【例 3】　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2\leqslant x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域，并找出其分段点；

(2) 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$；

(3) 作出 $f(x)$ 的图像。

【分析】　这是典型的分段函数问题，其关键是弄清楚分段点及各段所对应的函数表达式，这对于求分段函数的极限、判断其连续性非常重要。

解　(1) $f(x)$ 的定义域为 $[-2,+\infty)$；分段点为 $x=0$，$x=1$。

(2) $-1\in[-2,0)$，　$f(-1)=-1+2=1$

$0\in[0,1)$，　$f(0)=0^2=0$

$\frac{1}{2}\in[0,1)$，　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$1\in[1,+\infty)$，　$f(1)=1$

$2\in[1,+\infty)$，　$f(2)=1$

(3) 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1 所示。

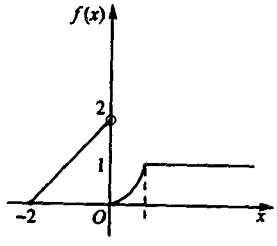

图 1-1

【例 4】 求极限$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

【分析】 属于基本题型,需要变型,将$\dfrac{0}{0}$型转化为定型极限的计算。

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

解 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=\dfrac{1}{4}$

【例 5】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-4x)^3}$

【分析】 属于基本题型,将$\dfrac{\infty}{\infty}$型转化为定型极限的计算。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-4x)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}-4\right)^3}=-\dfrac{1}{64}$

【例 6】 求极限$\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3}{1+x^3}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

【分析】 属于基本题型,将 $\infty-\infty$ 转化为定型极限的计算。

解
$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{1}{1+x}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{3-(x^2-x+1)}{1+x^3}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2-x^2+x}{1+x^3}=\lim_{x\to-1}\frac{(1+x)(2-x)}{(1+x)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2-x}{x^2-x+1}=1$$

【例 7】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$

【分析】 属于数列极限,但随着 n 无限增加,项数也在无限增加,不能直接利用极限的运算法则。

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{8}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{1}{2^n}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{x\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2$

【例 8】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$

【分析】 属于基本题型,含有三角函数,考虑重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$或利用相关极限结论$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$。

解法一
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}$$
$$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

解法二　$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}$$

【例 9】　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

【分析】　属于幂指函数求极限，考虑重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及其变形 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-1}$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\left[1-\frac{1}{(\sqrt{x})^2}\right]^{\sqrt{x}}=\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{\sqrt{x}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$$

解　$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1$$

【例 10】　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 2x^2+1, & 0\leqslant x<1\\ 3+(x-1)^3, & x\geqslant 1\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 4}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$。

【分析】　此题属于典型的分段函数求极限问题。求分段函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，关键看 x_0 是否为分段点。若是，用左、右极限讨论其极限，若不是，可利用连续函数特性求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$。

解　显然 $x=0$，$x=1$ 均为 $f(x)$ 的分段点，需求左、右极限。

因为
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x^2+1)=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1$$

所以
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

又
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}[3+(x-1)^3]=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x^2+1) = 3$$

所以
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

而
$$4 \in [1,+\infty),\ -3 \in (-\infty,0)$$

则
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}[3+(x-1)^3] = 30$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(1-x) = 4$$

【例 11】 求函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点,并判断其类型。

【分析】 属于函数连续性问题,根据概念知间断点一定会发生在使 $f(x)$ 无定义的点处。令 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$,得 $x_1=1,x_2=2$。

解 由于 $f(x)$ 在 $x=1,x=2$ 点无定义,故 $x=1,x=2$ 为其间断点。

又
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \infty$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点,$x=2$ 为第二类间断点。

【例 12】 A 取何值时,函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ A & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续?

【分析】 属于函数连续性问题,与例 11 不同之处是函数为分段函数,其在 $x=2$ 点是否连续,与 A 的取值有关。

解 根据函数连续的定义,若 $f(x)$ 在 $x=2$ 点连续,则有

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

即
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = A$$

$$A = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

当 $A=4$ 时,$f(x)$ 在 $x=2$ 点连续。

【例 13】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\leqslant 4\end{cases}$ 的连续性。

【分析】 属于函数连续性问题,需讨论整个定义域上的连续性。

解 $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi,4]$,其分段点为 $x=0,x=1$。

当 $x=-\pi$ 时,$\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^+}\sin x = \sin(-\pi) = 0$,所以函数在该点右连续;

当 $-\pi<x<0$ 时,$f(x)=\sin x$ 为基本初等函数,在该区间内连续;

当 $x=0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$,$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sin x = \sin 0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$,故 $x=0$ 为连续点;

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}0=0$，$x=1$ 为第二类间断点；

当 $1<x<4$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 为简单函数，在该区间内连续；

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=0$ 为常数函数，在该区间内连续；

当 $x=4$ 时，$\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{3}=f(4)$，函数在该点左连续。

综上所述，$f(x)$ 在 $[-\pi,1)\cup(1,4]$ 上为连续函数，而 $x=1$ 为第二类间断点。

三、教材典型习题与难题解答

习题 1-1

A　组

2(4) **解**　根据求定义域的方法，有

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant0\\x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant-2\text{ 或 }x\geqslant2\\x>2\end{cases}\Rightarrow x>2$$

函数的定义域为 $(2,+\infty)$

5(5) **解**　复合函数的复合过程，每一步都需要是基本初等函数和简单函数。

$y=\ln(\sin e^{x+1})$ 是由 $y=\ln u,u=\sin v,v=e^w,w=x+1$ 复合而成。

B　组

3(4) **解**　$y=\arccos[\ln(x^2-1)]$ 是由 $y=\arccos u,u=\ln v,v=x^2-1$ 复合而成。

习题 1-2

A　组

2 **解**　(1) 作出函数 $f(x)$ 的图像，如图 1-2 所示。

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在且等于 0。

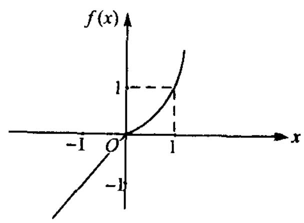

图 1-2

3 **解**　$x=0\in(-1,1)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 4x = 0$$

又$x = 1$为$f(x)$的分段点

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^2 = 4, \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4x = 4$$

则 $$\lim_{x\to 1} f(x) = 4, 而\ x = \frac{3}{2} \in (1,2), \lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}} 4x^2 = 9$$

B 组

2 解 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

而 $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1, \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

习题 1-3

A 组

2(3) 解 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{100x}{1+x^2} = 0$

由无穷小与无穷大的倒数关系知$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^2}{100x} = \infty$。

2(5) 解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{3-x} - \frac{2}{3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{3-x}\right) - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x} = -2 - 0 = -2$$

B 组

1(2) 解 $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = 0$$

1(4) 解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]\cdot 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3$$

2(4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}/e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = e^{-1}$$