SHUXUE SHITI JINGJIE

数学试题精解

硕士研究生入学考试

SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI

《大学数学》编辑部 编

合肥工业大学出版社

硕 士 研 究 生 入 学 考 试

数学试题精解

《大学数学》编辑部　编

合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书由《大学数学》编辑部考研辅导老师集体编写。它汇集了全国硕士研究生入学考试历年数学试题，并按国家教育部颁布的数学考试大纲要求分章编写。为了便于阅读，每章又分为工学类与经济学类，每类再分为填空题、选择题、计算题、证明题等。

本书特色之一是给出了客观性试题（填空题、选择题）的详解和略解，以帮助读者掌握这类问题的解题思路和方法；本书特色之二是尽可能地给出计算题与证明题的多种不同解法，以开阔读者的思路与视野。

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学试题精解/《大学数学》编辑部编. 一合肥：合肥工业大学出版社，2003.5

ISBN 7-81093-039-7

Ⅰ.硕… Ⅱ.大… Ⅲ.高等数学一研究生一入学考试一试题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 029214 号

硕士研究生入学考试数学试题精解

《大学数学》编辑部　编

责任编辑　汤礼广

出　版	合肥工业大学出版社	开　本	787×1092　1/16
地　址	合肥市屯溪路193号　邮编：230009	印　张	25.25
电　话	发行部：0551-2903198	字　数	630千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	版　次	2003年5月第1版
发　行	全国新华书店	印　次	2004年5月第2次印刷
印　刷	合肥市杏花印务股份有限公司	印　数	8000～19000

ISBN 7-81093-039-7/O.7　　定价：32.00元

前　言

对于报考工学类及经济学类硕士研究生的考生来说，数学是一门重要的基础课。近年来，全国各地报考各类硕士研究生的人数在大幅度增加。广大考生都想了解国家教育部颁布的硕士研究生入学数学考试大纲的内容和要求以及熟悉考题的结构、形式、特点，并希望能得到与此相关的资料，为满足考生的需求，我们特编写此书，以供广大考生参考。

本书按国家教育部颁布的数学考试大纲要求的顺序分章编写：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程，线性代数，概率论与数理统计。为了便于阅读，每章又分为工学类与经济学类，每类再分为填空题、选择题、计算题与证明题等。在每道试题前面还注明了试题的年份及类别，如(1998，Ⅰ)表示 1998 年第一类考题，(2002，Ⅲ)表示 2002 年第三类试题。本书中，1987～1996 年考题共分为五类，1997 年以后只分为四类。由于客观性试题(填空题、选择题)在每类试卷中都占有相当大的比例，为了帮助读者掌握这类试题的解题思路与方法，我们对这类试题一般都以注解的形式给出了详解或略解；对于计算题与证明题，我们尽量给出多种不同的解法，以开阔读者的视野。为了方便读者了解各类试卷的结构及样式，本书最后附有最近两年入学考试各类试题。

该书收集的资料非常齐全，既是工学类和经济学类硕士研究生入学考试前难得的一本辅导资料，也可供大专院校数学教师及其他相关人员教学时参考。

限于水平，本书在编写过程中难免出现不妥之处，敬请广大读者给予指正。

编　者

2004 年 4 月

目　录

第一章　函数　极限　连续

工　学　类

一、填空题

1. (1990. Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ __1__.

【注】 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, $|f(x)|\leqslant 1$.

2. (1987. Ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n}=$ __e^{-3}__.

【注】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{-1}=$ __e^{-3}__.

3. (1988. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ __1__.

【注】 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+0}\tan x\cdot\ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}=\exp\left\{-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{2\cot x}\right\}=\exp\{0\}=e^{0}=1.$

4. (1989. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$ __$\dfrac{1}{2}$__.

5. (1990. Ⅰ, Ⅱ) 设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$ __e^{2a}__.

【注】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{-x}=$ __e^{2a}__.

6. (1991. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ __-1__.

【注】 原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{e^{1/x}}-1\right)\Big/\left(\dfrac{x}{e^{1/x}}+1\right)=-1.$

7. (1992. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{e^{x}-\cos x}=$ __0__.

【注】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}/2}{e^{x}-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{x}+\sin x}=0.$

8. (1993. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$ __0__.

9. (1994. Ⅰ, Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ __$\dfrac{1}{6}$__.

【注】 由等价无穷小代换定理

$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^{3}}{x^{3}}=\frac{1}{6}.$$

本题也可用罗必达法则求解.

10. (1995. Ⅰ, Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ $\underline{\ e^6\ }$.

【注】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 6}=$ $\underline{\ e^6\ }$.

11. (1995. Ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

【注】 因为 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2}$,所以,原式$=\frac{1}{2}$.

12. (1996. Ⅰ, Ⅱ) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ $\underline{\ \ln 2\ }$.

【注】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{x-a}\cdot\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^a=e^{3a}$,由 $e^{3a}=8$,得 $a=\ln 2$.

13. (1996. Ⅲ) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ $\underline{\ 2\ }$.

14. (1991. Ⅰ, Ⅱ) 已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$ $\underline{\ -\frac{3}{2}\ }$.

【注】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$ 即得.

15. (1995. Ⅲ) 曲线 $y=x^2e^{-1/x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{\ y=0\ }$.

【注】 原题如此. 如果 $y=x^2e^{-x^2}$,则有水平渐近线 $y=0$.

16. (1988. Ⅲ) 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,则 $a=$ $\underline{\ 1\ }$.

【注】 $\lim\limits_{x\to +0}e^x(\sin x+\cos x)=1$, $\lim\limits_{x\to -0}(2x+a)=a$.

17. (1989. Ⅲ) 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{\ a=b\ }$.

【注】 $\lim\limits_{x\to -0}(a+bx^2)=a$, $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin bx}{x}=b$.

18. (1994. Ⅲ) 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$ $\underline{\ -2\ }$.

【注】 令 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=a$,得 $a=-2$.

19. (1997. Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ $\underline{\ \frac{3}{2}\ }$.

【注】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1+x)}=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$,所以,

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\left[\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\right]=\frac{3}{2}$.

20.（1997. Ⅱ）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{\ e^{-\frac{1}{2}}\ }$.

【注】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$，所以 $a=e^{-\frac{1}{2}}$.

21.（1998. Ⅰ，Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ $\underline{\ -\dfrac{1}{4}\ }$.

【注】用洛必达求解，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{x}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right]=-\dfrac{1}{4}$.

本题也可以用泰勒公式求解.

$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2)$，　$\sqrt{1-x}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o(x^2)$，

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$.

22.（1999. Ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ $\underline{\ \dfrac{1}{3}\ }$.

【注】 利用洛必达法则，

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}=\frac{1}{3}.$$

利用马克劳林公式，

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)-x+\frac{1}{2}x^3+o_2(x^3)}{x^3+o_3(x^3)}=\frac{1}{3}.$$

利用等价无穷小代换 $\tan x\sim x\ (x\to 0)$，

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

23.（2000. Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ $\underline{\ -\dfrac{1}{6}\ }$.

【注】 利用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{\dfrac{1}{1+2x^3}\cdot 6x^2}=-\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x^3}{1+x^2}=-\dfrac{1}{6}$. 也可利用等价无穷小代换 $\ln(1+2x^3)\sim 2x^3\ (x\to 0)$.

24.（2001. Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ $\underline{\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ }$.

【注】 利用分子有理化即可求得答案.

25.（2002. Ⅱ）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{\ -2\ }$.

【注】 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=a$，而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

故 $a=-2$.

26. (2003. Ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ $\underline{\quad\frac{1}{\sqrt{e}}\quad}$.

【注】 原式 $=\exp\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}\right]=\exp\left[-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}(1+x^2)\right]$

$=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

27. (2003. Ⅱ)若 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ $\underline{\quad-4\quad}$.

【注】 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}\sim-\frac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$，故由已知条件可得 $-\frac{1}{4}a=1$，$a=-4$.

28. (2004. Ⅱ)设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ $\underline{\quad0\quad}$.

【注】 $x\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\frac{1}{x}$，故 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 从而 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$.

二、选择题

1. (1987. Ⅲ) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是(D)

(A) 有界函数.　(B) 单调函数.　(C) 周期函数.　(D) 偶函数.

【注】 因 $|x\sin x|$，$e^{\cos x}$ 均为偶函数，故选(D).

2. (1987. Ⅲ)函数 $f(x)=x\sin x$ (C)

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限.

【注】 取 $x_n'=n\pi$　$f(x_n')=0$，取 $x_n=(2n+\frac{1}{2})\pi$，$f(x_n)=(2n+\frac{1}{2})\pi$，故 $f(x_n)\to\infty$，当 $n\to\infty$，所以选 (C).

3. (1989. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ)当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ (A).

(A) 有且仅有水平渐近线.　　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线.　　(D) 既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

【注】 因 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$. 所以选(A).

4. (1990. Ⅲ)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则(C).

(A) $a=1,b=1$.　(B) $a=-1,b=1$.　(C) $a=1,b=-1$.　(D) $a=-1,b=-1$.

【注】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，可得 $1-a=0$，$a+b=0$，得 $a=1,b=-1$.

5. (1991. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ)曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (D)

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

【注】　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=+\infty$，所以选 D.

6.（1992. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(D)

(A) 等于 2.　(B) 等于 0.　(C) 为 ∞.　(D) 不存在但不为 ∞.

【注】　因为当 $x\to 1^-$ 时，$e^{\frac{1}{x-1}}\to 0$，当 $x\to 1^+$ 时，$e^{\frac{1}{x-1}}\to\infty$，所以应选 D.

7.（1992. Ⅲ）当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的(B)

(A) 低阶无穷小.　(B) 高阶无穷小.　(C) 等价无穷小.　(D) 同阶但非等价无穷小.

8.（1992. Ⅲ）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于(D)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

9.（1993. Ⅰ，Ⅱ）设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(B).

(A) 等价无穷小.　(B) 同阶但非等价无穷小.　(C) 高阶无穷小.　(D) 低阶无穷小.

【注】　由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{3}$，故应选 B.

10.（1993. Ⅲ）当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(D)

(A) 无穷小.　(B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小量.　(D) 无界的，但不是无穷大.

【注】　取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，则有 $f(x_n)=0$；取 $x_n'=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，则有 $f(x_n')=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$；当 $n\to\infty$ 时，$f(x_n')\to\infty$，所以选 D.

11.（1994. Ⅲ）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则(A)

(A) $a=1,b=-\frac{5}{2}$.　(B) $a=0,b=-2$.　(C) $a=0,b=-\frac{5}{2}$.　(D) $a=1,b=-2$.

【注】　由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-(ax+bx^2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2,$$

可得 $1-a=0$，$-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$，即 $1+2b=-4$，故 $a=1,b=-\frac{5}{2}$.

12.（1994. Ⅲ）曲线 $y=e^{1/x^2}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(B)条.

(A) 1 条；　(B) 2 条.　(C) 3 条.　(D) 4 条.

【注】　因 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\frac{\pi}{4}$，$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$. 故有渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=0$.

13.（1994. Ⅰ，Ⅱ）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有(D).

(A) $b=4d$. (B) $b=-4d$. (C) $a=4c$. (D) $a=-4c$.

【注】 由题意可得，对任何实数 b,d，等式左边极限等于 $-\frac{a}{2c}$. 再由 $-\frac{a}{2c}=2$，得 $a=-4c$，故应选 D.

14. (1996. Ⅲ)设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，则(A).

(A) $a=\frac{1}{2},b=1$. (B) $a=1,b=1$. (C) $a=-\frac{1}{2},b=1$. (D) $a=-1,b=1$.

【注】 由题意，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=0$，即 $\frac{1}{2}-a=0$，得 $a=\frac{1}{2}$. 又由 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-2ax-b)=0$，得 $b=1$，因此选 A.

15. (1995. Ⅲ)设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$有间断点，则(D).

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点. (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

【注】 若 $F(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$为连续函数，则 $\varphi(x)=f(x)F(x)$必连续. 矛盾. 故选 D.

16. (1997. Ⅱ)设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(C)

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4..

【注】 当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^n}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$，所以选 C.

17. (1997. Ⅱ)设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(D)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

18. (1998. Ⅱ) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(D)

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小. (D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

【注】 取 $x_n=n,y_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且 x_n 发散，但 y_n 收敛，故(A)不正确. 取 $x_n=[1+(-1)^n]n,y_n=[1-(-1)^n]n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且 x_n,y_n 都无界，故(B)不正确. 取 $x_n=\frac{1}{n^2},y_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且 x_n 有界，但 y_n 不是无穷小，故(C)也不正确. 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 知，x_ny_n 为无穷小$(n\to\infty)$. 故当$\frac{1}{x_n}$为无穷小时，知 $y_n=(x_ny_n)\cdot\frac{1}{x_n}$为无穷小，故应选(D).

19. (1999. Ⅱ)“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(C).

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

【注】 由数列极限的定义知应选(C).

20. (2000. Ⅱ) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足(D)

(A) $a<0,b<0$.　(B) $a>0,b>0$.　(C) $a\leqslant 0,b>0$.　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

【注】 因为 $e^{bx}>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故 $a\geqslant 0$；又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，故 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{bx}=+\infty$，从而 $b<0$，因而应选(D).

21. (2000. Ⅰ) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(C)

(A) 0.　(B) 6.　(C) 36.　(D) ∞.

【注】 由于 $\sin 6x=6x-\dfrac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$.

或
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36.$$

22. (2001. Ⅰ) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(B).

(A) 0.　(B) 1.　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

【注】 由 $f(x)$ 的定义知 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

23. (2001. Ⅱ) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于(B).

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

【注】 当 $x\to 0$ 时，由于 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，故 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{x^4}{2}$；$x\sin x^n\sim x^{n+1}$. 由题意 $4>n+1$，而 $e^{x^2}-1\sim x^2$，则有 $n+1>2$. 故 $n+1=3$，即 $n=2$.

24. (2003. Ⅰ，Ⅱ) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(D)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【注】 取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=1$，$c_n=n(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 由于 $a_1=b_1=c_1=1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，得知(A)，(B)，(C)不成立，故选(D).

另解. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在且有限，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\neq 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}$ 存在且有限，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$

矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

三、解答题和证明题

1. (1988. Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ)已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

2. (1987. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 由罗必达法则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

3. (1987. Ⅰ，Ⅱ)求正常数 a 与 b，使等式

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$$

成立.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\dfrac{x^2}{b-\cos x}=1$，故必有 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$，得 $b=1$.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$，从而$\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，得 $a=4$.

4. (1989. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解 原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right\}=e^2$.

5. (1990. Ⅲ)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

解 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$， 所以 $e^{2a}=9$，故 $a=\ln 3$.

6. (1991. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

解 因当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

7. (1991. Ⅰ，Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to +0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解一 由罗必达法则

$$原式=\exp\left\{\lim_{x\to +0}\frac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right\}=\exp\left\{\pi\lim_{x\to +0}\frac{-1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right\}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

解二 原式$=\lim\limits_{x\to +0}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\cdot\pi}=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

8. (1992. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{-\frac{x+6}{3}}\right]^{\frac{-3(x-1)}{2(6+x)}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

9. (1992. Ⅰ，Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解一　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}(e^x-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{1}=1.$

解二　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=1.$

10. (1993. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)}=-50.$

11. (1993. Ⅰ，Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=2.$$

所以　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=e^2$

12. (1994. Ⅲ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

解　因 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}=1$，

所以，　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

13. (1995. Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}.$

14. (1996. Ⅰ，Ⅱ)设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证　由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 又显见 $x_n>0$，$(n=1,$

$2,\cdots)$，即$\{x_n\}$有下界，根据极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

再设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$成立. 从而 $a^2-a-6=0$. 解得 $a=3,a=-2$，但因 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，所以 $a\geqslant 0$，舍去 $a=-2$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

15. (1997. Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right)}=1.$$

16. (1998. Ⅰ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 另一方面

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\right)=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 所以，由夹逼定理知原式 $=\dfrac{2}{\pi}$.

17. (1998. Ⅱ) 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

解 $f(x)$在$(0,2\pi)$内的间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$处，$f\left(\dfrac{\pi}{4}+0\right)=+\infty$，在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$处，$f\left(\dfrac{5\pi}{4}+0\right)=+\infty$，故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$为第二类(或无穷)间断点；

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$为第一类(或可去)间断点.

18. (1998. Ⅱ) 确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\quad(c\neq0)$.

解 由于 $x\to0$ 时，$ax-\sin x\to0$，且极限 c 不为零，所以当 $x\to0$ 时，$\displaystyle\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to0$，故