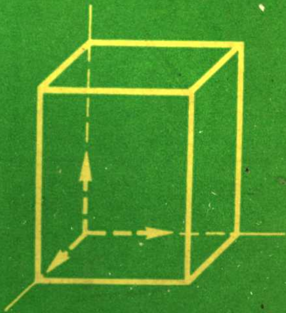
苏联十年制学校数学教材

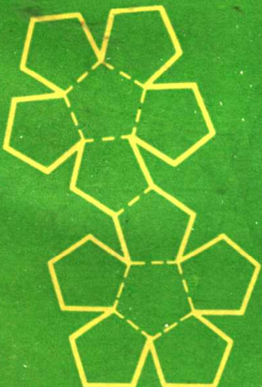


几何

9—10年级

3·A·斯科别兹 主编

译者
鲍 珑 李慧君



人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

几　何

9—10 年级

З·A·斯科别兹 主编

鲍珑　李慧君 译

人民教育出版社

1982 年·北京

内容提要

本书是根据苏联十年制学校数学教材《几何(9-10年级)》(Э·A·斯科别兹主编)1980年版翻译的。全书共分六章：立体几何的基本概念和空间平行关系(20课时)，空间的变换和向量(20课时)，空间的垂直关系与二面角和多面角(24课时)，空间坐标方法(10课时)，多面体(22课时)，旋转图形(18课时)。书后还附有平面几何课程的简要总结和立体几何的补充资料。

本书是为研究国外中小学数学教学改革情况而出版的，可供中小学数学教学研究人员、师范院校数学系师生和中学数学教师参考。

苏联十年制学校数学教材

几　何

9—10年级

Э·A·斯科别兹 主编

鲍珑　李慧君 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 10.625 字数 221,000

1982年9月第1版　1983年3月第1次印刷

印数　1—8,000

书号 7012·0512　　定价0.82元

目　　录

九　年　级

第一章　立体几何的基本概念．空间平行关系……………1

§1．关于立体几何课程的逻辑结构．立体几何的基本概念……1

§2．立体几何的公理……………………………………3

§3．公理的推论…………………………………………8

§4．在空间里作直线平行于已知直线……………………12

§5．多面体的截面的作图问题的解法……………………14

§6．异面直线．异面直线的判定…………………………16

§7．直线和平面的相关位置．直线和平面平行的判定………18

§8．平行线的传递性．平行线束…………………………22

§9．平行六面体…………………………………………25

§10．两个平面的相关位置．平面平行的判定………………27

§11．关于平行平面的定理………………………………30

§12．图形的平行投影．平行投影的性质…………………34

§13．立体几何中图形的画法……………………………36

第一章复习题……………………………………………42

第二章　空间的变换．向量………………………………48

§14．图形的映射．空间的变换……………………………48

§15．空间的位移．图形的合同……………………………51

§16．空间的方向…………………………………………53

§17．向量…………………………………………………55

§18．向量的加法…………………………………………59

§19．相反的向量．向量的减法……………………………63

§20．共线向量．数和向量的乘法…………………………64

§21. 共面的向量……………………………………………………67
§22. 应用向量解题……………………………………………………70
§23. 平行六面体法则. 向量关于三个不共面向量的分解式…72
§24. 两个向量的夹角…………………………………………………75
§25. 两个向量的数性积………………………………………………77
§26. 向量的数性乘法的基本性质……………………………………79
§27. 应用向量解题……………………………………………………81
第二章复习题……………………………………………………………85
第三章　空间的垂直关系. 二面角和多面角……………………91
§28. 直线和平面垂直的判定…………………………………………91
§29. 平面的垂线的作法………………………………………………94
§30. 平面的两条垂线. 在平面上的正射影…………………………98
§31. 空间的轴对称……………………………………………………101
§32. 关于平面的对称…………………………………………………104
§33. 垂直于同一条直线的两个平面…………………………………106
§34. 点到平面的距离…………………………………………………108
§35. 异面直线的公垂线………………………………………………111
§36. 三垂线定理………………………………………………………114
§37. 斜线和平面所成的角……………………………………………116
§38. 二面角. 二面角的度量…………………………………………121
§39. 平面垂直的判定…………………………………………………128
§40. 多面角. 三面角…………………………………………………131
§41. 三面角和多面角的面角的性质…………………………………133
第三章复习题……………………………………………………………136
九年级复习题……………………………………………………………140

十 年 级

第四章　空间坐标方法…………………………………………145
§42. 向量坐标、用坐标给出的向量的运算法则……………………145

§ 43. 根据向量的坐标计算向量的长和两个向量的夹角………148
§ 44. 直角坐标系. 点的坐标……………………………………149
§ 45. 平面的方程……………………………………………………152
§ 46. 变换的坐标公式. 位似………………………………………156
第四章复习题 ……………………………………………………159
第五章　多面体……………………………………………………162
§ 47. 多面形. 多面体………………………………………………162
§ 48. 棱柱……………………………………………………………165
§ 49. 平行六面体的性质……………………………………………169
§ 50. 多边形正射影的面积…………………………………………174
§ 51. 棱柱的表面积…………………………………………………176
§ 52. 棱锥……………………………………………………………179
§ 53. 棱台……………………………………………………………183
§ 54. 正多面体的概念………………………………………………185
§ 55. 多面体体积的一般性质. 长方体的体积……………………187
§ 56. 直棱柱的体积…………………………………………………190
§ 57. 斜棱柱的体积…………………………………………………193
§ 58. 棱锥的体积……………………………………………………195
第五章复习题 ……………………………………………………198
第六章　旋转图形…………………………………………………205
§ 59. 圆的画法. 椭圆………………………………………………205
§ 60. 旋转图形. 圆柱体……………………………………………208
§ 61. 圆锥. 圆台……………………………………………………211
§ 62. 球面和球体……………………………………………………215
§ 63. 球面的截线. 球面直观图的画法……………………………217
§ 64. 与球面相切的平面……………………………………………219
§ 65. 体积的度量问题的推广. 圆柱体的体积……………………221
§ 66. 曲边梯形旋转得到的图形的体积……………………………224
§ 67. 圆锥的体积……………………………………………………227

§ 68. 球体的体积……229
§ 69. 球面的面积……230
第六章复习题……233
复习的问题……239
十年级课程复习题……243
历史概述……255
平面几何课程的简要总结……266
几何公式……291
附录……295
关于合同图形的定理(§ 31)……295
向量在轴上的射影(§ 26)……298
关于三面角的余弦定理(§ 40)……299
三面角存在的充分必要条件(§ 41)……301
多面角的面角的性质(§ 41)……302
几何体(第五章和第六章)……304
圆台、球缺和球扇形的体积(第六章)……306
圆柱、圆锥和球冠的表面积(第六章)……309
韦尔提出的几何公理体系……313
答案和提示……316
本书中使用的符号……333

九 年 级

第一章 立体几何的基本概念.空间平行关系

几何课程包括平面几何和立体几何. 在六——八年级几何课程里你们研究的主要是平面几何. 平面几何研究的对象是在同一个平面内的图形, 例如角、三角形、平行四边形、圆周. 这些图形中的每一个图形的所有的点都属于一个平面. 因此这样的图形叫做平面图形.

立体几何研究空间图形. 它们可能是非平面图形(棱柱、棱锥、圆柱、球是这样的图形的例子)或是平面图形. 因此平面几何的知识在立体几何中仍然适用.

在八年级我们已经开始学习立体几何, 现在要继续这一课程的学习: 认识几何结构的公理方法, 图形的映射, 向量的运算以及向量在证明定理和解题时的运用.

§1. 关于立体几何课程的逻辑结构. 立体几何的基本概念

系统的立体几何课程是按平面几何课程同样的方式构成的:

1. 列出不给定义的基本概念.

2. 建立反映基本概念性质的公理.

3. 利用基本概念叙述其他几何概念的定义.

4. 根据定义和公理证明定理.

中学的立体几何课程不完全遵循上面几点要求. 为使叙述简明, 省略了某些定理的证明. 另外一些定理改为以习题形式出现.

在立体几何里有四个基本概念: **点**、**直线**、**平面**和**距离**. 并且不仅在几何里, 而且是在所有其他的数学分支中, "集合"的概念同样是基本的(不定义的)概念. 在几何中, 任何点的集合都称为**图形**. 直线和平面是图形的例子.

画图时, 平面将表示成平行四边形或其它任意的平面图形(图 1). 通常用希腊字母 α、β、γ 等字母来表示. 点和直线仍然采用平面几何中常用的表示方法: 点 A、B、C、…, 直线 a、b、c、…, 以及 (AB)、(AC) 等等.

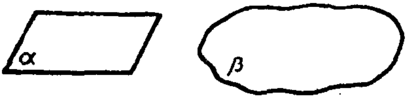


图 1

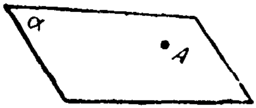


图 2

如果点 A 属于平面 α($A\in\alpha$, 图 2), 那么说: "平面 α 通过点 A". 对于点 A 属于直线 a 的情况, 可以使用同样的术语.

在立体几何中所研究的全部点的集合 U 叫做**空间**. 任一图形 ϕ 是空间的子集: $\phi\subset U$.

习 题

1°*. 说出平面几何课程的基本概念.

* 在题号的上角附有符号"*"的题目, 建议把它作为口答题.

2°. 说出下列数学命题在平面几何课程里是公理、定理还是定义:

1) 过已知点向已知直线可以且只可以作一条垂线;

2) 从 A 到 B 的距离等于从 B 到 A 的距离;

3) 折线的长度大于它的端点之间的距离;

4) 两个图形的交是由同时属于这两个图形的所有点构成的图形;

5) 位移——这是平面到它自身上的保距映射;

6) 过任意一点可以作一条直线平行于已知直线;

7) 平移是位移;

8) 通过不属于一条直线的三个点可以作一个,而且只能作一个圆周;

9) 合同的多边形面积相等;

10) 以 O 为中心旋转 180° 的变换,是以 O 为中心的中心对称.

§2. 立体几何的公理

在立体几何的公理里,反映了不定义的概念——点、直线、平面和距离——的基本性质.立体几何公理虽具有抽象的形式,但它们反映了现实空间的性质.而这正是立体几何能够应用于实践的根据.

第一组五个公理同“属于”的概念相联系.

公理 1. 至少存在一条直线和一个平面.每一条直线和每一个平面都是与空间不相同的非空点集.

从公理 1 得到,对于任何平面 α,存在不属于它的点 A(图

3). 这时就说，点 A 在平面 α 之外，记作 $A \notin \alpha$.

对于任何直线，存在不属于这条直线的点. 这个论断同样是正确的.

公理 2. 通过任何两个不同的点，有且仅有一条直线.

根据公理 2，如果直线 a 和 b 有两个不同的公共点，那么这两条直线重合：$a=b$.

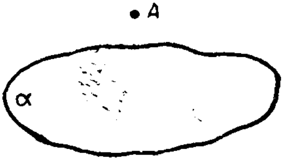


图 3

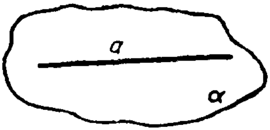


图 4

公理 3. 通过平面内两个不同点的直线在这个平面内.

公理 3 可以用来解释检验一个物体的表面是不是平面的实际方法：把校正好的直尺的棱放在表面的不同位置上，紧紧贴住，看直尺和表面之间有没有透光的地方的意义.

"直线 a 在平面内"(图 4)，用集合论的语言叙述是，直线 a 是平面 α 的子集，即 $a \subset \alpha$. 也可以说成"平面 α 包含直线 a"，或者"平面 α 通过直线 a".

直线和平面可以有唯一的公共点. 下面就来证明这一点.

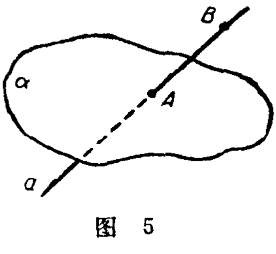


图 5

假设已知平面 α(图 5). 根据公理 1，存在平面 α 内的一个点 A，和不属于这个平面的一个点 B. 通过点 A 和点 B 作

直线 a（公理 2）．假设直线 a 同平面 α 除点 A 以外还有一个公共点．这时根据公理 3，$a\subset\alpha$ 和点 B 也属于平面 α．但是，这和点 B 的取法相矛盾．因此我们的假设不正确，得出 $a\cap\alpha=A$．

如果直线与平面的交集是一点，那么就说，直线和平面**相交于这个点**．

公理 4．通过不属于一条直线的三个点有且仅有一个平面．

这个公理可以用三条细棍的端点和一张硬纸板构造的模型作为例子来说明（图 6）．

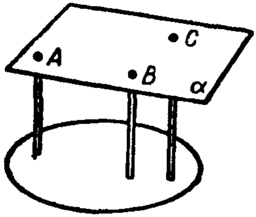


图 6

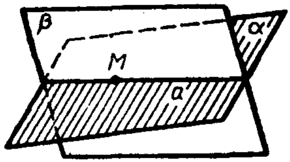


图 7

通过不属于一条直线的点 A、B、C 的平面，以后用符号 (ABC) 表示．

由公理 4 可以断定：如果平面 α 和 β 有不属于一条直线的三个公共点，那么它们重合（$\alpha=\beta$）．

公理 5．如果两个不同的平面有一个公共点，那么它们的交是一条直线．

如果两个平面的交是一条直线（$\alpha\cap\beta=a$，图 7），这两个平面叫做**相交平面**．

教室里相邻的两面墙，可以作为说明公理 5 的例子的模

型.

以下三个公理反映了基本概念《距离》的性质.

公理 6. 对于任意的两个点 A 和 B 都有一个非负的量, 叫做从 A 到 B 的距离. 当且仅当点 A 和 B 重合时, 距离 $|AB|$ 等于零.

公理 7. 从点 A 到点 B 的距离等于从点 B 到点 A 的距离:

$$|AB|=|BA|.$$

公理 8. 对于任意的三个点 A、B、C, 从 A 到 C 的距离不大于从 A 到 B 的距离与从 B 到 C 的距离的和:

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|.$$

在叙述最后一条公理之前, 我们注意到, 在平面几何里, 除了从属公理和距离公理以外, 还有三组公理: 顺序公理, 平面运动公理和平行公理*.

公理 9. 在平面几何中学过的顺序公理、平面运动公理和平行公理, 对于每一个平面都成立.

从采用的上述公理得出, 在每一个平面内都可以使用平面几何的定理. 例如, 在每一个平面里, 勾股定理成立; 任意三角形的内角和等于 180°.

习 题

3. 读出下列符号和作出略图:

1) $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$, $C\in(AB)$;

2) $A\in\alpha$, $a\in\alpha$, $A\notin a$;

---

* 参看“附录”第 270 页.

3) $a\cap\alpha=A, b\cap\alpha=A$;

4) $a\cap b=A, a\not\subset\alpha, b\not\subset\alpha$;

5) $\alpha\cap\beta=a, b\cap a=A, b\subset\beta$;

6) $\{A, B, C\}\subset\alpha, C\notin(A, B), \{A, C\}\subset\beta, \beta\neq\alpha$.

4. 用符号表示：1）点A属于平面α，但不属于平面β；2）直线a通过不属于平面α的点M，并且a不在平面α内；3）直线a和b通过属于平面α的点M，并且a在平面α内，b不在这个平面内；4）直线a和平面α相交于点M，平面α和平面β相交于直线b，并且b不通过点M.

5°. 在划线位置填写“必要条件”，或者“充分条件”，或者“充要条件”.*

1）两条直线重合的________是它们有公共点；

2）两个平面重合的________是它们有不属于一条直线的三个公共点；

3）平面α和β相交的________是它们有公共点；

4）平面α包含直线a的________是a和α有两个不同的公共点.

6°. 1）过已知点和已知直线上的任意一点，可以作唯一的一条直线，这个命题正确吗？

2）在三角形ABC内作高的交点.“过这个点和点A可以作唯一的一条直线”，这个命题正确吗？

7°. 已知平面α和矩形$ABCD$. 平面α是否可能：1）只包含矩形的一个顶点；2）只包含两个顶点；3）只包含三个顶点？

* 关于充分条件、必要条件、充分必要条件参看第270页.

8°. 三角形的两个顶点属于一个平面. 如果已知这个平面还包含: 1) 三角形内切圆圆心; 2) 外接圆圆心. 三角形的第三个顶点属于这个平面吗?

9°. 说明: 为什么任何有三条腿的桌子必定是稳定的, 而对于四条腿的桌子, 这个结论不成立.

10°. 如果一个平面包含: 1) 圆弧上两个不同的点; 2) 弧上的三个不同的点, 圆弧上的每一个点属于这个平面吗?

11°. 怎样用制造得好的平台检查直尺的制造质量? 这样的检验是以什么原理为根据的?

12°. 两个不同的平面可能有两条不同的公共直线吗?

13*. 已知: $a \cap b = C$, $b \cap c = A$, $c \cap a = B$, $A \neq B$, $A_1 \in a$, $B_1 \in b$, $C_1 \in (A_1B_1)$. 证明: $C_1 \in (ABC)$.

14. 已知: $\alpha \cap \beta = m$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \cap b = A$. 证明: $A \in m$.

15. 已知: 点 A、B、C, 并且 $A \notin (BC)$. 证明: $|AB| + |BC| > |AC|$.

§3. 公理的推论

1. 推论 1. 通过直线和不属于它的一点有且仅有一个平面.

证明. 假设已知直线 a 和不属于它的一点 M (图 8, a). 在已知直线上取两个不同的点 B 和 C. 根据公理 4, 过点 M、B、C 有平面 α, 并且直线 a 在这个平面内(公理 3). 于是, 证明了过 a 和 M 的平面的存在性. 这样的平面的唯一性从公理 4 得出. 实际上, 任何包含直线 a 和点 M 的平面, 都通过点 B、

C、M. 但是通过这些点不可能有两个不同的平面. ■*

如果两条直线有唯一的公共点($a \cap b = O$; 图 8б), **就说这两条直线相交.**

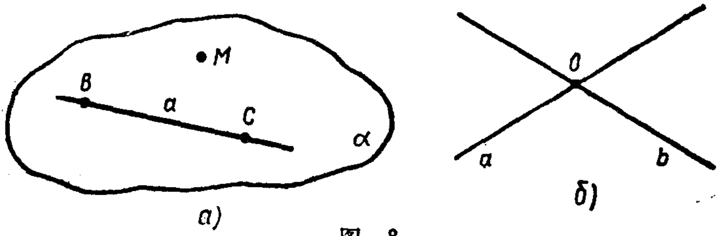


图 8

推论 2. 通过两条相交直线有且仅有一个平面 (自己证明).

在立体几何中, 平行直线的定义仍保留平面几何中的定义: **如果两条直线在同一个平面内, 且没有公共点或重合, 就说这两条直线平行**(图 9, а 和 б).

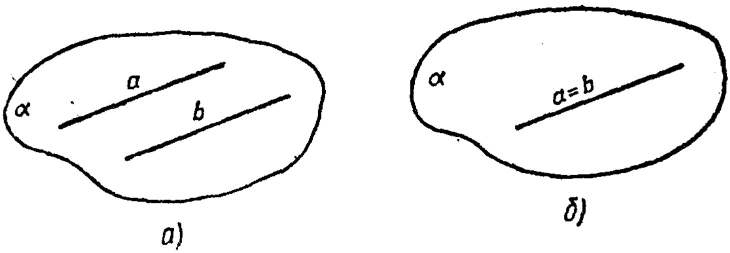


图 9

推论 3. 过两条不同的平行直线只可以作一个平面.

从平行线的定义, 得到这样的一个平面的存在性, 因此, 在推论的叙述中, 没有特殊地提到存在性问题. 学生自己证

---

* 符号■表示"证明完毕".

明不存在通过两条已知直线的其它平面.

2. 假设已知平面 α. 研究空间里不属于 α 的所有的点的集合. 平面 α 将这个平面分成两个非空的子集，它们叫做以 α 为边界的**半开空间**. 对于半开空间的以下性质，我们不作证明就承认它们的正确性(图 10, a, $б$):

1. 连结半开空间中的任意两点的线段和它的边界不相交.

2. 连结分别属于有共同边界的两个半开空间的任意两点的线段，和这个边界相交.

如果点 A 和 B 属于以 α 为边界的半开空间，那么说，A 和 B 位于平面 α 的同一侧(图 10, a). 如果 A 和 B 属于有公共边界 α 的不同的半开空间，那么 A 和 B 位于平面 α 的异侧（图 10, $б$).

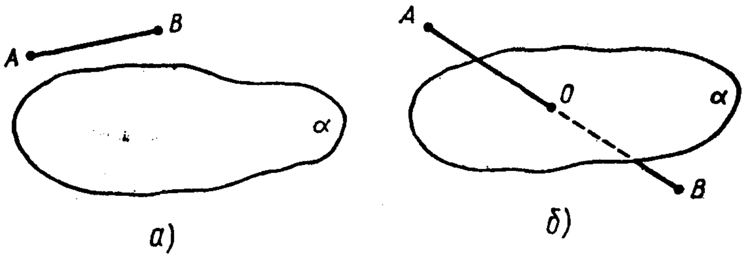


图 10

半开空间和它的边界的并集叫做半闭空间（或简称半空间).

半空间是凸图形*.

* 凸图形的定义是平面几何中的定义在空间图形中的推广：如果一个图形包含连结它任意两点的线段，这个图形叫做凸图形.