

21 世纪高等学校电子信息类教材

信号检测与估计

(第二版)

● 张明友 吕 明 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

21 世纪高等学校电子信息类教材

信号检测与估计

(第二版)

张明友 吕 明 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

信号检测与估计是现代信息理论的一个重要分支。本书系统地讲述了信号检测与估计的理论及其应用。首先介绍统计接收中信号检测与估计的基本理论;然后分别讨论高斯白噪声和高斯色噪声中信号的检测;接着介绍了序列检测、非参量检测和 Robust 检测以及雷达中信号检测的过程;最后分别讲述了信号参量估计和波形估计,这些内容均属于现代检测与估计理论的范畴。

本书为工科电子信息类专业信号检测与估计的导论性教材,取材注意结构的完整性和内容的典型性,注意理论联系实际和新概念、新理论的介绍,深入浅出,易于读者学习。

本书可供电子与通信学科各专业的研究生和高年级本科生使用,也可供从事电子与通信技术的广大科技人员做参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计/张明友,吕明编著. —2 版. —北京:电子工业出版社,2005.2

21 世纪高等学校电子信息类教材

ISBN 7-121-00664-2

I. 信… II. ①张…②吕… III. ①信号检测—高等学校—教材②参考估计—高等学校—教材

IV. TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 130158 号

责任编辑:陈晓莉 特约编辑:李双庆

印 刷:北京牛山世兴印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:20 字数:512 千字

印 次:2005 年 2 月第 1 次印刷

印 数:5 000 册 定价:28.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言

目前信息科技的迅猛发展已成为世界科技变革发生和发展的驱动力量。在雷达、通信、声呐、遥控遥测、图像处理、自动控制等各种各样的应用信息系统中,信息传输的可靠性和真实性已经成为核心问题。我们知道,在信息的传输与交换过程中,都是通过信号这一物理实体来实现的。信号是信息的载荷者、传送者。在信号产生和传输的过程中,必然受到各种干扰因素的影响,因而必须加以处理,才能提供给信息接收者使用。由于被传输的信号本身和各种干扰往往具有随机性,信号处理设备必须进行统计分析,而这个统计分析的基本任务是检测信号(即判定某种信号是否存在)和估计携带信息的信号参量,这正是本教材研究的对象。由此可知,信号检测与估计理论就是信号处理的统计理论,所要解决的问题是信息传输系统的基本问题,因而具有广泛的应用性。

本教材是“信号检测与估计”的研究生课程教材,也适用于通信、电子工程等有关学科的本科高年级学生使用。在内容上,着重基本概念和基本方法的阐述,并尽量结合通信与雷达方面的应用实例,以便加深对问题的理解。当然,信号检测与估计的基本方法,同样适用于语音处理、图像处理、模式识别、生物工程,以及气象、天文信号处理等学科,因此本教材对这类专业的学生也有参考价值。

本教材是在 1994 年我们所编《信号检测与估计》(高等专科学校电子工科电子类规划教材)原书的基础上加以修改和增订而成的。全书共分 9 章和两个附录。

第 1 章是统计接收中信号检测与估计的基本理论。本章讨论检测与估计的基本概念。由于检测与估计两个问题是密切相关的,所以我们先将两者的基本概念和基本理论共同放在第 1 章中进行讨论。

第 2 章是高斯信道中确知信号的检测。本章把第 1 章所讨论的信号检测理论应用于高斯白噪声背景下的信号检测这一经典问题,重点讨论二元信号检测。由于这方面的信号检测的研究最为完善,其推导比较简单,便于由此掌握检测理论的基本方法,故从这里入手是理所当然的。

第 3 章是高斯色噪声中的信号检测。本章是在第 2 章讨论的加性高斯白噪声背景下的信号检测的基础上,拓展到高斯色噪声情况下信号的检测,并介绍了一种基于相关函数的最佳变换——卡亨南—洛维展开,用于讨论在高斯色噪声中的检测。

第 4 章是序列检测。本章是针对固定样本检测的缺点提出来的。与固定样本检测相比,序列检测的突出优点是高样本效率,特别适用于雷达检测。

第 5 章是非参量检测。前几章讨论的参量检测大体上是以前高斯分布的干扰为基础研究出来的,它要求完全掌握接收环境的统计特性,显得很苛刻。一旦环境改变,其检测性能将明显恶化。本章讨论的非参量检测则不要求精确知道输入数据的统计特性。它的特点是适应性强,对各类干扰其性能都比较好,尤其恒虚警率处理器性能比较好。其实质就是把未知统计特性(概率密度分布)的干扰变成概率密度函数已知的干扰。

第 6 章是稳健(Robust)检测。本章的基本思想是寻找一个根据某种性能标准的最不利分布函数,然后针对这一最不利密度函数,用参量检测法按照某一准则设计一种局部最佳检测器。其性能优于非参量检测,但比参量检测差一些。

第7章是雷达中信号检测的过程。本章主要介绍接收机中检测是否有信号存在的过程。其中介绍了多脉冲积累和恒虚警率(CFAR)处理器。从而避免了将这两部分内容单独列出两章来讨论,本章的另一个目的是将信号检测的概念与实际应用联系起来,以便加深对检测理论的理解。

第8章是信号参量估计。本章与信号检测不同,它的功能是要从接收到的含噪声信号中尽可能正确地提取随机参量或未知参量。本章以随机信号幅度、相位、频率和时延的估计为例,分析计算在白色高斯信道中参量信号估计的方法以及实现不同算法的估计器,并且以同时估计频率和时延为例,介绍了多参量估计法。

第9章是波形估计。第8章中讨论的信号参量估计,是假定信号参量在观测时间内是不变的。但在许多实际问题中信号参量本身就是一个随机过程,因此要估计的是信号波形。本章可以看做是第8章中参量估计问题的进一步深入和发展,此时,待估计量不再是单个或数个参量,而是一个或多个时间函数。例如,模拟通信系统的任务,是要在干扰背景下最佳地估计发送端的波形,而雷达数据处理系统,是要根据带有测量误差的目标点迹数据来估计目标的航迹,它们都属于波形估计问题。功率谱估计是参量估计理论应用的一个重要而典型的方面,本来应当是本教材的一个重要内容,但考虑到大多数作者把这一内容纳入“数字信号处理”课程中,因而本教材不再涉及。

采用本教材进行教学时,有两种方案可供选择。其一,作为研究生课程,可用60学时左右讲完本书内容;其二,作为本科生选修课程,可用40学时左右讲授前三章以及第8章的前三节和第9章的前两节。编写过程中,我们已做了适当安排,使得这样取舍不至于产生任何衔接问题。

学习本教材的读者,需要有“概率论”、“信号与系统”和“随机信号分析”等课程的基础。考虑到诸如工程硕士生班和非电子信息类等读者的需要,我们在附录A和附录B中分别列出针对本书所需的“随机信号分析概述”和“弗雷德霍姆积分方程解”两部分内容。以便更有助于本教材的学习,为了使理论较紧密地联系实际,在各章末都附有习题。

谨以本书献给今年刚病故的向敬成教授。他曾多次提出要改编原合编的《信号检测与估计》一书,由于大家的教学和科研很忙,迟迟没有动笔,这次本书改编出版还了他一个心愿。

本书除第6章由吕明副教授增编外,其余各章及附录均由张明友教授改编而成。除向敬成教授之外,原书合编者中王意青和毛自灿两位教授,退休后,一位赴国外子女处居住,另一位不愿再动笔劳神,因此未参与本书的改编。在本书出版之际,谨向他们深表谢意,感谢他们在1990年和1994年两次共同出版该统编教材中付出的辛勤劳动。另外,还要感谢电子科大电子工程学院夏铁骑、张伟博士研究生和郑小亮、黄莉、陈明燕、扈晓、谢京华、谢代华等硕士研究生为本教材做了校正。

由于作者水平所限,错误和不当之处在所难免,真诚地希望读者给予批评和指正。

编 者

2004年5月于电子科技大学

目 录

第 1 章 统计接收中信号检测与估计的基本理论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 简单的实例	(1)
1.3 双择检测及其最佳准则	(6)
1.3.1 贝叶斯准则	(7)
1.3.2 最小错误概率准则和最大后验概率准则	(8)
1.3.3 极大极小化准则	(11)
1.3.4 纽曼—皮尔逊准则	(12)
1.4 多元信号检测及其最佳准则	(14)
1.5 随机参量信号的检测	(17)
1.5.1 贝叶斯准则	(18)
1.5.2 纽曼—皮尔逊准则	(19)
1.6 误差的定义和分类	(21)
1.7 信号参量估计的性能	(22)
1.7.1 无偏性	(23)
1.7.2 一致性	(23)
1.7.3 充分性	(23)
1.7.4 优效性	(24)
1.7.5 克拉美—罗不等式	(24)
1.8 信号参量估计基本理论	(27)
1.8.1 经典估计	(27)
1.8.2 贝叶斯估计	(29)
1.8.3 最大后验估计	(32)
1.8.4 最大似然估计	(34)
1.8.5 极大极小化估计	(37)
1.8.6 线性均方估计	(38)
1.8.7 最小二乘估计	(39)
1.8.8 加权最小二乘估计	(41)
1.8.9 递推估计	(41)
1.9 区间估计	(42)
1.9.1 置信区间	(43)
1.9.2 单个母体的区间估计	(43)
本章小结	(45)
习题一	(46)
参考文献	(48)
第 2 章 高斯信道中确知信号的检测	(50)
2.1 概述	(50)
2.2 高斯白噪声下确知信号的检测	(52)

2.2.1	二元通信系统	(52)
2.2.2	在白色高斯信道中的一次观测结果	(52)
2.2.3	在白噪声信道中多次观测结果	(54)
2.2.4	最佳系统的检测性能	(61)
2.2.5	相干雷达系统	(64)
2.3	匹配滤波器理论	(66)
2.3.1	概述	(66)
2.3.2	线性滤波器的一种最佳准则——信噪比最大准则	(66)
2.3.3	白噪声背景下的匹配滤波器	(68)
2.3.4	色噪声背景下确知信号的匹配滤波器	(72)
2.3.5	匹配滤波器的有关性质	(74)
2.3.6	时变匹配滤波器	(75)
2.4	随机参量信号的检测	(76)
2.4.1	随机相位信号的检测	(78)
2.4.2	随机振幅信号的检测	(83)
2.4.3	随机相位和振幅信号的检测	(84)
2.4.4	随机频率信号的检测	(86)
2.4.5	随机到达时间信号的检测	(90)
2.5	信号的多脉冲检测	(91)
2.5.1	确知脉冲串信号的检测	(92)
2.5.2	随机相位脉冲串(非相干脉冲串)信号的检测	(94)
2.5.3	随机振幅随机相位脉冲串信号的检测	(98)
	本章小结	(99)
	习题二	(100)
	参考文献	(103)
第3章	高斯色噪声中的信号检测	(105)
3.1	概述	(105)
3.2	基于相关函数的一种最佳变换——K-L 展开	(105)
3.2.1	连续随机信号的 K-L 展开	(105)
3.2.2	离散随机信号的 K-L 展开	(109)
3.2.3	K-L 展开是最小均方误差意义下的一种最佳变换	(111)
3.3	平稳高斯色噪声中确知信号的检测	(112)
3.3.1	似然比计算和最佳处理器	(113)
3.3.2	检测系统性能	(116)
3.4	随机相位信号的检测	(118)
	本章小结	(122)
	习题三	(123)
	参考文献	(125)
第4章	序列检测	(127)
4.1	概述	(127)
4.2	瓦尔特序列检测	(128)
4.3	序列检测与固定样本检测的比较	(132)

本章小结	(134)
习题四	(135)
参考文献	(136)
第 5 章 非参量检测	(137)
5.1 概述	(137)
5.2 非参量检测原理	(139)
5.2.1 定义和术语	(139)
5.2.2 基本非参量检测器	(143)
5.2.3 几种不同类型的秩检测器	(151)
本章小结	(153)
习题五	(153)
参考文献	(154)
第 6 章 稳健(Robust)检测	(156)
6.1 概述	(156)
6.2 混合模型的 Robust 假设检测	(156)
6.2.1 Robust 似然比检验	(157)
6.2.2 有限样本 Robust 检测器	(160)
6.3 确知弱信号的渐近 Robust 检测	(162)
6.3.1 非线性相关检测器(NC 检测器)——局部最佳检测器	(162)
6.3.2 M 检测器	(164)
本章小结	(166)
习题六	(167)
参考文献	(167)
第 7 章 雷达中信号检测的过程	(168)
7.1 概述	(168)
7.2 单样本检测	(168)
7.2.1 对一个数据样本设定门限	(168)
7.2.2 单样本检测的检测概率	(169)
7.2.3 单样本检测的例子	(170)
7.3 多样本检测	(172)
7.3.1 基于多个数据样本点的检测	(172)
7.3.2 多样本检测方案(表决法)	(173)
7.3.3 多样本(表决法)检测的例子	(174)
7.3.4 基于取总和的多样本检测	(175)
7.3.5 N 个样本检测的例子(总和法)	(176)
7.4 多脉冲积累	(176)
7.4.1 积累方法简述	(176)
7.4.2 二进制积累器	(178)
7.5 两种实用的二进制检测器	(181)
7.5.1 指向检测器	(181)
7.5.2 滑窗检测器	(182)
7.6 自动检测概述	(184)

7.6.1 概述	(184)
7.6.2 恒虚警率处理器的组成及处理方法	(185)
本章小结	(194)
习题七	(194)
参考文献	(194)
第8章 信号参量估计	(195)
8.1 概述	(195)
8.2 在白色高斯信道中单参量信号估计	(196)
8.2.1 信号幅度估计	(197)
8.2.2 信号相位估计	(200)
8.2.3 信号频率估计	(202)
8.2.4 信号时延估计	(204)
8.3 多个信号参量的同时估计	(211)
8.3.1 估计方法	(211)
8.3.2 估计性能	(212)
8.4 高斯色噪声情况下的估计简介	(214)
8.4.1 非随机相位信号	(214)
8.4.2 随机相位信号	(217)
本章小结	(218)
习题八	(219)
参考文献	(220)
第9章 波形估计	(222)
9.1 概述	(222)
9.2 维纳滤波	(223)
9.2.1 非因果解	(225)
9.2.2 因果解(频谱因式分解法)	(227)
9.2.3 正交性	(231)
9.2.4 离散观测情况	(232)
9.2.5 平稳序列的因果和非因果维纳滤波器	(233)
9.3 平稳序列的维纳预测器	(239)
9.3.1 预测器计算公式	(239)
9.3.2 离散因果和非因果平稳序列维纳预测器	(240)
9.4 标量卡尔曼滤波	(242)
9.4.1 概述	(242)
9.4.2 标量信号模型和观测模型	(243)
9.4.3 标量卡尔曼滤波算法	(244)
9.5 标量卡尔曼预测	(249)
9.6 矢量信号模型和观测模型	(251)
9.7 矢量卡尔曼滤波	(255)
9.7.1 从标量运算向矢量运算的过渡	(255)
9.7.2 矢量卡尔曼滤波算法	(256)
9.7.3 矢量卡尔曼滤波器的实现	(256)

9.8	矢量卡尔曼预测	(258)
9.9	用于雷达跟踪的卡尔曼滤波算法	(259)
9.10	常增益滤波方法	(264)
9.10.1	α - β 滤波	(264)
9.10.2	α - β - γ 滤波	(266)
	本章小结	(268)
	习题九	(269)
	参考文献	(272)
附录 A	随机信号分析概述	(273)
A.1	引言	(273)
A.2	随机变量及其概率分布	(274)
A.2.1	随机变量的分布函数	(274)
A.2.2	连续型随机变量的概率密度函数	(275)
A.2.3	两个随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数	(278)
A.2.4	条件分布函数和条件概率密度函数	(279)
A.3	随机变量的统计特性	(280)
A.3.1	单个随机变量的矩	(280)
A.3.2	随机变量的联合矩	(281)
A.4	随机过程	(283)
A.4.1	随机过程的数字特征	(283)
A.4.2	平稳随机过程的相关函数的特性	(284)
A.4.3	功率谱密度与相关函数的关系	(286)
A.4.4	两个随机过程的互谱密度	(286)
A.5	希尔伯特(Hilbert)变换	(287)
A.6	窄带随机过程	(288)
A.6.1	窄带信号的表达式	(288)
A.6.2	窄带随机过程的表达式	(289)
A.6.3	窄带平稳随机过程的相关函数	(289)
A.6.4	窄带高斯过程包络和相位的一维分布	(290)
A.6.5	窄带高斯过程包络和相位的二维分布	(291)
A.7	窄带高斯噪声加正弦信号的包络和相位分布	(294)
A.7.1	基本关系式	(294)
A.7.2	包络的概率密度函数	(295)
A.7.3	相位的概率密度函数	(295)
A.8	窄带高斯过程包络平方的分布	(297)
A.8.1	窄带噪声包络平方的分布	(297)
A.8.2	正弦型信号加窄带高斯噪声包络平方的分布	(298)
A.9	χ^2 分布及非中心 χ^2 分布	(298)
A.9.1	χ^2 分布	(298)
A.9.2	非中心 χ^2 分布	(300)
	参考文献	(302)
附录 B	弗雷德霍姆积分方程的解	(303)

B.1	第一类弗雷德霍姆积分方程的形式解	(303)
B.2	有理核的第一类弗雷德霍姆的积分方程的解	(304)
B.3	有理核的第二类弗雷德霍姆积分方程的解	(307)
B.4	有理核的弗雷德霍姆齐次积分方程的解	(308)
参考文献		(309)

第 1 章 统计接收中信号检测与估计的基本理论

1.1 引言

自然界和人类社会中信息的传输与交换,都是通过信号这一物理实体来完成的。信号是信息的载荷者、传送者。在信号产生和传输的过程中,必然受到各种干扰因素的影响,因而必须加以处理,才能提供给信息接收者使用。由于被传输的信号本身和各种干扰往往具有随机性,信号处理设备必须进行统计分析,而这个统计分析的基本任务是检测信号(即判定某种信号是否存在)和估计携带信息的信号参量。由此可知,信号检测与估计理论就是信号处理的统计理论,所要解决的问题是信息传输系统的基本问题,因而具有广泛的应用。

任何一个信息传输系统(即广义的通信系统),可以用香农(Shannon)提出的模型表示,如图 1.1 所示。在信息发送端,信息或消息通过变换和编码,这包括表示信息的物理量和数学格式的变换,再调制到信号源上,从而形成传输的信号。由于信道常常具有色散性,故调制过程本质上是使所传输的信号具有窄带性质,并与信道相匹配。信道不仅不可避免地要引入干扰,还会对信息产生畸变,因而在接收端输入的是被“污染”了的信号。信号处理设备的任务,是要最大限度地从接收信号中提取信息源的信息,以供信息接收者使用。

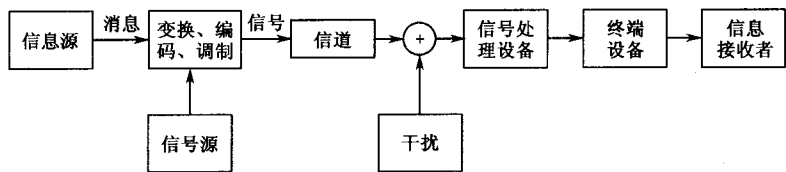


图 1.1 信息传输系统的香农模型

香农模型是一个高度概括的信息传输模型,通信系统、遥测系统、遥感系统、生物信息传输系统都可以看做它的特例。

信号接收问题所研究的主要问题,就是如何从接收到的信号与噪声的混合体中取得信息。其中能获得最大信息量的接收机就是最佳接收机。

本章中,我们将从信息论的基本观点及统计判决的观点来研究信号的接收问题。首先导出目前常用的各种统计判决准则,然后讨论信号检测与信号估计的基本理论。

1.2 简单的实例

通信与测量系统的基本任务是在噪声背景下检测信号的存在,并估计信号的参量。在统计学上,都是属于统计决策问题,我们希望所做出的判决,平均看来引起的信息损失最小。本节中先研究统计判决的简单实例。

首先,用 s 表示传输系统发送端的真实状态,即信号空间的元素。它可能表示信号的存在与否,例如,数字通信系统中一个特殊的码元,雷达目标的距离或电话的波形等。对于检测问

题, s 可能有 n 个状态, 用 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 表示。对于参量估计问题, s 一般有无限多个状态, 例如, 一个实数区间 $[a, b]$ 。为了讨论方便起见, 我们先假定 s 仅有 n 个状态, 且每个状态发生的概率为 $P(s_i)$, 称为先验概率。

类似地, 用 x 表示观测结果, 即输入空间的元素。由于信道存在噪声干扰, x 与 s 一般是不同的。设 x 有 m 种状态, 表示为 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 。由于噪声的随机性, m 应为无限个, 但为方便起见, 暂时假定 m 是有限的。定义 $P_{ij} = P(x_i | s_j)$, 它表示发送端状态为 s_j 条件下观测结果为 x_i 的概率。于是得到如下条件概率矩阵:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-1)$$

为了完整描述判决过程, 还需了解由于判决错误所引入的损失。我们用 d_k 表示认定发送端为 s_k 的判决, 即判决空间 D 的元素, 用 c_{ki} 表示当 s_i 为真而判决为 d_k 引入的损失或代价。于是得到如下损失矩阵(或称为代价矩阵):

$$\begin{matrix} & d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-2)$$

统计判决的实质, 是寻求一种最佳的判决规则 $\{d_k\}$, 使决策引入的平均代价达到极小, 这种决策过程称为贝叶斯(Bayes)判决。给定式(1-1)和式(1-2)中的两个矩阵及先验概率, 即可求出最佳判决规则, 具体求解方法将在下面讨论。

【例 1.1】 当发送端真实状态仅有两种时, 即 $s_1: s(t) = s_1(t)$ 和 $s_0: s(t) = s_0(t)$, 则统计判决问题变为双择检测问题。例如, 二元数字通信中码元的检测, 雷达中对特定距离单元判定信号的存在与否, 都是双择检测的实例, 此时, 最佳接收机的任务, 是根据输入信号 $x(t)$, 判定 $s_1(t)$ 或 $s_0(t)$ 哪一个存在。在统计学上, 这相当于判决两个假设 H_1 和 H_0 之一为真的问题, 这两个假设表示为

$$\left. \begin{aligned} H_0: x(t) &= s_0(t) + n(t) \\ H_1: x(t) &= s_1(t) + n(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

由此可知, 在双择检测问题中, s 的两种状态可理解为两种假设, 假设 H_1 对应于发送端状态为 s_1 , 假设 H_0 对应于发送端状态为 s_0 。于是, 双择检测问题实质上就是二元假设检验问题。与一般决策问题的符号相同, d_1 表示做出假设 H_1 为真的判决, d_0 表示做出假设 H_0 为真的判决。假定观测结果 x 仅有 m 种状态, 即 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 。于是, 在双择检测情况下, 条件概率矩阵式(1-1)变为

$$\begin{matrix} s & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{10} & p_{20} & \cdots & p_{m0} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-4)$$

代价矩阵式(1-2)变为

$$\begin{array}{cc} d_1 & d_0 \\ H_1 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{01} \\ c_{10} & c_{00} \end{bmatrix} \\ H_0 & \end{array} \quad (1-5)$$

如果已知接收端输入为 x_i , 而做出的判决为 d_1 , 则平均代价显然为

$$r(d_1|x_i) = c_{11}P(H_1|x_i) + c_{10}P(H_0|x_i) \quad (1-6)$$

式中, 根据贝叶斯定理有

$$P(H_j|x_i) = \frac{p(x_i|H_j)P(H_j)}{\sum_k P(H_k)p(x_i|H_k)} \quad (1-7)$$

注意, 式(1-7)中 $P(H_j)$ 为假设 H_j 发生的先验概率, $P(H_j|x_i)$ 称为 x_i 已知条件下 H_j 发生的后验概率。同样, 如果做出的判决为 d_0 , 则平均代价为

$$r(d_0|x_i) = c_{01}P(H_1|x_i) + c_{00}P(H_0|x_i) \quad (1-8)$$

上面两式中, $r(d_0|x_i)$ 与 $r(d_1|x_i)$ 表示已知输入 x_i 条件下, 判决为 d_0 与 d_1 的平均代价 (也称为条件代价), 贝叶斯准则要求总平均代价即平均风险达到最小, 总平均代价定义为上述条件代价对所有 x_i 再平均。显然, 只要每次判决都根据低的条件代价给出, 即对于特定输入 x_i , 如 $r(d_1|x_i) \leq r(d_0|x_i)$, 判为 d_1 ; 如 $r(d_1|x_i) > r(d_0|x_i)$, 判为 d_0 , 则总能保证平均风险为最小。

应用式(1-6)~式(1-8)可以证明, $r(d_1|x_i) \leq r(d_0|x_i)$ 等效于

$$\Lambda \triangleq \frac{p(x_i|H_1)}{p(x_i|H_0)} \geq \frac{P(H_0)c_{10} - c_{00}}{P(H_1)c_{01} - c_{11}} \triangleq \Lambda_0 \quad (1-9)$$

式中, Λ 为假设 H_1 和 H_0 成立的条件下, 接收端为 x_i 的条件概率之比, 简称似然比。于是, 判决过程变为求出特定输入的似然比, 然后与一门限 Λ_0 比较。如果 Λ 大于或等于 Λ_0 , 判决假设 H_1 为真, 反之, 则判假设 H_0 为真。 Λ_0 值由代价矩阵式(1-5)及两种假设的先验概率决定。对于 x_i 仅有 m 种可能值的情况, Λ 由条件概率矩阵式(1-4)给出的 p_{i1} 和 p_{i0} 之比得到。

【例 1.2】 作为双择检测问题的特例, 现在研究在加性噪声背景下测量只能为 1V 或 0V 的直流电压。这类似于二进制信号通过有噪声的信道后的检测问题。假定加性噪声 $n(t)$ 服从均值为零、方差为 σ^2 的正态分布。此时, 两个假设为

$$H_0: x(t) = n(t)$$

$$H_1: x(t) = 1 + n(t)$$

如果我们仅根据 $x(t)$ 的一次测量值 x 做出判决, 这意味着输入空间是一维的。即使这样, x 的可能取值也是无限多个, 不能简单应用例 1.1 的结果。此时, 式(1-4)的条件概率矩阵应改为条件概率密度函数, 如

$$\begin{array}{cc} s & x \\ H_1 & \begin{bmatrix} p(x|H_1) \\ p(x|H_0) \end{bmatrix} \\ H_0 & \end{array} \quad (1-10)$$

假设 H_1 出现的先验概率为 $P(H_1)=P$, H_0 出现的先验概率为 $P(H_0)=Q$ 。由于已知噪声统计特性为高斯分布, 因而式(1-10)中两种条件概率密度函数易于求出, 并示于图 1.2 中。图中

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-1)^2/(2\sigma^2)]$$

当假设 H_0 为真而判决为 d_1 , 即本来无信号而判为有信号, 称为虚警。虚警发生的概率表示为 $P(D_1|H_0)$, 虚警引入的损失称为虚警代价, 记为 c_f 。当假设 H_1 为真而判决为 d_0 , 即当有信号时判为无信号, 称为漏报。漏报概率表示为 $P(D_0|H_1)$, 漏报引入的损失称为漏报代价, 记为 c_m 。如果认为正确的判决没有损失, 则代价矩阵式(1-5)可写为

$$\begin{array}{cc} & d_1 & d_0 \\ \begin{array}{c} H_1 \\ H_0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & c_m \\ c_f & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1-11)$$

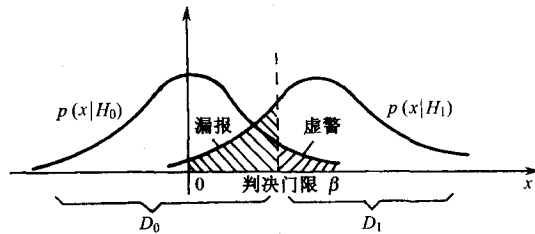


图 1.2 例 1.2 中的条件概率密度函数及虚警和漏报概率图示

根据与例 1.1 相同的思路, 如果已接收到 x , 选择假设 H_1 的条件代价为

$$r(d_1|x) = 0 \cdot P(H_1|x) + c_f P(H_0|x) \quad (1-12)$$

显然, 上式是 x 的函数。同样, 选择假设 H_0 的条件代价为

$$r(d_0|x) = c_m P(H_1|x) + 0 \cdot P(H_0|x) \quad (1-13)$$

判决的平均风险 $\bar{R}$ 应当等于上述条件代价对所有 x 再平均。自然, 如果对每个 x 值, 都选择 $r(d_1|x)$ 和 $r(d_0|x)$ 中之较小值作为判决标准, 就能保证平均风险达到最小。

由于 x 不是离散的随机变量, 贝叶斯定理式(1-7)可写为

$$P(H_i|x) = \frac{P(H_i)p(x|H_i)dx}{\sum_k P(H_k)p(x|H_k)dx} \quad (1-14)$$

式中, $p(x|H_i)dx$ 为假设 H_i 条件下, x 处于区间 $[x, x+dx]$ 内的概率。显然, 如果 $p(x|H_i)$ 为有限值且连续(后一项并不是必要条件), 上式分子分母中的 dx 可以消去。

应用与例 1.1 相似的步骤, 可以证明: $r(d_1|x) \leq r(d_0|x)$ 等效于

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} = \frac{Qc_f}{Pc_m} \triangleq \Lambda_0 \quad (1-15)$$

式中, $\Lambda(x)$ 为似然比, Λ_0 为似然比门限。如 $\Lambda(x) \geq \Lambda_0$, 判 H_1 为真; 反之, 判 H_0 为真。

对于本例的情况, $\Lambda(x)$ 极易计算。因为

$$\begin{aligned} p(x|H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] \\ p(x|H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-1)^2/(2\sigma^2)] \end{aligned}$$

则根据式(1-15)有

$$\Lambda(x) = \exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \quad (1-16)$$

于是, 判决规则变为: 如果

$$\exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \geq \Lambda_0$$

则判为有信号, 否则判为无信号。这一判决规则可写为下列常见形式

$$\exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (1-17)$$

上式经简单运算得

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \Lambda_0 \triangleq \beta \quad (1-18)$$

式(1-16)~式(1-18)画成图形示于图 1.3。该图表明,对于这个例子,贝叶斯判决变成将测量值 x 本身直接与门限 β 比较。如 $x \geq \beta$,即在区域 D_1 判决有信号;反之,如果 $x < \beta$,即在区域 D_0 判决无信号。从本例可以看出,双择检测的实质是对输入空间进行对分,即划分成 D_1 和 D_0 两个区域,当 $x \in D_1$ 或 $x \in D_0$ 时,分别做出 d_1 或 d_0 的判决。贝叶斯准则给出了这种划分的原则:使平均风险达到极小。

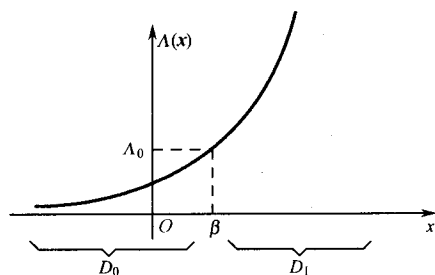


图 1.3 例 1.2 中的似然比图形

根据图 1.2 和图 1.3,极易计算虚警概率和漏报概率

$$\left. \begin{aligned} P(D_1|H_0) &= \int_{D_1} p(x|H_0) dx \\ P(D_0|H_1) &= \int_{D_0} p(x|H_1) dx \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

在假设 H_0 或 H_1 为真的条件下判决为 d_1 或 d_0 所引入的平均代价也可称为条件代价,用 r_0 和 r_1 表示

$$r_0 = c_{10}P(D_1|H_0) = c_f P(D_1|H_0) \quad (1-20a)$$

$$r_1 = c_{01}P(D_0|H_1) = c_m P(D_0|H_1) \quad (1-20b)$$

但它们不同于式(1-6)和式(1-8)所定义的条件代价 $r(d_1|x_i)$ 和 $r(d_0|x_i)$,后者以已知 x_i 为条件,而 r_0 和 r_1 则分别以已知 H_0 和 H_1 是真为条件。于是,平均风险也可表示为条件代价 r_0 和 r_1 对先验概率再平均

$$\bar{R} = Pr_1 + Qr_0 \quad (1-21)$$

贝叶斯准则就是使上式的平均风险 $\bar{R}$ 达到极小的检测准则。这里要说明一点:利用两种条件代价表达式都可以得到相同的平均风险 $\bar{R}$ 。究竟选用哪一种,视解决问题方便与否而定。

【例 1.3】 在例 1.2 中,虽然式(1-1)矩阵中的观测状态 x_i 有无限多个,但发送端真实状态 s_i 的数目为 2,因而是双择检测问题。但在很多情况下, s_i 可能有 m 个状态,例如,发送端可能发送 m 个不同的字母,或者 m 个可能的码字,这相当于信号空间有 m 个元素。这样的问题便属于多择检测或称为多元假设检验问题。

如果发送端真实状态 s 和对它的判决 d 都是不可数无限多个,即信号空间与判决空间都有不可数无限多个元素,则问题变为参量估计问题。此时,发送端的信号可取决于在一个区间内取值的参量 α ,因而信号可表示为 $s(t, \alpha)$ 。例如, α 可表示雷达目标的距离,它可以取雷达威力区内的任意值。关于参量估计问题,将在本章最后一节详细讨论。现仅用本例说明参量估计与检测问题之间的紧密关系。

本例仍然讨论例 1.2 中在噪声背景下测量直流电压的问题,但被测电压 α 不再只取两个数值,而是具有某一概率密度函数 $p(\alpha)$ 的随机变量,因而可以在某个区间上取任意数值。为简单起见,本例中假定 $p(\alpha)$ 为零均值,方差为 β^2 的高斯分布。与例 1.2 一样,设背景噪声的分

布仍是零均值,方差为 σ^2 的高斯分布,则 α 已知条件下 x 的条件概率密度函数 $p(x|\alpha)$ 可写为

$$p(x|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-\alpha)^2/(2\sigma^2)] \quad (1-22)$$

关于代价,由于 α 不再仅取离散值,因而用式(1-2)的代价矩阵来指定代价不再适用。此时,不仅 α 可取不可数无限多个数值,而且 d 也可取不可数无限多个数值。为方便起见,用 $\hat{\alpha}$ 表示对 α 的估计值, $\hat{\alpha}$ 实际上是对 α 做出的判决,相当于检测情况下的 d_i 。于是,代价只能用 α 和 $\hat{\alpha}$ 的一个函数来表示。这个问题将在后面详细讨论。现在我们暂时选用误差 $(\alpha - \hat{\alpha})$ 的平方来表示代价函数,即 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$ 。这样做的合理性在于,估计误差越大,代价越大,而且是以平方关系随误差增大。

根据条件概率乘法公式,在已得到观测值 x 的条件下, α 的后验概率密度函数为

$$p(\alpha|x) = \frac{p(\alpha)p(x|\alpha)}{p(x)} = \frac{1}{2\pi\beta\sigma p(x)} \exp[-\alpha^2/(2\beta^2)] \exp[-(x-\alpha)^2/(2\sigma^2)] \quad (1-23)$$

式中, $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\alpha)p(\alpha)d\alpha$, 它与 α 无关。式(1-23)经过简单运算,可得

$$p(\alpha|x) = \text{常数} \cdot \exp[-(\alpha - cx)^2/(2c\sigma^2)] \quad (1-24)$$

式中, $c = \beta^2/(\beta^2 + \sigma^2)$ 。于是,在观测值 x 已知条件下,将 α 判决为 $\hat{\alpha}$ 的条件代价为

$$R(\hat{\alpha}|x) = E_{\alpha}(\alpha - \hat{\alpha})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha|x) d\alpha$$

以总平均代价,即平均风险为条件代价 $R(\hat{\alpha}|x)$ 对所有可能的 x 再平均,即

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_{|x|} R(\hat{\alpha}|x) p(x) dx \\ &= \int_{|x|} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha|x) p(x) d\alpha dx \end{aligned} \quad (1-25)$$

α 的最佳估计 $\hat{\alpha}$ 应使式(1-25)的平均风险为最小,由此出发即可解出 $\hat{\alpha}$ 。这种使平均风险 $\bar{R}$ 达到最小的估计称为贝叶斯估计。其具体解法将在后面详细讨论。

1.3 双择检测及其最佳准则

现在来集中研究判决理论的最简单情况——双择检测问题。此时,信息发送端只有两种状态,对应于两种假设 H_1 和 H_0 ,如式(1-3)所示。在数字通信中, $s_1(t)$ 可能代表“1”码的波形, $s_0(t)$ 代表“0”码的波形。在雷达中, $s_1(t)$ 代表有雷达回波信号, $s_0(t)$ 表示无回波信号。设 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 分别表示 H_0 和 H_1 的先验概率。由于在双择检测问题中,两个假设只能有一个为真,且必有其中有一个为真,因而有

$$P(H_1) = 1 - P(H_0) \quad (1-26)$$

应当指出,例 1.1 和例 1.2 仅讨论了双择检测较简单的情况,即根据接收波形的一次取样值 x 做出判决。此时,输入空间是一维的。为了提高判决的质量,减小噪声干扰随机性的影响,一般需要对接收波形进行多次测量或多次取样,例如, n 次取样。此时,输入空间为 n 维空间,接收样本矢量表示为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。下面在 n 维空间的更广泛的意义上讨论双择检测问题。

如前所述,双择检测问题实质上是对输入空间 $\mathbf{x}$ (一般为 n 维空间)进行对分,即划分为区域 D_1 和 D_0 。如果 $\mathbf{x} \in D_1$,则判决 H_1 为真;如果 $\mathbf{x} \in D_0$,则判决 H_0 为真。这可用图 1.4 示意