四川科学技术出版社

江之源 李茂男 刘祖佑
封长安 许仁忠 编著

微积分

I

经济管理应用数学基础

经济管理应用数学基础(一)

微 积 分

江之源　李茂男　刘祖佑
封长安　许仁忠
编著

四川科学技术出版社
一九八七年·成都

经济管理应用数学基础(一)

微 积 分

江之源 李茂男 刘祖佑 封长安 许仁忠 编著

四川科学技术出版社出版
(成都盐道街三号)
四川省新华书店发行
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
统一书号：4298·91

1987年6月第1版　　开本787×1092毫米 1/23
1987年6月第1次印刷　　字数244千字
印数 1—15,000 册　　印张11.25
定 价：2.30元
ISBN 7-5364-0155-8/F·31

前　言

近年来，经济管理类成人教育发展很快，这套《经济管理应用数学基础》就是供成人数学教学和自学使用的。

本书是在分析了成人教育中数学课程教学的特点和需要的基础上编写的，它的基本特点是注重数学概念特别是数学计算方法，对数学理论，在不影响整体的逻辑性、系统性的前提下，进行了较大幅度的取舍删减。特别是对成人数学教学中的难点，进行了恰当的处理。例如对《微积分》中的中值定理、《线性代数》中的向量组线性相关线性无关、《概率论》中的中心极限定理与大数定律，进行了删舍，加强了数学基本运算特别是数学在经济管理中应用的内容。我们期望这样会对成人教育的数学教学有所补益和帮助。

全书共分三册：《微积分》、《线性代数与线性规划》、《应用概率统计》，全部讲完约需 200 个学时。本册《微积分》由江之源、刘祖佑、李茂男、封长安、许仁忠等同志主编，由江之源、许仁忠同志主纂。

本书在编写和成稿过程中得到西南财经大学数学教授吴怀先生和成都科技大学数学教授王荫清先生的关心和指导，并承蒙他们审阅全书。初稿完成后，由西南财经大学、北京财贸学院、北京商学院、复旦大学管理学院、云南财贸学院、贵州财经学院、解放军军事经济学院、山西经济学院、山西经济管理干部学院、中国人民银行管理干部学院、保险

管理干部学院等近四十所院校五十余名数学教师参加讨论，提出了不少宝贵的意见和建议，使本书增色不少。在此，向吴怀先生、王荫清先生及参加教材讨论的老师们表示衷心的感谢。

编者水平有限，加之成书时间仓促，错误在所难免，恳请读者批评指正，以利提高和改进。

《经济管理应用数学基础》编写组

一九八七年元月十五日

《经济管理应用数学基础》编写组成员（以姓氏笔划为序）

王其义　许仁忠　江之源　李茂男

刘祖佑　吴庭壁　孙　富　封长安

钟冠国　蒋万里

主纂　许仁忠　江之源

主审　吴　怀　王荫清

目　录

第一章 函　数

微积分是研究变量的数值变化以及变量之间的关系的数学。它的内容包括极限理论，一元函数的微分法和积分法以及多元函数的微分法和积分法等三个部分。

函数是微积分研究的主要对象，是微积分中一个重要的基本概念。本章是在初等数学中已有函数知识的基础上进一步讨论函数，给出函数的一般定义，结合图形叙述一些简单的函数性质。

§1—1 函数的概念

一、变　量

我们观察各种自然现象、经济现象或技术过程时，常会遇到各种不同的量。例如：距离、时间、温度、速度、劳动生产率、产量、成本、价格、利润等等。尽管它们各自代表的意义不同，但在所研究的某一现象或过程中，就这些量的变化状态来说，一般可分为两类：一类在某一过程中只取同一数值的量，叫做常量；另一类则可取不同数值的量，叫做变量。

例如：观察某工厂一年中生产情况，总投资为一常量，每月产品的产量则是变量，它随时间的变化而不尽相同。

又如：某商店一年中各月份销售灯泡的个数及所得的收

入是变量，而灯泡的单价是常量。

一个量是常量不是变量是对某一过程来说的，并不是绝对的。同一个量在某种条件下是常量，在另一种条件下就可能是变量。如上例中，灯泡的单价在观察某商店某一天的销售情况时是常量，而在观察该商店若干年的销售情况时，灯泡的单价就可能是变量。因此，常量和变量在一定条件下，是可以相互转化的。

习惯上，为了易于辨别，常量一般用字母 a、b、c 等来表示，变量一般用字母x、y、z等来表示。

因为量是通过数来表示的，所以可用数轴上的一个点来表示。常量，用数轴上的一个定点来表示；变量，用数轴上的动点来表示。

在一个具体的变化过程中，变量的变化总是有一定的变化范围的。例如，销售灯泡的个数只能取正整数。对工厂的总投资不能是负数。

变量的变化范围，在取实数值的时候，我们往往用区间来表示。区间是指介于某两个实数之间的全体实数，而这两个实数叫做区间的端点。设a和b是两个任意实数，且$a<b$，满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数组成一个闭区间，记为$[a,b]$。也就是说变量x的变化范围为闭区间$[a,b]$。满足不等式 $a<x<b$ 的x的全体实数组成一个开区间，记为

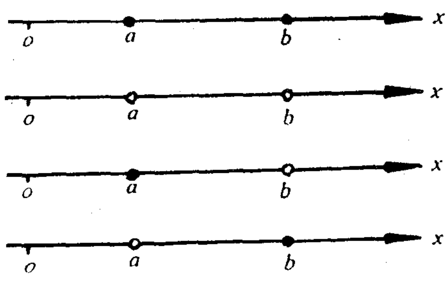

图 1—1

(a,b)。此外，满足$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的x的全体实数组成半开半闭的区间，记为$(a,b]$或$[a,b)$。这里a，b就是区间的端点，如图1—1所示。

除了这些有限区间外，还可以有各种无限区间：

用$(a,+\infty)$表示大于a的全体实数；$[a,+\infty)$表示大于等于a的全体实数；$(-\infty,b)$表示小于b的全体实数；$(-\infty,b]$表示小于等于b的全体实数；$(-\infty,+\infty)$表示全体实数。

② 符号“∞”并不是表示数量，它只是一个记号，“∞”前面的“$+$”或“$-$”符号表示方向。

例如：满足不等式$-\pi\leqslant x<0$的全体实数x，组成半开区间$[\pi,0)$。

又如：$(-\infty,1]$表示满足不等式$x\leqslant 1$的全体实数。

二、函数的定义

在同一个自然现象、经济现象或技术过程中，我们所研究的各个量之间，一般都不是彼此孤立存在的，而是相互联系、相互依赖或相互制约的。

在经济学中，商品的成本，价格与利润之间总有一定相依关系的。

例如：某商品每件成本为3元，今卖出100件，如果每件价格用x(元)表示，所获利润P(元)，它们之间就有关系

$$P=100(x-3)(\text{元})$$

又如：某化工厂生产某产品每日最高产量为50（吨），固定成本为80（元），每多生产一吨，成本增加2（元），则每日的总成本C和日产量x就有关系

$$C = 80 + 2x, \qquad 其中0 \leqslant x \leqslant 50$$

再如：用温度自动记录仪记录的温度变化曲线（见图1—2）形象地表示出温度T与时间t的变化规律。对于某一确定的时间t，就有一个确定的温度T与它对应。如：当$t = 0$时，$T = 17℃$；$t = 18$时，$T = 20℃$。

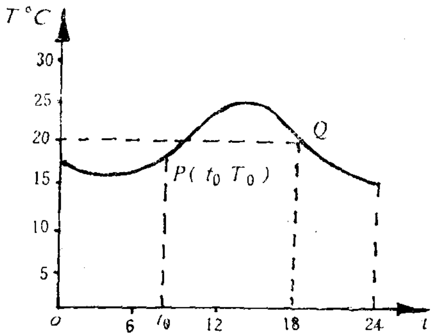

图 1—2

变量之间的相互依赖关系的具体例子很多。虽然所包含的具体意义各不相同，但它们具有一个共同的特点。就是：在某一变化过程中有两个变量，这两个变量是相互联系相互依存的，其中一个变量在某一变化范围内取一个确定的值时，另一个变量就按照一定的规律得到一个确定值与之对应。概括起来，我们得出如下定义：

定义1.1 设在同一变化过程中的两个变量x与y，如果当变量x在实数的某一范围内取一个数值时，变量y按照一定的规律，总有一个（或多个）确定的数值和它对应，则称变量y是变量x的函数。记作

$$y = f(x)$$

符号$f(x)$中的f表示对应规律，它说明当x给出后，用什么方法和步骤得到函数值。如$f(x) = 2x + 1$，对应规律f表示$f(\quad) = 2(\quad) + 1$，即“将括号中的量乘2后再加上1的运

算”。x叫自变量，y叫因变量。自变量x的变化范围叫做 函数的定义域。因变量y所对应的数值范围叫做函数的值 域。

当x任取一个值，函数y只有一个确定的值与它对应，我们称y是单值函数；当x任取一个值，函数y有两个或两 个 以上的值与它对应，我们称 y 是多值函数。

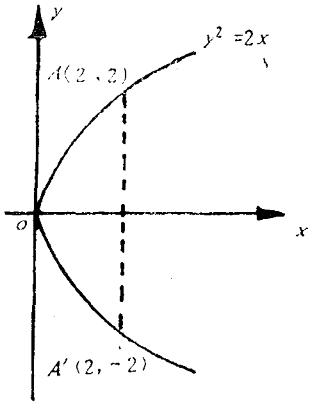

图 1—3

例如：$y^2=2x$(见图1—3)当 $x=2$ 时，y有2和-2两个确定的值与之对应，这里y 就是x的多值函数。

我们研究的函数一般都是单值函数。如果遇到多值函数时，则设法加以条件限制，使之成为单值函数。

三、函数值和函数的定义域

对于自变量x在定义域内所取的每一数值，因变量 y所对应的值叫函数值。若已知函数$y=f(x)$对应$x=x_0$ 时有对应函数值存在记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$，此时我们称函数$y=f(x)$在x_0处有定义。若$f(x_0)$不存在，则称为$f(x)$在x_0处无定义。

〔例1〕 若 $y=f(x)=3x^2-2x+1$，求 $f(0)$，$f(x_0)$，$f(a+b)$。

解：

$$f(0)=y|_{x=0}=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1;$$

$$f(x_0)=y|_{x=x_0}=3x_0{}^2-2x_0+1;$$

$$f(a+b)=3(a+b)^2-2(a+b)+1。$$

〔例2〕 $y=f(x)=x^3+1$,求$f(x^2)$,$f(-x)$,$[f(x)]^2$。

$$f\left(\frac{1}{x}\right),\ f\left(\frac{1}{f(x)}\right)。$$

解：

$$f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1;$$
$$f(-x)=(-x)^3+1=1-x^3;$$
$$[f(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1;$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3+1=\frac{1}{x^3}+1;$$
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)^3+1=\left(\frac{1}{x^3+1}\right)^3+1$$
$$=\frac{1}{(x^3+1)^3}+1$$

定义域就是允许自变量取值的范围。在实际问题中，定义域是根据函数的实际意义来确定的。

例如：函数$C=80+2x$其定义域为一切实数，如果它是表示某工厂日产量x与总成本C的关系时，该厂最高日产量为50(吨)，此时函数的定义域为$0\leqslant x\leqslant 50$或表示成$[0，50]$。

再如：考虑半径为r的圆面积 $A=\pi r^2$，其定义域是$[0，+\infty)$，如果一般研究函数 $y=\pi x^2$，其定义域是$(-\infty，+\infty)$。

在一般情况下给出函数关系的数学式子，求函数定义域，就是要使数学式子中，所有的运算都有意义的自变量的取值范围。

〔例3〕 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域。

解：要使函数有定义，根号内的值不能为负，且分母不能为零，所以有$1-x^2>0$。则函数的定义域为$(-1,1)$。

〔例4〕 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解：这是两项之和，而且仅当每一项都有意义时函数才有意义。第一项定义域是$4-x^2\geqslant 0$，即$-2\leqslant x\leqslant 2$；第二项的定义域为$x-1>0$，即$x>1$，所以，函数的定义域为$(1,2]$。

〔例5〕 求函数 $y=\lg(1-x)+\sqrt{x+4}$ 的定义域。

解：因为负数和零没有对数，所以$1-x>0$，即$x<1$，又$x+4\geqslant 0$，即$x\geqslant -4$。故函数的定义域为$[-4,1)$。

〔例6〕 求函数 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域。

解：除x不能为零外，且需 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即$|x|\geqslant 1$。这个不等式已经把$x=0$除外，所以函数的定义域是两个无限区间，$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$。

四、函数的表示法

表示函数关系的方法很多，最常用的有三种。

1.*列表法*　就是把一系列自变量的值，以及与它对应的函数值，列成表格来表示函数关系的一种方法。如三角函数、对数表、平方表等都是用表格表示函数的方法，这种表格叫做函数表。优点是用起来方便，缺点是数据不全，不能查出函数的任意值。

2.*图示法*　就是用图形表示两个变量之间函数关系的方法。前面所举的由温度自动记录仪记录的温度变化曲线，就

是表示温度与时间之间的函数关系。图示法的优点是鲜明直观，缺点是不便于作理论分析和演算。

3.解析法（公式法） 就是用数学式子表示两个变量之间的函数关系的方法。前面提到的利润和价格的关系式 $P=100(x-3)$ 就是这种表示法。其优点是形式简明、准确，适用于理论分析和计算。微积分中涉及的函数关系大多数用此方法来表示，缺点是不能明显地看出函数的变化关系。在有些实际问题中遇到的函数关系，并不是都能用解析法表示的。

有的函数在整个定义域上不是用统一的一个公式表示，而要用两个或更多个式子来表示。

〔例1〕 信件的重量W与邮资S是两个量，按照邮政规定“国内邮资（外埠平信），每20克付资8分，不足20克者以20克计算，总重量不得超过2000克”。W与S的对应关系虽然很简单，但却要用很多个式子才能表示出来。

$$S=\begin{cases} 8, & 0<W\leqslant 20; \\ 8\times 2, & 20<W\leqslant 40; \\ 8\times 3, & 40<W\leqslant 60; \\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots; \\ 8\times 100, & 1980<W\leqslant 2000. \end{cases}$$

这种表示函数关系的方法称为函数的分段表示法。用分段表示法表示的函数，叫做分段函数。求分段函数的函数值时，要注意自变量的范围，对于自变量的某一部分数值要代入相应式子中去求。

〔例2〕 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leqslant x<0; \\ 0 & x=0; \\ x-1 & 0<x\leqslant 1。\end{cases}$$

是由三个不同的式子分段表示的，它的定义域是$[-1,1]$（如图1—4）。

当x分别取$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$时，其对应函数值为：

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1$$
$$=\frac{1}{2};$$

$$f(0)=0;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}。$$

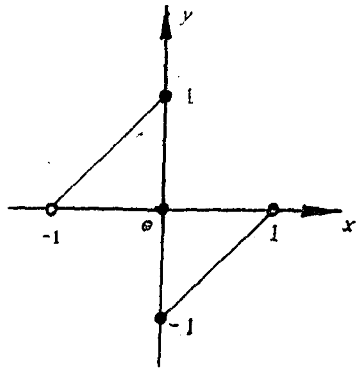

图 1—4

§1—2 函数的几种简单性质

一、函数的奇偶性

设函数$y=f(x)$的定义域对称于原点，如果对任一值x，当x改变符号时，函数值也只改变符号，即$f(-x)=-f(x)$，则此函数叫做奇函数。若$f(x)$为奇函数，则当点$Q(x,f(x))$在函数$y=f(x)$的图形上时，与它对称于原点的$Q'(-x,-f(x))$