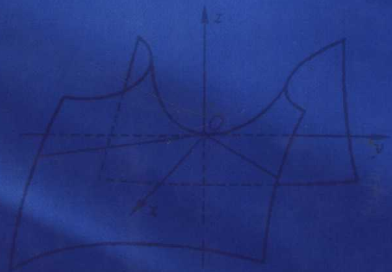
大学数学系列丛书

线性代数与解析几何

Linear Algebra and Analytic Geometry

陈治中 编著



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

北方交通大学出版社
http://press.njtu.edu.cn

大学数学系列丛书

线性代数与解析几何

陈治中　编著

北方交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是大学理工科各专业必修的重要基础课教材，内容包括：几何空间中的向量、行列式、矩阵、n 维向量空间、线性空间与线性变换、特征值与特征向量、空间曲面与空间曲线、二次型. 书中各章配有适量的例题和习题，书后给出习题答案. 书末附中英文名词索引. 为了帮助学生学习，本书还配有相应的辅导书.

本书系统了介绍线性代数与解析几何的基本理论与基本方法，强调代数与几何的结合及其内在联系，尽可能通过较为直观的几何背景理解深刻的抽象概念，使学生掌握基本的代数方法与几何方法，为进一步学习后续的数学课程、计算机课程及其他各学科打下良好的基础.

本书可作为高等院校理、工、经管等专业的教材及教学参考书，也可供各类成人教育及参加自学考试的学生使用，同时可作为科技工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何 / 陈治中编著. —北京：北方交通大学出版社，2003.9
（大学数学系列丛书）
ISBN 7-81082-166-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 陈… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材②解析几何－高等学校－教材
Ⅳ. ①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 063298 号

责任编辑：孙秀翠　段连平
印 刷 者：北京东光印刷厂
出版发行：北方交通大学出版社　　电话：010－51686045，62237564
　　　　　北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编：100044
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×960　1/16　　印张：22.5　字数：504 千字
版　　次：2003 年 9 月第 1 版　　2003 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：5 000 册　　定价：29.00 元

“大学数学系列丛书”编写委员会成员名单

主　任　刘彦佩

副主任　刘　晓

委　员(按姓氏笔画为序)

王兵团　付　俐　陈治中　何卫力

季文铎　赵达夫　龚漫奇

总　序

随着人类进入21世纪,科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中,各种竞争的关键就是科学技术的竞争,科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上,而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代,将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活,引发新的、深刻的变化。在知识经济时代,国家的竞争能力和综合国力的强弱,不仅取决于其拥有的自然资源,更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平,尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源,拥有智力资源的是人才,人才来自教育。要提高民族的创新能力,归根到底要提高全体民众的教育水平,培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中,数学教育起着举足轻重的作用。许多专家指出,数学教育在人类的精神营养中,确实有"精神钙质"的作用,因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像,一个数学知识贫瘠的人,会在科学上有所建树。因此,全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平,将关系到我国各行各业高级专门人才的素质和能力,关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力,是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑,我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革,特别是数学教学改革的经验,借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法,组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师,在精心筹划、多方面研讨的基础上,编写了这一套"大学数学系列丛书"。

本系列丛书在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的功夫。不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章内容,而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验;同时注意编写了与主教材配套的辅导教材,这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上,注重对主教材内容知识的扩展,同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是,我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为,这种做法是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外,为了适应目前大学数学教学改革的需要,我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为,数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合,将会极大地丰富数学教学内容,增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性,为他们在将来的工作中运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时,数学实验课与数学建模课的开设,将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外,为了配合我校的"高等数学

方法”选修课及参加北京市大学生(非数学专业)数学竞赛培训的需要,我们还编写了《高等数学方法导引》教材,使大学生中有“数学才赋”的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列丛书的编写过程中,得到了北方交通大学教务处的大力支持。在教材的出版中,得到了北方交通大学出版社郑光信社长和贾慧娟副社长的热情帮助。在此,编委会向他们表示衷心的感谢。

本系列丛书适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学,也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列丛书的编写是大学数学基础课教学中的一种探索,欢迎读者在教材的使用与阅读中不吝赐教,我们将在今后对其进行修订,使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编委会

2003 年 9 月

前　言

随着科学技术的迅猛发展与计算机的普遍使用,以及对培养人才综合素质要求的提高,对数学系列课程的改革也就提出了新的更高的要求.近年来,线性代数与解析几何的结合已经逐渐成为许多院校数学课程改革首先考虑并实施的一个问题.几何代数是一家,线性代数有深刻的几何背景,而解析几何则是用代数的方法研究几何的问题,因此线性代数与解析几何的结合有其内在的合理性.从"高等数学"中将空间解析几何部分取出与线性代数合成一门课,目的是使抽象的代数方法有直观的几何背景,同时也为解决几何问题提供代数的方法.并且希望为微积分的学习找到更好的切入点.本书就是基于这样的想法编写的.

另一方面,也应该注意到,几何与代数又是一个事物的两个方面,各有不同的侧重点.简而言之,几何偏重"形",代数偏重"数";几何有着非常强的直观性,而线性代数的理论则是由解方程发展起来的,有着极强的逻辑性和抽象性.因此,如何从实质上将两者结合起来又是一个值得探讨和深入研究的课题.

将代数与几何结合起来,互相渗透.这一想法本身是毋庸置疑的,但是现在这样的处理方式能否完全达到目的,是否就是成功的选择还有待于不断接受实践的检验.教学改革本来就不是一蹴而就的,数学课程的改革仍有很长的路要走.

本书在内容的安排和处理上有以下几点说明.

1. 本书根据高等院校理工科各专业线性代数课程的基本要求,以及高等数学课程对空间解析几何部分的要求,同时考虑不同层次不同课内学时的不同要求而编写的.因此在实施过程中可根据不同的要求而有所取舍.例如,64 及更多学时的大体可以完成全部主要内容; 54 及以下学时的对于线性空间与线性变换一章,可以在线性空间的定义后,直接跳到欧氏空间一节.同时略去后面线性变换的特征值等有关内容.另外,无论是多学时还是少学时,定理的证明都只需选择有代表性的介绍即可.当然教学过程还要视学生的具体情况而有所不同.

2. 几何空间中的向量作为第 1 章,这是考虑到学生在学习线性代数时往往感到抽象与不易适应,而这部分比较直观,同时也希望能更好地与中学课程衔接.

3. 2 阶和 3 阶行列式放在预备知识部分首先介绍,是为了表示向量的方便.一般 n 阶行列式的定义及性质在第 2 章讨论.

4. 书中有些章节理论性较强,其中有较多的定理并给出了证明,这一方面是考虑到一部分有兴趣的同学可以进一步自学,从而更深入了解课程的精髓和思想,另一方面也为了保持课程体系本身的完整性.有些部分打上星号则更是如此.

5. 二次曲面的分类是按其中二次型的矩阵的秩进行讨论的.这和一般按系数的不同情况进行讨论本质上是一样的.这样处理是希望能更好地反映线性代数与空间解析几何的联系.

6. 对于一些较为抽象的重要概念和一些难点,增加了评注与说明,目的的是帮助读者更好地理解和掌握.希望广大读者在掌握知识的同时,更注重代数思想的培养、抽象思维能力的锻炼和几何背景的确立,更好地把几何与代数结合起来.

7. 书末附名词索引(英汉与汉英),希望能为进一步学习原著及将来学习专业文献提供方便.

8. 本书有一定数量的习题,书末附参考答案.

本书的编写和出版得到了北方(京)交通大学理学院、数学系、出版社以及各位同仁的大力支持;季文铎教授认真审阅了全书并提出了非常具体的宝贵意见;在编写过程中还参考了一些现有的教材,得益匪浅,部分参考书目附在书末,在此一并表示衷心感谢.

本书虽然力求做到代数方法与几何方法的结合与渗透,但是能否真正实现这一点仍有待不断的教学实践与总结.特别希望广大读者对此提出自己的意见和见解,以便不断地改进提高,由于作者水平所限,错误与不妥之处在所难免,恳请广大读者与各位同行批评指正,在此先致谢意.

编　者

2003.8

目　　录

第1章　几何空间中的向量 …… (1)
1.1　数域与2阶、3阶行列式 …… (1)
1.1.1　数域 …… (1)
1.1.2　2阶行列式 …… (3)
1.1.3　3阶行列式 …… (5)
1.2　向量及其线性运算 …… (8)
1.2.1　向量的基本概念 …… (8)
1.2.2　向量的线性运算 …… (9)
1.2.3　共线向量与共面向量 …… (12)
1.3　空间坐标系 …… (15)
1.3.1　仿射坐标系 …… (15)
1.3.2　空间直角坐标系 …… (17)
1.3.3　向量运算的坐标表示 …… (19)
1.3.4　向量在轴上的投影 …… (21)
1.4　向量的数量积、向量积与混合积 …… (22)
1.4.1　向量的数量积 …… (22)
1.4.2　向量的向量积 …… (25)
1.4.3　向量的混合积 …… (27)
1.5　平面的方程 …… (30)
1.5.1　平面方程 …… (30)
1.5.2　两平面的位置关系 …… (33)
1.5.3　两平面的夹角 …… (34)
1.6　空间直线及其方程 …… (36)
1.6.1　直线方程 …… (36)
1.6.2　两直线的位置关系 …… (38)
1.6.3　直线与平面的位置关系 …… (40)
1.6.4　两直线的夹角及直线与平面的夹角 …… (41)
1.6.5　点到直线的距离及两直线之间的距离 …… (42)

习题 1 …… (45)
第 2 章　行列式 …… (49)
2.1　引言 …… (49)
2.2　n 元排列 …… (50)
2.2.1　排列与逆序 …… (50)
2.2.2　排列的奇偶性 …… (51)
2.3　n 阶行列式 …… (53)
2.3.1　n 阶行列式的定义 …… (53)
2.3.2　行列式的计算(1) …… (55)
2.4　n 阶行列式的性质 …… (57)
2.4.1　行列式的性质 …… (57)
2.4.2　行列式的计算(2) …… (61)
2.5　行列式按一行(列)展开 …… (65)
2.5.1　展开公式 …… (65)
2.5.2　行列式的计算(3) …… (68)
*2.6　拉普拉斯(Laplace)定理 …… (73)
2.7　克拉默(Cramer)法则 …… (76)
习题 2 …… (82)
第 3 章　矩阵 …… (87)
3.1　高斯(Gauss)消元法及矩阵表示 …… (87)
3.1.1　高斯消元法(Gauss elimination) …… (87)
3.1.2　矩阵表示 …… (89)
3.1.3　一般情形 …… (91)
3.2　矩阵及其初等变换 …… (94)
3.2.1　矩阵的概念 …… (94)
3.2.2　矩阵应用实例 …… (96)
3.2.3　矩阵的初等变换 …… (98)
3.3　矩阵的运算 …… (100)
3.3.1　矩阵的加法 …… (100)
3.3.2　矩阵的数乘 …… (101)
3.3.3　矩阵的乘法 …… (101)
3.3.4　矩阵的转置 …… (106)
3.3.5　矩阵的共轭 …… (108)
3.4　方阵的逆矩阵 …… (108)
3.4.1　方阵的行列式 …… (108)

3.4.2 可逆矩阵及其性质 …… (110)
3.4.3 矩阵可逆的条件 …… (111)
3.5 分块矩阵 …… (115)
3.5.1 分块矩阵的概念 …… (115)
3.5.2 分块矩阵的运算 …… (117)
3.5.3 分块矩阵的逆矩阵 …… (119)
3.6 初等变换与初等矩阵 …… (122)
3.6.1 初等矩阵 …… (122)
3.6.2 利用初等变换求逆矩阵 …… (126)
* 3.6.3 分块矩阵的初等变换 …… (128)
习题 3 …… (130)
第 4 章 n 维向量空间 …… (134)
4.1 n 维向量及其运算 …… (134)
4.1.1 n 维向量 …… (134)
4.1.2 向量的运算及其性质 …… (135)
4.1.3 n 维向量空间 …… (137)
4.1.4 线性组合与线性表示 …… (138)
4.2 线性相关性 …… (139)
4.2.1 线性相关与线性无关 …… (140)
4.2.2 线性相关性的刻画 …… (141)
4.2.3 线性相关性的判断 …… (142)
4.3 向量组的秩 …… (146)
4.3.1 向量组的等价 …… (146)
4.3.2 极大线性无关组 …… (147)
4.3.3 向量组的秩、维数与基 …… (149)
4.4 矩阵的秩 …… (151)
4.4.1 行秩、列秩与矩阵的秩 …… (151)
4.4.2 秩的性质与求法 …… (154)
4.4.3 矩阵的秩与行列式的关系 …… (155)
4.5 齐次线性方程组 …… (157)
4.5.1 齐次线性方程组有非零解的条件 …… (157)
4.5.2 齐次线性方程组的解的结构 …… (158)
4.6 非齐次线性方程组 …… (162)
4.6.1 非齐次线性方程组有解的条件 …… (162)
4.6.2 非齐次线性方程组的解的结构 …… (163)

习题 4 ………………………………………………………………………………… (166)
第 5 章 线性空间与线性变换 ……………………………………………………… (172)
5.1 线性空间及其性质 …………………………………………………………… (172)
5.1.1 线性空间的概念 ………………………………………………………… (172)
5.1.2 简单性质 ………………………………………………………………… (174)
5.1.3 线性子空间 ……………………………………………………………… (175)
5.2 基、维数和坐标 ……………………………………………………………… (176)
5.2.1 线性空间的基、维数和坐标 …………………………………………… (176)
5.2.2 基变换与坐标变换 ……………………………………………………… (179)
5.3 线性变换及其性质 …………………………………………………………… (185)
5.3.1 线性变换定义 …………………………………………………………… (185)
5.3.2 线性变换的简单性质 …………………………………………………… (187)
5.3.3 线性变换的运算 ………………………………………………………… (188)
5.4 线性变换的矩阵 ……………………………………………………………… (189)
5.4.1 线性变换在一组基下的矩阵 …………………………………………… (189)
5.4.2 向量的象的坐标 ………………………………………………………… (192)
5.5 欧几里得(Euclid)空间 ……………………………………………………… (195)
5.5.1 内积 ……………………………………………………………………… (195)
5.5.2 标准正交基 ……………………………………………………………… (199)
5.5.3 施密特(Schmidt)正交化 ………………………………………………… (201)
5.5.4 正交矩阵与正交变换 …………………………………………………… (204)
习题 5 ………………………………………………………………………………… (206)
第 6 章 矩阵的对角化问题 ………………………………………………………… (212)
6.1 特征值与特征向量 …………………………………………………………… (212)
6.1.1 特征值与特征向量的基本概念 ………………………………………… (212)
6.1.2 特征值与特征向量的求法 ……………………………………………… (214)
6.1.3 特征值与特征向量的性质 ……………………………………………… (220)
6.2 相似矩阵 ……………………………………………………………………… (222)
6.2.1 线性变换在不同基下的矩阵 …………………………………………… (222)
6.2.2 相似矩阵的性质 ………………………………………………………… (224)
6.2.3 线性变换的特征值与特征向量 ………………………………………… (226)
6.3 矩阵可对角化的条件 ………………………………………………………… (229)
6.3.1 可对角化条件 …………………………………………………………… (229)
6.3.2 特征向量的线性无关性质 ……………………………………………… (231)
6.3.3 举例 ……………………………………………………………………… (234)

6.4 实对称矩阵的对角化 …… (238)
6.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量 …… (238)
6.4.2 实对称矩阵对角化的方法 …… (241)
6.5 若尔当标准形简介 …… (245)
习题6 …… (248)
第7章 空间曲面与曲线 …… (251)
7.1 曲面及其方程 …… (251)
7.1.1 曲面和曲线的一般方程 …… (251)
7.1.2 球面方程 …… (252)
7.1.3 柱面 …… (254)
7.1.4 锥面 …… (256)
7.1.5 旋转面 …… (257)
7.2 二次曲面 …… (260)
7.2.1 椭球面 …… (261)
7.2.2 单叶双曲面 …… (262)
7.2.3 双叶双曲面 …… (264)
7.2.4 椭圆抛物面 …… (265)
7.2.5 双曲抛物面 …… (266)
7.3 空间曲线 …… (267)
7.3.1 空间曲线的方程 …… (267)
7.3.2 空间曲线在坐标面上的投影 …… (269)
7.3.3 曲面所围成区域的画法 …… (271)
习题7 …… (272)
第8章 二次型 …… (274)
8.1 二次型及其矩阵表示 …… (274)
8.1.1 二次型 …… (274)
8.1.2 非退化线性替换 …… (277)
8.1.3 矩阵的合同 …… (279)
8.2 二次型的标准形 …… (281)
8.2.1 配方法 …… (281)
8.2.2 初等变换法 …… (285)
8.2.3 正交替换法 …… (289)
8.3 惯性定理和规范形 …… (293)
8.3.1 惯性定理 …… (293)
8.3.2 实二次型的规范形 …… (295)

8.3.3 复二次型的规范形 …………………………………………………………………… (297)
8.4 实二次型的正定性 …………………………………………………………………… (298)
8.4.1 正定二次型 …………………………………………………………………… (298)
8.4.2 正定矩阵 …………………………………………………………………… (299)
8.4.3 其他类型的实二次型 …………………………………………………………………… (304)
8.5 二次曲面的分类 …………………………………………………………………… (306)
习题 8 …………………………………………………………………… (312)
习题答案 …………………………………………………………………… (315)
名词索引(汉英对照,按拼音) …………………………………………………………………… (329)
名词索引(英汉对照) …………………………………………………………………… (337)
参考书目 …………………………………………………………………… (345)

第 1 章　几何空间中的向量

1.1　数域与 2 阶、3 阶行列式

本节是一个准备．首先引进数域的概念，通常我们是在一个数域内进行讨论，而同一问题在不同数域内可能会有不同的结果．其次将给出 2 阶与 3 阶行列式的定义，这只是为了讨论几何空间中的向量及平面与直线的方便．至于行列式的一般定义、性质，以及在研究线性方程组中的重要作用，将在第 2 章讨论．

1.1.1　数域

数是数学中最基本的概念．由一些数构成的集合称为数集．下面列出一些常用的数集：

$\mathbf{N}$　自然数集（包括 0）；

$\mathbf{Z}^+$　正整数集；

$\mathbf{Z}$　整数集；

$\mathbf{Q}$　有理数集；

$\mathbf{R}^+$　正实数集；

$\mathbf{R}$　实数集；

$\mathbf{C}$　复数集．

定义 1-1　设 $\mathbf{P}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集，如果 $\mathbf{P}$ 中包含 0 与 1，并且 $\mathbf{P}$ 关于加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的，即对于 $\mathbf{P}$ 中任意的 a 和 b，恒有

$$a+b\in\mathbf{P}\qquad a-b\in\mathbf{P}$$

$$ab\in\mathbf{P}\qquad \frac{a}{b}\in\mathbf{P}(b\neq 0)$$

则称 $\mathbf{P}$ 是一个**数域**（number field）．

显然，$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 都不是数域；而 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域．

例 1-1　数集

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

是一个数域.

证　因为

$$0=0+0\times\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$$
$$1=1+0\times\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 包括数 0 和 1.

在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中任取两数 $a+b\sqrt{2}$ 和 $c+d\sqrt{2}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$，于是

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 关于加法、减法、乘法是封闭的.

现设 $c+d\sqrt{2}\neq0$，于是 c 与 d 不全为 0，则 $c-d\sqrt{2}\neq0$，且

$$(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})=c^2-2d^2\neq0$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

即 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对除法也封闭. 故 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域.

同样可以证明下面的例 1-2.

例 1-2　数集

$$\mathbf{Q}(i)=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

是一个数域.

证明作为练习.

下面给出数域的重要性质.

定理 1-1　任何数域都包含有理数域.

证　设 $\mathbf{P}$ 是一个数域，则 $\mathbf{P}$ 包含 0 与 1.

由于 $\mathbf{P}$ 关于加法封闭，所以 $\mathbf{P}$ 包含 $1+1=2$，$2+1=3$，…，$(n-1)+1=n$，…，则 $\mathbf{P}$ 包含全体自然数.

又因为 $\mathbf{P}$ 关于减法封闭，所以 $\mathbf{P}$ 包含 $0-n=-n(n=1,2,\cdots)$，即 $\mathbf{P}$ 包含全体负整数，所以 $\mathbf{P}$ 包含全体整数.

由于任一有理数都可表为 $\frac{p}{q}(p,q\in\mathbf{Z},q\neq0)$，因此也在 $\mathbf{P}$ 中.

综上所述，$\mathbf{P}$ 包含有理数域 $\mathbf{Q}$.　□

注　有理数域 **Q** 是最小的数域.

在任何数域 **P** 中，加法与乘法满足熟知的数的运算规律，即对于任意的$a,b,c\in \mathbf{P}$,有

1°　加法交换律　$a+b=b+a$

2°　加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

3°　存在惟一的零元 0，使得 $a+0=0+a=a$

4°　对任意 $a\in \mathbf{P}$，存在惟一加法逆元 $-a$，称为 a 的相反数，使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

5°　乘法交换律　$ab=ba$

6°　乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$

7°　存在惟一的单位元 1，使得 $a\cdot 1=1\cdot a=a$

8°　对 **P** 中任意非零元 a，存在惟一乘法逆元 a^{-1}，使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1$$

9°　乘法关于加法的分配律

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)c=ac+bc$$

1.1.2　2 阶行列式

行列式的概念来源于解线性方程组. 下面从解二元线性方程组入手，引出 2 阶行列式.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

按消元法求解，可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组（1-1）有惟一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于记忆解的公式，我们引进新的记号来表示，这就是 2 阶行列式.

定义 1-2　由 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}这 4 个数排成的如下形式的记号