张嘉瑾精彩数学系列丛书

BUDENGSHI

不等式

FANGFA.JIQIAO.YOUMEIJIE

方法·技巧·优美解

编著　张嘉瑾

長春出版社

张嘉瑾精彩数学系列丛书

不等式
方法·技巧·优美解

张嘉瑾　编著

长春出版社

图书在版编目（CIP）数据

不等式 方法·技巧·优美解/张嘉瑾编著．—长春：长春出版社，2004.4
ISBN 7-80664-715-5

Ⅰ．不... Ⅱ．张... Ⅲ．不等式-解题 Ⅳ．0182.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第(031567)号
责任编辑：杨爱萍 封面设计：刘 洋

长春出版社出版
（长春市建设街 1377 号）
（邮编 130061 电话 8569938）
长春市新世纪印业有限公司印刷
新华书店经销
880×1230 毫米 32 开本 8 印张 1 插页 225 千字
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—7 000 册 定价：10.00 元

作者小传

张嘉瑾，男，江苏宜兴人，1982 年毕业于江苏师范学院数学系，1996 年被评为中学数学特级教师.

2001 年出任《高考》杂志主编，以其鲜明的风格，过人的才华将《高考》迅速打造成全国教育杂志中的知名品牌.

多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得. 在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文一百多篇. 出版数学专著十册近四百万字. 其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《思维 · 重点 · 方法》、《考前精彩 99》等著作深受全国广大师生的欢迎. 论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜.

课堂教学中善于启发学生的思维，激发学生的学习兴趣，并注重学生心理素质的培养. 良好的美学与文学修养形成了他数学课的特殊风格和魅力.

现供职于江苏省宜兴中学.

黑格尔说：方法不是外在的形式，而是内容的灵魂．恩格斯说：在一切哲学家那里，体系都是暂时的东西，但包含在体系中的真正有价值的方法却可以长久地启人心智，发人深思．

目录

第一章　不等式的性质与证明

目录

第一章　不等式的性质与证明

哲学家说：世界上没有两片完全相同的树叶．可见，不等是绝对的．

“不等式”这一章主要包括两个方面：一是证，二是解．证是难点，解是重点．证明不等式的方法多种多样，而由于知识结构的差异，方法的繁简也就不尽相同了．解不等式的重要性表现在哪里呢？它是运算中的一种基本功，也是化简的主要手段和程序．

1

比较法

在学习不等式的有关性质定理以前，我们先来熟悉一个中学数学中应用广泛、无处不有、无时不在的重要解题方法——比较法.

判断两个实数 a 与 b 的大小，常常归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号. 因此，如果设 $a-b=m$，而 m 可表示为某些实数运算的结果，那么确定 m 的符号，必然要归结到实数运算的符号法则. 只有在对 m 适当地变形(配方、分解因式等)之后，最后的结论(>0 或 <0 或 $=0$)方能明白地显露出来.

而作商比大小时，一要考虑所作商的两个数或式的符号；二要考虑通过约分及有关幂的运算后所得这个分数与 1 的大小关系.

我们从简单的问题开始.

好题导航

1.1 (1) 设 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$与$g(x)$的大小关系是　　(　　)

(A) $f(x)>g(x)$　　(B) $f(x)\geqslant g(x)$

(C) $f(x)=g(x)$　　　　　　(D) $f(x)<g(x)$

(2) 若 $x<y<0$,试比较$(x^2+y^2)(x-y)$与$(x^2-y^2)(x+y)$的大小.

分析　(1) 比较两个表达式的大小，最好的方法是作差：

$f(x)-g(x)=x^2-2x+2>0$ 恒成立（$\Delta<0$），因此选(A).

(2) $\because (x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]$

$=-2xy(x-y)$,

而 $x<y<0$，因此 $xy>0$，$x-y<0$.

$\therefore -2xy(x-y)>0$,

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

注　第(1)小题作差以后大小关系清楚地揭示出来了；第(2)小题作差，化到最简形式，但结论并不一目了然，还需根据一些基本的性质再作出正确的选择.

1.2　(1) 三个数 2^{55}、3^{33}、5^{22}的大小关系是　　　　(　　)

(A) $2^{55}<3^{33}<5^{22}$　　　　(B) $5^{22}<3^{33}<2^{55}$

(C) $3^{33}<5^{22}<2^{55}$　　　　(D) $2^{55}<5^{22}<3^{33}$

(2) 若 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

分析　两小题的共同特点是不同底数幂的大小的比较，肯定是比商好.

(1) $\because \dfrac{2^{55}}{3^{33}}=\left(\dfrac{2^5}{3^3}\right)^{11}=\left(\dfrac{32}{27}\right)^{11}>1$,

又 $\dfrac{3^{33}}{5^{22}}=\left(\dfrac{3^3}{5^2}\right)^{11}=\left(\dfrac{27}{25}\right)^{11}>1$,

$\therefore 2^{55}>3^{33}>5^{22}$，选(B).

(2) $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$,

当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，则$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,

$\therefore a^ab^b>a^bb^a$;

当 $0<a<b$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0$，则

$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$a^ab^b>a^bb^a$.

$\therefore$对于不相等的正数 a、b，都有 $a^ab^b>a^bb^a$.

注 第(2)小题在对 a、b 大小关系的讨论之后，才能作出最后的判断．讨论所遵循的理由，就是不等式的有关性质定理及其推论．

联想类比

1．设 $a>0$，$b>0$，证明 $a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

2．$a>b>c>0$，证明 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

3．已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 a、b、c 互不相等，证明 $a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

分析 这三个小题的证明方法完全可以借鉴上题(2)，我们给出2、3两题的证明——

2．因为 $a>b>c>0$，

则$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}$，

而$\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，因此$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.

同理$\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1$，$\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，

$\therefore\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}>1$，即 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

3．$\because a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$，

$\therefore a^{3a}b^{3b}c^{3c}>a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c}$，

因此，$a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

1.3 (1) 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M=\log_a(a^3+1)$，$N=\log_a(a^2+1)$，则 ( )

(A) $M>N$ (B) $M<N$

(C) $M=N$ (D) M、N 大小关系不确定

(2) 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，比较 $3f(x)$与 $f(3x)$的大小.

分析 (1) 要想确定 M、N 的大小关系，先来比较对数的真数的

大小.

$(a^3+1)-(a^2+1)=a^2(a-1)$　①

①式的符号与 a 的取值有关.

当 $a>1$ 时，①式大于 0，又 $y=\log_a x$ 为增函数，故 $M>N$；

当 $0<a<1$ 时，①式小于 0，又因为 $y=\log_a x$ 为减函数，故 $M>N$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，恒有 $M>N$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>-1,\ x\in\mathbf{R}\}$，我们知道复合函数的定义域受原函数定义域的制约，由 $3x>-1$ 便可知 x 的取值范围是 $\left\{x\mid x>-\frac{1}{3},\ x\in\mathbf{R}\right\}$.

$$\because 3f(x)-f(3x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x+1)^3}{3x+1}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x+1}$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{x^2(x+3)}{3x+1}\right]<0\left(x>-\frac{1}{3}\right),$$

$\therefore 3f(x)<f(3x)$.

注　第(1)小题对数的真数作差与 0 比较大小；第(2)小题实质是对数的真数作商与 1 比大小. 与此同时，考虑了对数函数的单调性. 假定第(2)小题遗漏了对 x 的取值范围的确定，那么结论就不完美了.

1.4　(1) 比较 $a^2-3|a|$ 与 $|a|-5$ 的大小.

(2) 比较 $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 与 $2\sqrt{n}$ 的大小 $(n\in\mathbf{N})$.

分析　(1) $(a^2-3|a|)-(|a|-5)$

$$=a^2-4|a|+5$$

$$=(|a|-2)^2+1>0.$$

$\therefore a^2-3|a|>|a|-5$.

作差，配方，结论出现了.

(2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-2\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0,$$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} > 2\sqrt{n}$.

变形，作差，目的达到了.

1.5　在等比数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1>0$，$a_3=b_3$，且 $a_1\neq a_3$，试比较下列数组的大小：

(1) a_2 与 b_2；(2) a_5 与 b_5.

分析　比较的是两数列某些项的大小关系，因此必须考虑其通项公式.

解　设$\{a_n\}$的公比为q，$\{b_n\}$的公差为d.

$a_3=a_1q^2$，$b_3=b_1+2d=a_1+2d$，

由 $a_3=b_3$ 知 $a_1q^2=a_1+2d$，即 $2d=a_1(q^2-1)$.

又 $a_1\neq a_3=a_1q^2$，故 $q\neq\pm 1$.

$$\begin{aligned}(1)\ a_2-b_2 &= a_1q-(a_1+d)\\ &= a_1q-a_1-\frac{1}{2}a_1(q^2-1)\\ &= -\frac{1}{2}a_1(q-1)^2<0,\end{aligned}$$

$\therefore a_2<b_2$.

$$\begin{aligned}(2)\ a_5-b_5 &= a_1q^4-(a_1+4d)\\ &= a_1q^4-a_1-2a_1(q^2-1)\\ &= a_1(q^2-1)^2>0,\end{aligned}$$

$\therefore a_5>b_5$.

注　比较两数或两式的大小，一般情况下作差更普遍，它没有任何条件的制约. 配方是作差之后实现目的的主要手段之一，当结论不惟一时，有时就必须进行分类讨论.

1.6　已知 $a>b>c$，求证 $a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

分析　**解法一**　作差：

$$\begin{aligned}&(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)\\ &=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+(b-c)bc\\ &=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]\\ &=(a-b)(b-c)(a-c)>0,\end{aligned}$$

这是因为 $a>b>c \Rightarrow a-b>0,\ b-c>0,\ a-c>0$.

这种基本的想法其实是解决问题的最有效途径．作差之后的因式分解也是由表达式的结构特点自然地联想的．而下面两种解法都具有一定的创造意识．

解法二　设 $a-b=x>0$，$b-c=y>0$，$a-c=x+y>0$，

左式 - 右式 $=(a^2b-ab^2)+(b^2c-bc^2)+(c^2a-ca^2)$

$=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=abx+bcy-ac(x+y)$

$=(abx-acx)+(bcy-acy)$

$=ax(b-c)+cy(b-a)=axy-cxy$

$=xy(a-c)=xy(x+y)>0.$

注　运算过程并不简单，但思路是新的．

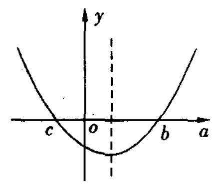
解法三　左式 - 右式

$=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+bc(b-c)$，

令 $f(a)=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)[a^2-(c+b)a+bc]$，

方程 $f(a)=0$ 之两根为 b、c，又 $b-c>0$，$a>b>c$，$f(a)$的图象开口朝上(如图)，



$\therefore f(a)>0.$

注　数与形结合，也是一条新的思路．而这些新思路的产生，都是以作差为前提的．

1.7　若$0<x<1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小．

分析　绝对值问题，如何比较大小呢？是去掉绝对值之后再比，还是另有别的方法？已知$0<x<1$，那么 a 呢？要分 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况讨论，看来讨论是不可避免的了．

解法一　(作差)当 $a>1$ 时，

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|\xlongequal{(0<x<1)}$

$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$

$=-\log_a(1-x^2)>0.$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$

又当 $0<a<1$ 时，$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|\xlongequal{(0<x<1)}$

$\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0.$

$\therefore$ 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

注 讨论总是比较麻烦，若能避开对字母 a 的讨论，这是大家所希望的.

解法二 （作差）

$$
\begin{aligned}
&|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|\\
&=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|\\
&=\frac{1}{|\lg a|}[\,|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|\,]\\
&=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]\\
&=-\frac{1}{|\lg a|}\lg(1-x^2)>0,
\end{aligned}
$$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法三 （比商）

$$
\begin{aligned}
\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}&=|\log_{(1+x)}(1-x)|\\
&=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x},
\end{aligned}
$$

而 $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{x^2}{1-x}>0$,

$\therefore \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>$（由单调性）$\log_{(1+x)}(1+x)=1$,

因此，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

注 解法二与解法三都避开了对字母 a 的讨论，这就在一定程度上简化了运算. 避开讨论的解法，往往对逻辑推理提出了更高的要求.

强化激活

1. 设 $p=(m^2+1)(n^2+4)$，$Q=(mn+2)^2$，则 （ ）

(A) $P\geqslant Q$ (B) $P\leqslant Q$ (C) $P>Q$ (D) $P<Q$

2. 若 $P=\frac{1}{a^2+a+1}$，$Q=a^2-a+1$，则 (　　)

(A) $P>Q$　　(B) $P<Q$

(C) $P=Q$　　(D) P、Q 大小关系不确定

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，则下列不等式恒成立的是 (　　)

(A) $a^2+4ab>b^2$　　(B) $ab-a>b-ab$

(C) $a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$　　(D) $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$

4. 设 $a>1$，$m=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，$n=\sqrt{a+2}+\sqrt{a-1}$，则 m、n 的大小关系是 (　　)

(A) $m<n$　　(B) $m>n$　　(C) $m\leqslant n$　　(D) $m\geqslant n$

5. 用不等号($>$、$<$、$\geqslant$、$\leqslant$)连接下列各式.

(1) a、b、$m\in\mathbf{R}^+$，且 $a>b$，则 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{b}{a}$______ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{b+m}{a+m}$；

(2) $a>0$，$b>0$，$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$______ $\frac{2}{a+b}$；

(3) 设 $0<a<1$，则 $\log_a(1+a)$______ $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；

(4) 正项等比数列$\{a_n\}$中，a_1+a_8______ a_4+a_5.

6. 设 m、$x\in\mathbf{R}$，比较 x^2-x+1 与 $-2m^2-2mx$ 之大小.

7. $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在区间$(-\infty,0)$上递增，且有 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$，求 a 的取值范围.

8. 若 a、b、c 是一个三角形的三边，证明不论 x 取何实数，总有 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$.

9. a、$b\in\mathbf{R}$，且 $\begin{cases}b+c=3a^2-4a+6\\c-b=a^2-4a+4\end{cases}$，则有 (　　)

(A) $c\geqslant b>a$　　(B) $c>b>a$　　(C) $b\geqslant c>a$　　(D) $a>c\geqslant b$

智力冲浪

10. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$p+q=1$，证明 $pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$对任意 x、$y\in\mathbf{R}$ 都成立的充要条件是 $0\leqslant p\leqslant 1$.