自学輔导叢書

自学平面几何的鑰匙（高中組）

上海市中学教师进修学院科普工作組

上海科学普及出版社

总号：054

自学平面几何的鑰匙（高中組）

組　　稿：上海市中学教师进修学院科普工作組
著　　者：凌康源　陈朝龙　梅嘉勳
封面設計：蔡　振　华
出 版 者：上海科学普及出版社
（上海市南昌路47号）
上海市書刊出版業營業許可証出字第085号
發 行 者：新华书店上海發行所
印 刷 者：上海市印刷四厂
上海新閘路1745号

开本：787×1092 耗 1/32　　印張：3 5/16
字數：76,000　　統一書号：T 70128・13
印數：162,001—222,000　　定　价：2角6分
1957年12月第一版　　1958年6月第三次印刷

目　次

第一章　綫段的度量……1

一　什么叫度量問題……1

二　綫段的度量理論……2

第二章　綫段度量的应用……11

一　三角形的相似……11

二　多边形的相似……19

三　多边形的相似变換……24

四　三角形中及圓中各綫段間的相互关系……30

五　关于比例綫段的定理……42

六　用代数法解作圖題……48

七　銳角三角函数……53

第三章　多边形的面积……61

一　面积的概念……61

二　矩形的面积……62

三　平行四边形、三角形、梯形的面积……65

四　等积变形……67

五　勾股定理……69

六　三角形和多边形面积之比……70

第四章　正多边形……73

一　正多边形的定义和一般性質……73

二　在已知圓內作几个特殊边数的內接正多边形……74

三　已知一边作正多边形……77

四　一条重要的公式……79

第五章　圓的周長和面积……81

一　圓的周長的定义……81

二　圓周率……84

三　弧的長……85

四　圓、扇形、弓形的面积……86

第一章　綫段的度量

一　什么叫度量問題

在初中平几課本里，曾把一条綫段放到另一条綫段上去比較，从而作出兩条綫段相等和不相等的規定。如果兩条綫段不相等，又作出了一条綫段大于或小于另一条綫段的規定。对于角、弧也有同样的处理。初中学生在研究几何圖形中綫段和綫段、角和角的关系时，只能做到象証明綫段 $AB>$ 綫段 CD，或 $\angle AOB<\angle A'O'B'$。如果要进一步研究綫段 AB 比綫段 CD 大多少，或者 $\angle AOB$ 比 $\angle A'O'B'$ 小多少，就缺乏严密的方法了。为了研究某一几何圖形中，一条綫段比另一条綫段大多少或小多少这样一类的問題，我們必須研究度量問題。

首先应当說明一下什么叫几何量。上面說过綫段和綫段、角和角、弧和弧都是可以相互比較大小的。我們把可以相互比較大小的同类的几何圖形叫做几何量。綫段、角、弧就是三类不同的几何量。我們在某一类几何量中选擇一个圖形做标准(也叫單位)，把这个标准和其它同类的圖形做比較，然后用一个数来表示比較的結果。例如以尺量竹竿，尺就是事先选擇的标准綫段。我們用数来表示用尺和竹竿比較的結果，象7.5尺，这說明竹竿是尺的七倍半。这一个数叫做量数。因此对某一类几何量的度量問題可以初步理解为：在确定了标准量之后，如何对其它同类的几何量找出它的量数的問題。表面看来，度量問題，似乎簡單。用尺量布，用量角器量角，誰不会呢。实际上并不如此。度量問題有它自己的理論，例如度量的实行以什么公理为依据，选定了标准量以后，如何对一个同类的其它几何量精确地决定它的量数，量数究竟是什么样的数。这些問題都不是十分容易答复的。高中平几課本一开始就介紹了

綫段的度量理論。关于角，弧的度量理論，在形式上，和綫段的度量理論十分类似，因此都没有提及。最后还有多边形面积的度量問題，圓的周長和面积的度量問題。高中平几的全部教材，从头至尾，为度量問題所貫串，因此它的內容，比初中平几教材的內容更丰富多采了。

二 綫段的度量理論

亞几默得公理 根据前面的討論，綫段的度量問題就是研究怎样用單位綫段去度量其它的綫段，和怎样精确地找出一个量数来表示度量的結果。对于綫段的量数，我們应当有下面的理解，(1)相等綫段有相等的量数。(2)如果把一条綫段分成几个部分，那末对应于各个部分綫段的量数之和，等于这些部分綫段的和的量数。在确定綫段的量数的过程中，我們一定要把單位綫段放在被度量的綫段上去做比較。用几何的术語来說：就是在被度量的綫段上从它的某一个端点起連續不断地截取單位綫段。这样截取的結果不外下面兩种情形：(1)截了几次，恰巧截尽，就是被度量綫段含有單位綫段的整数倍。(2)截了几次而有剩余，剩余的綫段显然比單位綫段小。古代希臘数学家亞几默得把这种眞实的几何事实編成一条公理，作为度量問題的公理依据。这一条公理就叫亞几默得公理，它的內容是：在長短不同的兩条綫段中，無論較長的綫段是怎样長，較短的綫段是怎样短，我們总可以在較長的綫段上連續截取較短的綫段，并且截到某一次以后，就得出下面的兩种情形中的一种：或者没有剩余，或者得到一条短于較短綫段的剩余綫段。

兩条綫段的公度 在綫段的度量理論中，綫段的公度的概念十分重要。不明确綫段公度的意义就不能透徹理解綫段量数的性質。如果綫段 AB、CD 各含 MN 的整数倍。我們把綫段 MN 叫做綫段 AB、CD 的公度，例如綫段 $AB=28\cdot MN$，$CD=20\cdot MN$，这里 28、20 都是整数，所以 MN 是 AB、CD 的公度。請讀者注意下面的等式是成立的：

$$AB=28\cdot MN=56\cdot\frac{MN}{2}=84\cdot\frac{MN}{3}=112\cdot\frac{MN}{4}=\cdots\cdots,\quad CD=20\cdot MN$$

$=40\cdot\frac{MN}{2}=60\cdot\frac{MN}{3}=80\cdot\frac{MN}{4}=\cdots\cdots$。显然 AB, CD 各含 $\frac{MN}{2}$, $\frac{MN}{3}$, $\frac{MN}{4}\cdots\cdots$的整数倍，因此 $\frac{MN}{2}$, $\frac{MN}{3}$, $\frac{MN}{4}\cdots\cdots$，都是 AB、CD 的公度。由此可知，只要知道 MN 是 AB、CD 的公度，MN 的任何整数分之一都是 AB、CD 的公度。当然我們还得問有沒有大于 MN 的公度呢？請注意下面的等式也是成立的：$AB=28\cdot MN=14\cdot(2\cdot MN)=7\cdot(4\cdot MN)$。$CD=20\cdot MN=10\cdot(2\cdot MN)=5\cdot(4\cdot MN)$。显然 $2\cdot MN$, $4\cdot MN$ 都是 AB、CD 的公度。但是 7、5 是沒有公因数的，因此 $4\cdot MN$ 是公度中最大的一个。由上面的討論，可知：兩条綫段只要有一个公度，它們就有無数个公度；在这無数个公度中，找不出最小的公度，但是有一条最大的公度。我們把兩条綫段的最大的一个公度就称为它們的最大公度。

現在研究如何求兩条已知綫段的最大公度的問題。高中平几課本提出了兩条定理，作为求已知兩綫段最大公度的依据。它們是：

定理一：在兩条綫段中，如果較長的綫段含有較短的綫段的整数倍而沒有剩余，那末較短的綫段就是这兩条綫段的最大公度。

定理二：如果在兩条綫段(a, b 且 $a>b$)中較長的綫段(a)含有較短的綫段(b)的整数倍而有剩余(r)，那末这兩条綫段(a, b)的最大公度(如果存在的話)就是較短的綫段(b)和剩余綫段(r)的最大公度。

关于定理一，課本上有淺显易懂的說明，这里不再說明了。

关于定理二，課本上証明了綫段組 b, r 的公度就是綫段組 a、b 的公度。又証明了綫段組 a, b 的公度就是綫段組 b, r 的公度。綜合这兩步証明，我們得到綫段組 a, b 和綫段組 b、r 有完全相同的公度，因此它們有相同的最大公度的結論。对于这最后的結論，我們現在加以补充說明。

假定說 a、b 的最大公度是綫段 d，可是 d 不是綫段 b、r 的最大公度，那末 b、r 一定有大于 d 的公度 d'。因为 b、r 的公度就是 a、b 的公度，所以 d' 也是 a、b 的公度。可見 d 不是 a, b 的最大公度。这和 d 是

a、b 的最大公度的假定矛盾，因此 a、b 的最大公度 d 也是 b、r 的最大公度。

我們采用著名的輾轉相截法来求已知兩綫段的最大公度。設已知兩綫段是 a、b，且 $a>b$，下面就是求 a、b 兩綫段的最大公度的方法。

第一步　用圓規在綫段 a 上从固定的端点 A 起，連續截取等于 b 的綫段。根据亞几默得公理，截取的結果不出下面兩种情形的一种:

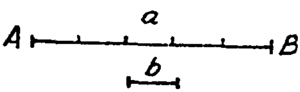


圖 1.

（i）在綫段 a 上，截到某一次，恰好截完而沒有剩余（圖 1）。由定理一，綫段 b 本身就是 a、b 的最大公度。

（ii）在截到某一次得到小于 b 的剩余綫段 r_1。由定理二 a、b 的最大公度就是 b、r_1 的最大公度。所以求 a、b 的最大公度的工作轉換为求 b、r_1 的最大公度（圖 2）。我們把这一回綫段相截叫做第一回，r_1 是第一回截得的剩余。

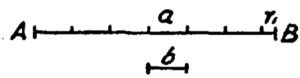


圖 2.

第二步　为了求 b、r_1 的最大公度，我們重复了第一步的手續，就是在綫段 b 上，从某一个端点起，連續截取綫段 r_1。由亞几默得公理，截取的結果又不出下面兩种情況的一种:

（i）截到某一次，恰好截完而沒有剩余。由定理一，r_1 本身就是 b、r_1 的最大公度。由定理二，r_1 又是 a、b 的最大公度。

（ii）截到某一次而得到小于 r_1 的剩余綫段 r_2。由定理二，b、r_1 的最大公度就是 r_1、r_2 的最大公度。現在求 b、r_1 最大公度的工作又轉換为求 r_1、r_2 的最大公度。这是輾轉相截的第二回，r_2 是在第二回相截中所得的剩余。

第三步　为了求 r_1，r_2 的最大公度，我們又得重复第一步的手續，就是在綫段 r_1 上，从某一个端点起，連續截取綫段 r_2。这样的不断繼續輾轉相截，由亞几默得公理，我們可能得到的結果不出下面兩种情況的一种:

(i)輾轉相截繼續到第m回。在第m回的輾轉相截中，在綫段r_{m-2}(第$m-2$回輾轉相截所得的剩余綫段)上，从某一个端点起連續截取綫段r_{m-1}(第$m-1$回輾轉相截所得的剩余綫段)，截到某一次，恰巧截尽而没有剩余。由定理一，r_{m-1}本身就是r_{m-2}、r_{m-1}的最大公度。如果把已知綫段a、b,和各剩余綫段r_1，r_2，r_3………r_{m-1}，按先后得到的次序排列起來：

$$a、b、r_1、r_2、r_3\cdots\cdots r_{m-3}、r_{m-2}、r_{m-1}。$$

由定理二，可知a、b的最大公度就是b、r_1的公度；b、r_1的最大公度就是r_1、r_2的最大公度，r_1、r_2的最大公度就是r_2、r_3的最大公度……r_{m-3}、r_{m-2}的最大公度就是r_{m-2}、r_{m-1}的最大公度。現在r_{m-2}、r_{m-1}的最大公度就是r_{m-1}，所以a、b的最大公度就是r_{m-1}。

(ii)輾轉相截的过程一直繼續下去，每截一回总有剩余。在这种情况下，我們說a，b没有任何公度。为什么呢？我們把綫段a、b和各回截得的剩余綫段，按大小排列起來：

$$a、b、r_1、r_2、r_3\cdots\cdots r_m，r_{m+1}，\cdots\cdots。$$

在这个排列中，后一条綫段小于前一条綫段。假定a、b有公度綫段d，那末由定理二d也是綫段b、r_1的公度。可知a、b、r_1各含有d的整数倍。同理，可知r_2、r_3、……r_m、r_{m+1}……等所有的剩余綫段都含有d的整数倍。但是在排列的每相鄰的兩条綫段中，(象r_2、r_3)后面一条总是小于前面的一条(象$r_3<r_2$)，因此后面的一条至少比前面的一条少含一个d。这样的逐条少下去，总有一条剩余綫段是O。这和輾轉相截一直繼續下去，每截一回总有剩余的情况不符，因此“a、b有公度d”的假定不合理，也就是a、b没有公度。我們把没有公度的綫段叫做無公度綫段。

用下面的例子来說明前面的那些理論：

例一：在求綫段a、b的最大公度的过程中，第一回在a上截了4个b而得剩余r_1，第二回在b上截了3个r_1而得剩余r_2，第三回在r_1上截了5个r_2而得剩余r_3，第四回在r_2上截了2个r_3而恰好截尽，試

求 a、b 各含它們的最大公度 r_3 的倍数。

解：按題意得：①：$a=4b+r_1$。　②：$b=3r_1+r_2$。

③：$r_1=5r_2+r_3$。　④：$r_2=2r_3$。

把④式代入③式，得⑤：$r_1=11r_3$。把④、⑤兩式同时代入②，得⑥：$b=35r_3$。把⑤，⑥兩式同时代入①式，得 $a=151r_3$。$\therefore a$、b 各含最大公度 r_3 的 151、35 倍。

例二：已知$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C=36°$。

求証：AB，BC 是無公度綫段。(圖 3)。

証明：把 AB、BC 輾轉相截，如果这輾轉相截的过程可以一直繼續下去就說明了 AB、BC 是無公度綫段。

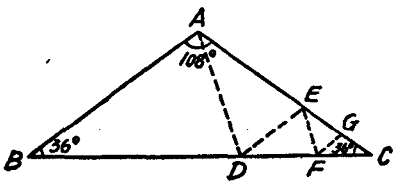


圖 3.

在 $\triangle ABC$ 中，$\because \angle B=\angle C$，$\therefore AB=AC$；并且 $\angle BAC=180°-2\times36°=108°$。$\because \angle BAC>\angle BCA$，$\therefore BC>AB$。因此第一回先在 BC 上截 $BD=AB$。連結 AD。

在 $\triangle ABD$ 中，$\because AB=BD$，$\therefore \angle BAD=\angle ADB$。而 $\angle ADB=\frac{1}{2}(180°-36°)=72°$。$\therefore \angle ADC=180°-72°=108°$。

在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=180°-(108°+36°)=36°$。$\therefore \triangle ADC$ 也是底角等于 36° 的等腰三角形，$\therefore DC=AD$。又因 $\angle ADC>\angle DAC$，$\therefore DC<AC$，也就是 $DC<AB$。$\therefore DC$ 是第一回截得的剩余。

第二回，应当在 AB 上截取 DC。但 $AB=AC$，$\therefore$ 可在 AC 上截取 $AE=DC$。連結 DE。

用同样的方法，可以說明 $EC<DC$，因此 EC 是第二回截得的剩余，同时 $\triangle EDC$ 是底角等于 36° 的等腰三角形。

第三回在 DC 上截 $DF=EC$。用同样的方法，可以說明 $FC<EC$，因此 FC 是第三回截得的剩余，同时 $\triangle EFC$ 是底角等于 36° 的等腰三角形。

由此可知，輾轉相截的过程可以一直繼續下去。每截一回，总是得到一个較小的，底角等于 36° 的等腰三角形。因此 AB、BC 是無公度綫段。

綫段的度量 設綫段 l 是長度單位，綫段 a 是被度量的綫段。現在我們来研究怎样用 l 量 a，怎样精确地找出 a 的量数。綫段 l 和 a 的最大公度在这里起重要的作用。

首先假設 l、a 是有公度綫段。这里我們分兩种情况来討論。(i) l 本身就是 a、l 的最大公度，显然 a 含有 l 的整数倍。因此在綫段 a 上，从某一端起，連續截取等于 l 的綫段，截了几次(比如 m 次)以后恰好截尽。即 $a=ml$。在这样的情况下，量数 m 是个整数。(ii) l、a 的最大公度是綫段 d。按兩綫段最大公度的定义，l、a 各含 d 的整数倍。为了明确起見，設 l 含 n 个 d；a 含 m 个 d。即 $l=nd$, $a=md$ (这里的 n、m 是沒有公因数的兩个整数)。由上面的等式得 $d=\frac{l}{n}$。$a=m\frac{l}{n}=\frac{m}{n}l$。由此可知，如果在 a 上，从某一端起，連續截取綫段 d，一定截了 m 次而恰好截尽。在这样的情况下量数 $\frac{m}{n}$ 是一个分数。

我們知道分数可以化为有限小数$\left(象\ \frac{7}{4}=1.75\right)$或循环小数，$\left(象\ \frac{16}{9}=1.777\cdots\right)$，整数和分数总称为有理数。因此我們說：当長度單位和被度量綫段是有公度的，那末度量所得的量数是一个整数，或者是一个分数(包括有限小数、循环小数)。总之量数是一个有理数。

假設長度單位 l 和被度量綫段 a 是無公度綫段。那末，用 l 的任何整数分之一$\left(\frac{l}{10}、\frac{l}{100}、\frac{l}{1000}、\frac{l}{10000}\cdots\cdots\frac{l}{10^n}、\cdots\cdots\right)$都不能截尽 a。因为每截一次，总有剩余，因此每次所得量数仅是 a 的量数的近似値。但是在 a 上截取的綫段一次比一次小$\left(象\ \frac{l}{1000}<\frac{l}{100}<\frac{l}{10}\right)$，因此这样逐次所得的各个近似値，也一个比一个的逼近 a 的量数了。我們用下面的具体例子来說明这个方法。

(1)在圖4中，l是長度單位，a是被度量綫段。先在綫段a上，連續截取等于l的綫段。現在截了一次，就得剩余CB，当然$CB<l$。显然a比一个l大，可是分为兩个l又不够。因此$l<a<2l$，可見a的量数在1和2之間。

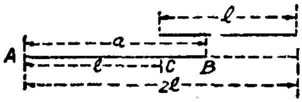


圖 4.

(2)現在在a上，連續截取等于$\frac{l}{10}$的綫段(圖5)，截了13次而得剩余C_1B，当然$C_1B<\frac{l}{10}$。可見a分为13个$\frac{l}{10}$而有余，分为14个$\frac{l}{10}$却又不够。因此$13\cdot\frac{l}{10}<a<14\cdot\frac{l}{10}$；就是$1.3l<a<1.4l$。可見$a$的量数在1.3和1.4之間。又因$a$和$1.3l$之差与$1.4l$和$a$之差都小于$l$的$\frac{1}{10}$，所以我們說1.3和1.4分别是精确到$\frac{1}{10}$的，$a$的量数的不足和过剩近似值。

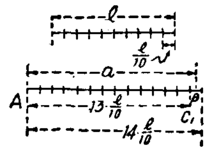


圖 5.

(3)現在在a上、連續截取等于$\frac{l}{100}$的綫段$\left(因为\frac{l}{100}太小，不易用圖表出，所以不画圖了。讀者可以根据圖5想象出截取的情形\right)$。假定截了135次而得剩余$C_2B$，当然$C_2B<\frac{l}{100}$。可見$a$分为135个$\frac{l}{100}$而有余，分为136个$\frac{l}{100}$却又不够。因此$135\cdot\frac{l}{100}<a<136\cdot\frac{l}{100}$；就是$1.35l<a<1.36l$。可見$a$的量数在1.35和1.36之間。又因$a$和$1.35l$的差与$1.36l$和$a$的差都小于$l$的$\frac{1}{100}$，所以我們說1.35和1.36分别是精确到$\frac{1}{100}$的，$a$的量数的不足和过剩近似值。

(4)現在在a上，連續截取等于$\frac{l}{1000}$的綫段。假定截了1358次而得剩余C_3B，当然$C_3B<\frac{l}{1000}$。可見a分为1358个$\frac{l}{1000}$而有余，

分为 1359 个 $\frac{l}{1000}$ 却又不够。因此 $1358\cdot\frac{l}{1000}<a<1359\cdot\frac{l}{1000}$；就是 $1.358l<a<1.359l$。可見 a 的量数在 1.358 和 1.359 之間。又因 a 和 $1.358l$ 的差与 $1.359l$ 和 a 的差都小于 l 的 $\frac{1}{1000}$，所以我們說 1.358 和 1.359 分别是精确到 $\frac{1}{1000}$ 的，a 的量数的不足和过剩近似值。

（5）一般講，在 a 上，連續截取于 $\frac{l}{10^n}$ 的綫段，假定截了 m 次（m 是一个整数），而得剩余 C_nB，当然 $C_nB<\frac{l}{10^n}$。可見 a 分为 m 个 $\frac{l}{10^n}$ 而有余，分为 $(m+1)$ 个 $\frac{l}{10^n}$ 却又不够。因此 $m\cdot\frac{l}{10^n}<a<(m+1)\cdot\frac{l}{10^n}$；就是 $\frac{m}{10^n}\cdot l<a<\frac{m+1}{10^n}l$。可見 a 的量数在 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$ 之間。又因 a 和 $\frac{m}{10^n}l$ 的差与 $\frac{m+1}{10^n}\cdot l$ 和 a 的差都小于 l 的 $\frac{1}{10^n}$，所以我們說 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$ 分别是精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的、a 的量数的不足和过剩近似值。

把綫段 a 的量数的不足和过剩近似值依照它們的精确度排列起来：

1、1.3、1.35、1.358、……

2、1.4、1.36、1.359，……

容易看出精确度越高，不足近似值逐步增加而过剩近似值逐次减少，因此兩个同精确度的过剩近似值与不足近似值的差越来越小。換句話說，在不斷提高精确度的过程中，它們越来越接近。

同时兩个同精确度的不足与过剩近似值的数字只有末一位不同（象 1.358、1.359）或者末了几位不同（如果 1.345999、1.346000 分别是精确到 $\frac{1}{10^6}$ 的，某綫段量数的不足和过剩近似值，那末它們末四位的数字就不同了。）如果在綫段 a 上，把截取 l、$\frac{l}{10}$、$\frac{l}{10^2}$、$\frac{l}{10^3}$，……$\frac{l}{10^n}$，……的过程無限地繼續下去，那末 a 的不足近似值逐次增加而成为一个無限小数。a 的过剩近似值逐次减少，也成为一个無限小数。这

时考虑一个無限小数的末一位或末几位就没有什么意义了。因此我們說这兩个無限小数有相同的数字，或者說它們就是同一个無限小数。这个無限小数不可能是循环的（因为所有的循环小数都可以化为分数也就表示 a 与 l 是有公度的綫段了）。我們把一个無限不循环小数叫做一个無理数。所以当 a 和 l 是無公度綫段时，a 的量数是一个無理数。

代数学里把有理数和無理数总称实数，因此我們最后的結論是：在确定了長度單位以后，对应于每一条綫段，总是存在着一个实数作为它的量数。

如果某一綫段的量数是無理数，那么只能用它的近似值来表示它的長度，象在每边都是一尺的正方形中，它的对角綫的長度的不足近似值是 1.414 尺，它的精确度是 $\frac{1}{1000}$ 尺。

用同一長度單位去度量兩条綫段就得兩个量数。这兩个量数之比，定义为这兩条綫段之比。例如用尺去量綫段 AB、CD 分别得量数 5 和 3，那末 $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}$。如果改用寸去量 AB、CD，那末所得的量数必然分别是 50 和 30，因而 $\frac{AB}{CD}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$。可見兩綫段之比不因長度單位的改变而改变。

如果綫段 a、b 的比等于綫段 c、d 的比即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末綫段 a、b、c、d 叫做**成比例的綫段**，a、d 叫做比例的外項，b、c 叫做比例的內項，d 叫做 a、b、c 的**第四比例項**。

如果綫段 a、b 之比等于綫段 b、c 之比，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那末綫段 b 叫做綫段 a、c 的**比例中項**。

兩綫段的比的概念和四条綫段成比例的概念是十分重要的。我們明确了这些概念以后才有条件来进一步研究几何圖形的性質。

第二章 綫段度量的应用

一 三角形的相似

挂在墙壁上的中华人民共和国的大地圖，和我們地理課本上的中华人民共和国地圖的形狀一样，只是大小不同。放大后的照相片和原照相片比較，風度不差絲毫，可是大小不同。我們通常把形狀一样，大小不同的圖形叫做相似的圖形。上面这些例子說明了在我們生活里，处处有相似圖形的实例，因此我們有研究相似圖形的必要。

要研究相似形的性質，首先要研究什么是相似形。我們打算从三角形說起，因为任意边数的多边形都可以划分成許多三角形。

相似三角形的定義 三角形的形状和大小决定于它的角和边。角和边分别对应相等的两个三角形是全等的三角形。如果在等边三角形各边上取中点，連結三个中点所成的三角形也是等边三角形。它和原三角形的形状相同，大小不同。如果在等腰直角三角形的两条直角边上取中点，以这两个中点和直角頂点为頂点的三角形也是等腰直角三角形。它和原三角形的形状相同，大小不同。在这两組三角形里，每一組的两个三角形的边和角有下面的关系：各对应角相等，各对应边之比都是 2:1。依据上面这两为例子，我們为相似三角形作出了比較精确的定义：

如果有两个三角形，它們的三只角分别对应相等，并且对应边（相等的角所对的边）成比例，这样的两个三角形叫做相似三角形。

在这一条定义里請注意对应边成比例这一点。我們知道，两綫段的比是用同一長度單位去量它們所得量数的比。如果我們还没有研究过綫段的度量問題，我們就無法定义两綫段的比，就更难理解相似三角形的定义了。

两个全等的三角形的各角对应相等，对应边之比是 1:1，所以全等三角形一定是相似的，而相似的三角形不一定全等。

相似三角形的存在 前面我們研究了两个等边三角形和两个等腰三角形，才提出了相似三角形的定义。在一般的三角形中有没有相似三角形存在呢？下面的定理回答了这个問題。

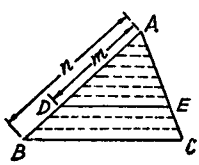
定理——平行于三角形的一边而和其他两边相交的直綫，截原三角形所得的三角形和原三角形相似。

已知：在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$（圖 6）。求証 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$。

証明：（i）在 $\triangle ADE$、$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$。$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$（同位角相等）。

（ii）再証：$AD:AB=AE:AC=DE:BC$

假定 AD 和 AB 有公度 d，



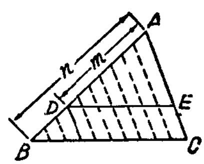


圖 6.

由第一章里公度的定义，应該 $AB=nd$，$AD=md$（这里 m，n 是两个整数）。AB 和 AD 可以分别分成 n 个和 m 个等分，每一个等分是 d。过每一个分点作直綫和 BC 平行，这些平行綫必定同时把 AC 和 AE 分别分为 n、m 等分（若干平行綫如在一直綫上截取相等的綫段，則在它直綫上所截取的綫段也必定相等）。再过 AB 和 AD 上每一分点作直綫和 AC 平行，这些平行綫必定同时把 BC 和 DE 分别分为 n、m 等分。因此 $AD:AB=AE:AC=DE:BC=m:n$。

假定 AD 和 AB 没有公度（圖 7）我們可以用 10^n 等分 AB 的方法来求这三个比的近似值。

先把 AB 分为 10 等分，过每一分点作平行于 BC 的直綫，这些直

綫互相平行也和 DE 平行；它們必定把 AC 也分为 10 等分。如果点 D 是在 AB 上的第 m_1 个和第 m_1+1 个分点之間(圖中 $m=7$)，那末点 E 一定也在 AC 上的第 m 个和第 $m+1$ 个分点之間。容易看出：

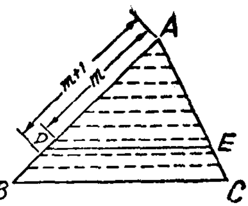


圖 7.

$$\frac{m_1}{10}<\frac{AD}{AB}<\frac{m_1+1}{10},\quad \frac{m_1}{10}<\frac{AE}{AC}<\frac{m_1+1}{10}。$$

如果把 AB 分为 100 等分，过每一分点作平行于 BC 的直綫，这些直綫互相平行也和 DE 平行；它們必定把 AC 也分为 100 等分。如果点 D 是在 AB 上的第 m_2 个和第 m_2+1 个分点之間，那末点 E 一定也是在 AC 上的第 m_2 个和第 m_2+1 个分点之間。例如 $m_2=74$，$m_2+1=75$。容易看出：

$$\frac{m_2}{100}<\frac{AD}{AB}<\frac{m_2+1}{100},\quad \frac{m_2}{100}<\frac{AE}{AC}<\frac{m_2+1}{100}。$$

如果把 AB 分为 1000 等分，过每一分点作平行于 BC 的直綫。假如 D 点是在 AB 上的第 m_3 和第 m_3+1 个分点之間，那末 E 点一定也在 AC 上第 m_3 和第 m_3+1 个分点之間。例如 $m_3=742$，$m_3+1=743$。容易看出：

$$\frac{m_3}{1000}<\frac{AD}{AB}<\frac{m_3+1}{1000},\quad \frac{m_3}{1000}<\frac{AE}{AC}<\frac{m_3+1}{1000}。$$

因为 AB 和 AD 是無公度的、我們把 AB 等分为 10000 分，100000 分……，D 点和任何一个分点总不会相重合。这样的划分，可以無限制地进行下去，每多分一次，所得到的比值 $\frac{m_k}{10^k}$，$\frac{m_k+1}{10^k}$ 和 $\frac{AD}{AB}$，$\frac{AE}{AC}$ 就愈接近。因此 $\frac{AD}{AB}$，$\frac{AE}{AC}$ 的正确值总可以用同一个無限小数来表示。如果精确度相同，$\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 兩个比的近似値总是相等的。我們說：$AD:AB=AE:AC$。

用同样的方法，可以証明 $AD:AB=DE:BC$。$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$。

相似性質的傳遞 我們知道，綫段相等的性質，角相等的性質，直綫和直綫平行的性質都是可以傳遞的。現在依据上述定义来說明，三角形相似的性質也是可以傳遞的。例如，已知：$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$；$\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle A_3B_3C_3$；求証：$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_3B_3C_3$（圖 8）。

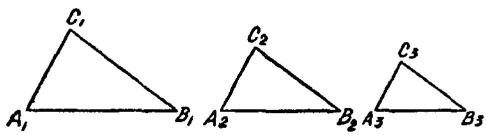


圖 8.

証明：（i）$\angle A_1=\angle A_2$，$\angle A_2=\angle A_3$（已知），故 $\angle A_1=\angle A_3$；

$\angle B_1=\angle B_2$，$\angle B_2=\angle B_3$（已知），故 $\angle B_1=\angle B_3$；

$\angle C_1=\angle C_2$，$\angle C_2=\angle C_3$（已知），故 $\angle C_1=\angle C_3$。

（ii）$\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}=\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}=\dfrac{C_1A_1}{C_2A_2}$，$\dfrac{A_2B_2}{A_3B_3}=\dfrac{B_2C_2}{B_3C_3}=\dfrac{C_2A_2}{C_3A_3}$（已知）兩式相乘

便得：$\dfrac{A_1B_1}{A_3B_3}=\dfrac{B_1C_1}{B_3C_3}=\dfrac{C_1A_1}{C_3A_3}$。

可見 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_3B_3C_3$ 的对应角相等，对应边成比例，$\therefore A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_3B_3C_3$。

相似三角形的判定 前面已經証明了相似三角形存在的定理，但是在一般情况下，兩个三角形的相互位置不像这一定理所規定的一样（一个頂点重合，兩双对应边各在同一直綫上，第三双边平行），因此我們还得找出一些比較簡單而且适用的判別方法（判定定理）来。这些三角形相似的判定定理是：

定理一：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$；那末 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

定理二：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$AB:A'B'=AC:A'C'$；那末 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

定理三：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB:A'B'=BC:B'C'=AC:$