电子元器件质量与可靠性技术丛书

可靠性工程数学

顾 瑛 编著

電子工業出版社
PHEI PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

电子元器件质量与可靠性技术丛书

可靠性工程数学

顾 瑛 编著

電子工業出版社·
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是“电子元器件质量与可靠性技术”丛书之一。该书分为4章:第1章是排列组合和概率论基础;第2章可靠性特征量是可靠性的基础知识,阐述可靠度、失效分布函数、失效密度和寿命特征量的含义;第3章介绍寿命数据的数值估计法和图估法的统计分析方法;第4章论述抽样检验和假设检验,给出计数、失效率、平均寿命等抽样检验的检验规则和抽样方案的制定。

本书为电子元器件质量与可靠性技术培训教材,对从事质量与可靠性工作的技术人员和管理人员是一本实用的参考资料。同时也可作为大学相关专业的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

可靠性工程数学/顾瑛编著.—北京:电子工业出版社,2004.8
(电子元器件质量与可靠性技术丛书)
ISBN 7-121-00201-9

Ⅰ.可… Ⅱ.顾… Ⅲ.可靠性工程-工程数学 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第078931号

责任编辑:陈晓莉　　特约编辑:李双庆
印　　刷:北京牛山世兴印刷厂
出版发行:电子工业出版社
　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
　　　　北京市海淀区翠微东里甲2号　邮编100036
经　　销:各地新华书店
开　　本:787×980　1/16　印张:23.75　字数:530千字
印　　次:2004年8月第1次印刷
印　　数:3000册　　定价:49.00元

#《电子元器件质量与可靠性技术丛书》编审委员会

序

军用电子元器件是重点工程和武器装备研制、生产的重要物质基础。电子元器件的质量与可靠性水平关系到武器装备的技术性能和作战能力，甚至决定着武器装备研制、试验乃至实战的成败。

为了提高军用电子元器件的质量与可靠性，多年来，在电子元器件研制、使用、管理等各部门的共同努力下，经过几十年的奋斗，采取了诸多有效措施，军用电子元器件整体质量水平在稳步提高，以"载人航天飞船成功返回"为代表的典型成功范例也证实了这一点。但是，应该看到，我国军用电子元器件的质量和可靠性与国际水平相比，还比较落后。部分元器件产品的质量隐患仍然存在，一些过去常见的失效模式（常见病、多发病）还时有发生，管理问题和低层次问题比较突出，少数产品暴露出来的质量问题触目惊心。电子元器件的质量和可靠性已经成了武器装备建设的"瓶颈"和"卡脖子"问题，值得我们深刻反思，警钟长鸣，常抓不懈。

随着电子产品水平的迅速提高，从20世纪80年代开始，国际上在保证和评价电子元器件质量与可靠性的观念、方法等方面均发生了很大的变化。在"可靠性是设计和制造出来的"基本观点基础上，又有了"只有在高水平的生产线上，在统计受控的条件下生产的元器件才会具有高可靠性"的共识。基于上述观点，美国军方从1991年开始已全面实施统计过程控制（SPC）技术。目前美国集成电路的失效率已下降至10非特以下。

针对世界格局的变化和发展，中央军委做出了军事装备的关键电子元器件要立足于国内的英明决策。提高电子元器件的质量和可靠性是贯彻这一决策的重要步骤。为此，总装备部电子信息基础部按照以人为本的原则，决定对军用电子元器件质量工作人员进行系统的培训。培训工作由总装备部军用电子元器件合同管理办公室组织实施，由西安电子科技大学和信息产业部电子5所长期从事可靠性研究和教学工作的教授和专家授课。培训内容包括：军用电子元器件质量工作的基本内容、方法以及必备的理论和技术基础。同时了解世界先进国家军用电子元器件质量与可靠性现状、质量工作的新理念和新技术以及发展趋势。

2003年8月，总装备部电子信息基础部在西安举办了第一期军工骨干企业、单位质量检测中心主任培训班，取得明显成效，得到广泛好评。为了实现对军用电子元器件质量工作人员的全员培训，特组织有关教授和专家在第一期培训教材的基础上，编写了"电子

元器件质量与可靠性技术丛书”:《可靠性物理》、《可靠性工程数学》、《可靠性试验》、《统计过程控制与评价——C_{PK}、SPC 和 PPM 技术》和《质量与可靠性管理》。

我们相信，本套技术丛书的出版，对开展电子元器件质量工作培训，提高我国军用电子元器件质量和可靠性水平，将起到推动和促进作用。

李纪南

2004 年 7 月

前　言

本书是“电子元器件质量与可靠性技术”丛书之一，重点介绍概率论基础知识、可靠性特征量、寿命试验数据的处理方法和抽样检验的方法。

可靠性数学理论大约起源于20世纪30年代。最早被研究的领域之一是机器维修和替换问题，威布尔(Weibull)等研究了材料的疲劳寿命问题。随着可靠性理论的日趋完善，用到的数学工具也越来越深刻。可靠性数学已成为可靠性理论的重要的基础理论之一。

可靠性理论以产品的寿命特征作为其主要研究对象，离不开对产品寿命的定量分析和比较，可靠性理论是一门定量的科学。可靠性的许多基本概念的定义是用数学术语给出的，不理解这些基本概念的严格数学定义，往往会在实际工作中产生概念混乱。同时，一个可靠性工作者只有熟悉可靠性理论中最基本的数学方法，才有可能在工作中根据具体问题，提出既不脱离实际、又在数学上可能解决的合理的数学方法。因此，可靠性数学与可靠性工程、可靠性管理等其他手段紧密配合，就能发挥其应有的作用。

任何工程型号的产品都需要可靠性设计，无一例外要给出MBTF(平均无故障时间)和产品的寿命，而军事装备对可靠性的指标要求格外严格，因为它直接影响战事的成败。整机产品的可靠性除了取决于其可靠性设计之外，还主要取决于它使用的元器件、部件的可靠性。所以电子元器件生产单位，使用元器件的部门都需要获得有一定可信度的可靠性数据。可靠性数据分使用现场可靠性数据和通过寿命试验获得的可靠性数据，而后者是当今主要的可靠性数据的主要来源。如何正确获得元器件可靠性数据和表征可靠性的参数，是从事电子元器件可靠性实验、检测人员所关心的问题。本书阐述这一方面的基本概念和基本方法，同时也给出许多实例。

本书分为4章：第1章为排列组合和概率论基础，是掌握可靠性理论必需的基础知识，也是后面三章的基础；第2章可靠性特征量是可靠性的基础知识，阐述可靠度、失效分布函数、失效密度和寿命特征量的定义和相互间的关系；第3章介绍寿命数据的统计分析方法，包括寿命试验参数的数值估计法和图估法；第4章论述抽样检验和假设检验，给出抽样检验的基本概念，计数、失效率、平均寿命等抽样检验的检验规则和抽样方案的制定。

本书初稿经刘明治、张德胜、张鹤鸣同志审阅。贾新章、张德胜为本书的编写提供了素材。张皓净、蔡萍、张皓东为本书有关问题进行了查询。张德胜、梁铁航对本书提出了建设性的建议和修改意见，特在此表示诚挚的谢意。

本书是在总装备部军用电子元器件合同管理办公室的直接领导与支持下完成的。

由于编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，恳切希望广大读者批评指正。

编者　顾　瑛

2004年6月

目　　录

第 1 章　排列组合和概率论基础……1
1.1　排列与组合……1
1.1.1　排列……1
1.1.2　组合……5
1.2　概率论基本概念……9
1.2.1　随机现象和随机事件……9
1.2.2　概率……16
1.2.3　条件概率……26
1.2.4　事件的独立性……31
1.3　随机变量……34
1.3.1　随机变量……34
1.3.2　离散型随机变量概率分布……35
1.3.3　随机变量的分布函数……36
1.3.4　连续型随机变量的概率密度函数……40
1.3.5　常用离散型随机变量分布……45
1.3.6　常用连续型随机变量分布……54
1.3.7　多维随机变量……62
1.4　随机变量的数字特征……63
1.4.1　数学期望……63
1.4.2　随机变量的方差……67
1.4.3　常用分布的数学期望和方差……70
1.4.4　协方差,相关系数和矩……72
习题……75
第 2 章　可靠性的特征量……76
2.1　可靠度和失效分布函数……76
2.1.1　可靠度……76
2.1.2　失效分布函数……85
2.2　失效密度和失效率……86
2.2.1　失效密度……86
2.2.2　失效率函数……88

2.3 寿命特征量 …… 93
2.3.1 平均寿命 …… 93
2.3.2 可靠寿命 …… 96
2.4 常用失效分布 …… 98
2.4.1 指数分布和威布尔分布 …… 98
2.4.2 正态分布 …… 104
2.4.3 各种分布可靠性指标间的关系 …… 109
习题 …… 110
第3章 寿命试验统计分析 …… 113
3.1 寿命试验概述 …… 113
3.1.1 可靠性试验 …… 113
3.1.2 寿命试验目的和分类 …… 114
3.1.3 寿命试验的设计要素 …… 116
3.2 数理统计的基本概念 …… 117
3.2.1 母体 …… 117
3.2.2 子样 …… 118
3.2.3 统计量 …… 119
3.2.4 常用分布 …… 121
3.2.5 顺序统计量 …… 125
3.2.6 极值的分布 …… 126
3.3 寿命试验参数的数值分析估计法 …… 127
3.3.1 参数点估计及其方法 …… 127
3.3.2 参数的区间估计 …… 139
3.3.3 最佳和简单线性无偏估计 …… 159
3.3.4 最小二乘法 …… 166
3.3.5 估计量的优良性准则 …… 170
3.4 寿命试验参数的图估计法 …… 173
3.4.1 威布尔分布的图估计法 …… 173
3.4.2 正态分布的图估计法 …… 182
3.4.3 对数正态分布的图估计法 …… 187
3.5 加速寿命试验统计分布 …… 193
3.5.1 加速寿命试验概述 …… 193
3.5.2 恒定应力加速寿命试验的设计要素 …… 197
3.5.3 恒定应力加速寿命试验数据的图估法 …… 201
3.5.4 寿命服从对数正态分布的图估计法 …… 203

3.5.5　寿命服从威布尔分布的图估法 …… 206
3.5.6　恒定应力加速寿命试验的数值分析法 …… 213
习题 …… 219
第 4 章　抽样检查和假设检验 …… 221
4.1　抽样检查的基本概念 …… 221
4.1.1　抽样检查目的和名词术语 …… 221
4.1.2　产品抽样检验的分类 …… 224
4.1.3　随机抽样 …… 227
4.2　计数抽样检验的基本原理 …… 231
4.2.1　一次计数抽样检验 …… 231
4.2.2　二次计数抽样检验 …… 247
4.2.3　国家标准 GB2828、GB2829 的使用方法 …… 252
4.2.4　计数序贯抽样检验 …… 260
4.3　指数分布的失效率抽样检验 …… 268
4.4　平均寿命抽样检验 …… 278
4.4.1　指数分布的平均寿命抽样检验 …… 278
4.4.2　威布尔分布的抽样检验 …… 295
4.5　假设检验 …… 308
4.5.1　统计假设检验 …… 308
4.5.2　指数分布参数的假设检验 …… 313
4.5.3　威布尔分布参数的假设检验 …… 318
4.5.4　正态分布参数的假设检验 …… 323
4.5.5　分布的皮尔逊检验 …… 330
习题 …… 334
附录 A　常用数学用表 …… 335
表 A.1　泊松分布数值表 …… 335
表 A.2　标准正态分布表 …… 337
表 A.3　χ^2 分布表 …… 338
表 A.4　t 分布表 …… 341
表 A.5　F 分布表 …… 343
表 A.6　最佳线性无偏估计方差表(威布尔分布) …… 350
表 A.7　最佳线性无偏估计系数表(威布尔分布) …… 351
表 A.8　简单线性无偏估计表(威布尔分布) …… 357
表 A.9　最佳线性无偏估计系数表(对数正态分布) …… 361
表 A.10　最佳线性无偏估计的方差表(对数正态分布) …… 364

表 A.11 简单线性无偏估计表(对数正态分布) …… 365
表 A.12 正态分布的双侧分位数(u_α)表 …… 366
附录 B 常用数学符号简表 …… 367
参考文献 …… 368

第 1 章　排列组合和概率论基础

本章简述与可靠性有关的概率论基础知识，以及概率论基础和抽样检验中所要用到的排列和组合的基本概念。

1.1　排列与组合

1.1.1　排列

1. 两个基本计算原理

(1) 加法原理

设完成一件事有 k 类方法，第一类方法中有 m_1 个方法，第二类方法中有 m_2 个方法，……，第 k 类方法中有 m_k 个方法。这些方法都不相同，只要用其中的任何一种方法，都可以把这件事完成，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_k \tag{1.1.1}$$

种不同方法。这条基本原理叫做加法原理。

【例 1.1.1】　从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车或乘轮船。一天中，火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

解：因为乘火车有 4 种走法，乘汽车有 2 种走法，乘轮船有 3 种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地，因此，从甲地到乙地共有 $4 + 2 + 3 = 9$ 种不同的走法。

(2) 乘法原理

设完成一件事分 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，第 n 步有 m_k 种方法，各步骤连续完成这件事才算完成，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k \tag{1.1.2}$$

种不同的方法。这条基本原理叫做乘法原理。

【例 1.1.2】　甲村到乙村有 3 条路，乙村到丙村有 2 条路，那么从甲村经乙村到丙村，有多少条通路？

解：有 $3 \times 2 = 6$ 条通路，如图 1.1.1 所示。

一件事分几种方法独立完成，求总数用加法原理。一件事分几个步骤连续完成，求总数用乘法原理。这两条原理，是排列组合的基础。

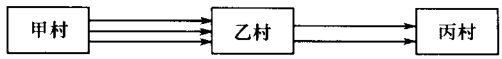

图 1.1.1　例 1.1.2 示意图

2. 排列的定义

从 m 个不同的元素里，每次取出 n ($n < m$) 个不同的元素。按照一定的顺序排成一列，称它为从 m 个元素中每次取 n 个元素的排列。用符号 A_m^n 表示，其中 $1 \leqslant n \leqslant m$。

从排列的定义知道，如果两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序也必须完全相同；如果所取的元素不完全相同，它们就是两个不同的排列。即使所取的元素完全相同，但排列顺序不同，也不是相同的排列。

【例 1.1.3】　由数字 1,2,3 可以排成多少个以下形式的数字：

① 没有重复数字的二位数，三位数？

② 有重复数字的二位数，三位数？

解：① 没有重复数字的排列，是指每个数字的排列中只出现一次，或者说排列中各个数字互不相同。

没有重复数字的二位数可排列成共有 $3 \times 2 = 6$ 种方法。如图 1.1.2 所示。

没有重复数字的三位数也可排列成共 6 种方法，如图 1.1.3 所示。

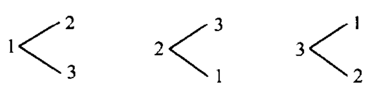

图 1.1.2

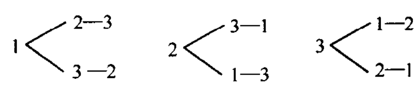

图 1.1.3

② 允许重复数字的排列是指每个数字在组成数中可以重复出现(包括不重复出现的在内)，或者说组成数各个数字可相同。

允许重复的二位数，由于允许重复，在十位、个位上都有三个数字可供选用。即 1,2,3 三个数均可同时或分别在十位、个位上出现，其具体排列如下。

允许重复的二位数共 $3 \times 3 = 9$(种)，如图 1.1.4 所示。

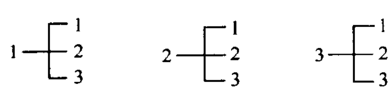

图 1.1.4

同样，允许重复的三位数，在百位、十位、个位都有 1,2,3 三个数字供选用，其具体排列如下。

允许重复的三位数共 $3 \times 3 \times 3 = 27$(种)，如图 1.1.5 所示。

由上面这个例子可以看出，它们都是在三个不同元素(数字 1,2,3) 中，每次取若干个(2 个或 3 个) 按某一规则组成一种事物(二位数或三位数)。这些事物由于含有不同元素

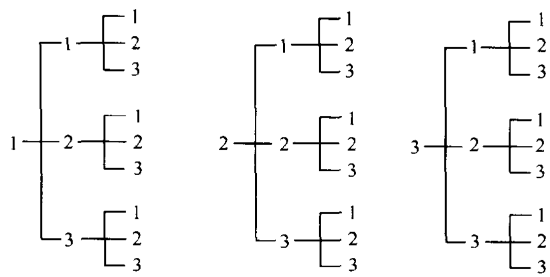

图 1.1.5

而相互区别(如 12,32),或者虽然含有相同元素,但由于相同元素的顺序不同也相互区别(如 123,321),因此可将排列分成不同类型。

3. 排列的分类

(1) 按所取元素是否重复出现的分法

a. 无重复排列

元素在排列中没有重复出现,常用 A_m^n 表示。其含义是从 m 个不同元素中每次取出 n 个元素按某一规则做出不同排列的所有可能数。

b. 有重复排列

元素在排列中可以重复出现,用 $\tilde{A}_m^n$ 表示。

(2) 按所取元素的多少的分法

a. 选排列

即 $m > n \geqslant 1$ 的排列,用 A_m^n 表示。

b. 全排列

即 $m = n$ 的排列,用 A_m^m 表示。

4. 排列数的计算方法

(1) 无重复选排列数的计算方法

从 m 个不同元素中每次取 n 个($m > n$)不完全相同的元素,按一定顺序排列,求其所有不同排列总数 A_m^n。

排在第一位上的元素,可以从 m 个元素中任选,显然有 m 个可能的选法;

排在第二位上的元素,可以从剩下的($m-1$)个元素中任选,有($m-1$)个可能的选法;

排在第三位上的元素,可以从剩下的($m-2$)个元素中任选,有($m-2$)个可能的选法;

依次类推,排在第 n 位上的元素,可以从剩下的 $m-(n-1)$ 个元素中任选一个,有($m-n+1$)个可能的选法。排列的方法如图 1.1.6 所示。

第一位	第二位	第三位	……	第 n 位
m	$m-1$	$m-2$	……	$m-n+1$

图 1.1.6 排列的方法的示意图

显然，从 m 个不同元素中取 n 个不同元素的排列，要分 n 步才能完成，而每一步又分别有 $m, m-1, m-2, \cdots, m-n+1$ 可能的选法。因此，根据乘法原理，从 m 个元素中选 n 个元素的选择列总数为

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \tag{1.1.3}$$

这就是选排列种数的计算公式。即从 m 个不同元素中，取 n 个元素的无重复排列的种数等于 n 个连续自然数的乘积，其中最大的一个乘数是 m，最小的乘数是 $(m-n+1)$。

如 $A_6^4 = 6(6-1)(6-2)(6-3) = 6\times5\times4\times3 = 360$(种)

【例 1.1.4】 从 0,1,2, …,9 共 10 个数字中取出 6 个组成电话号码，求 6 个数字均不相同的电话号码共有多少(假设 0 可以在首位)?

解： 用选排列公式计算，共有

$$A_{10}^6 = 10\times9\times8\times7\times6\times5 = 151200(\text{个})$$

(2) 无重复全排列数的计算方法

在选排列中当 $m = n$ 时，称为全排列，其排列总数为

$$\begin{aligned} A_m^n = A_m^m &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+1) \\ &= m(m-1)(m-2)\cdots3\times2\times1 = m! \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

【例 1.1.5】 现有 a,b,c,d,e 五个字母，若将其排成一列，共有多少种不同的排法?

解： 显然，这是全排列

$$A_5^5 = 5\times4\times3\times2\times1 = 5! = 120(\text{种})$$

(3) 有重复排列种数的计算方法

研究从 m 个不同元素中，每次取 n 个，作允许元素重复的排列总数。这种排列在 n 个位置中的每一位置上，由于允许元素重复，都有 m 种元素供选用，即都有 m 种排法。按照乘法原理，排列总数为 $m\cdot m\cdots m$(共 n 个) $= m^n$，即

$$\tilde{A}_m^n = m^n \tag{1.1.5}$$

这就是有重复排列种数的计算公式，它等于 m 个不同元素为底数，所取元素 n 为指数的幂。如 $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$。

【例 1.1.6】 从 0,1,2, …,9 共 10 个数字中取出 6 个组成电话号码，求所有可能组

成的电话号码总数(假设 0 可以在首位)。

解:用可重复排列公式计算,共有

$$\tilde{A}_{10}^{6} = 10^{6} \quad (\text{种})$$

1.1.2　组合

1. 组合的定义

在 m 个元素中,每次取 n 个元素,不管它们的顺序而并成一组,称为从 m 个元素中,每次取 n 个元素的组合。用 C_m^n 或 $\binom{m}{n}$ 表示从 m 个元素中取 n 个元素的组合种数。

【例 1.1.7】　飞行在北京 — 西安 — 重庆航线上的民航飞机。问:

① 要准备多少种不同的飞机票?

② 有几种不同的飞机票价?

解:① 飞机票的种数跟起始站、终点站有关,始终站不同则飞机票不同,从北京 — 重庆和从重庆 — 北京就是两种不同的飞机票,这里有顺序问题。因此,飞机票种数就是从三个元素(站) 中每次取二个元素(站) 的无重复排列种数,即 $A_3^2 = 6$(种)。

② 飞机票价和飞机票不同,它只与始终站间的距离有关,与哪是始站,哪是终站无关,北京 — 重庆和重庆 — 北京票价一样。因此,飞机票价的种数是站与站间不同距离的种数,有北京、重庆间,北京、西安间,西安、重庆间三种票价。

可见,飞机票种数是有顺序的排列问题,而飞机票价是 n 个站中任取二站的并组问题,它不考虑顺序,是一个组合问题。

现将排列和组合的区别和联系以实例列表 1.1.2 比较。

表 1.1.2　排列和组合的区别和联系及实例表

项目	排　　列	组　　合
区别	按一定规则排列成一事物	不管它们的顺序而并成一组
代号	A_m^n	C_m^n
实例	1.10 个人相互写一封信,共写几封? 2.10 个人中选一名组长,副组长,干事,有多少种选法? 3. 有 m 个数 $a,b,c,\cdots$ 每次取二个数相减,共有多少不相等的差? 4. 从 5 本不同的书里选 2 本分给甲、乙两人,共有多少种分法? 5. 从 10 个编号的零件中取 2 件顺次记号的种数? 6. 成渝铁路 62 个大中站准备的车票种数?	1.10 个人互通一次电话,共互通几次? 2. 在 10 个人中选出三名干部,有多少选法? 3. 有 m 个数 $a,b,c,\cdots$ 每次取二个数相乘,共有多少不相等的积? 4. 一个人从不同的 5 本书中选 2 本,有多少种选法? 5. 从 10 个零件中任取 2 件的种数? 6. 成渝铁路 62 个大中站不同票价种数?

2. 组合种数的计算方法

【例 1.1.8】 用 a,b,c,d,e 五个字母,做三个字母的排列和组合,并比较它们的种数。

解: 按排列总数公式(1.1.3),可得

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{种})$$

按组合定义从 5 个字母中取 3 个字母的组合,可从左到右顺序进行,具体组合如图 1.1.7 所示。

它的种数 $$C_5^3 = 6 + 3 + 1 = 10(\text{种})$$

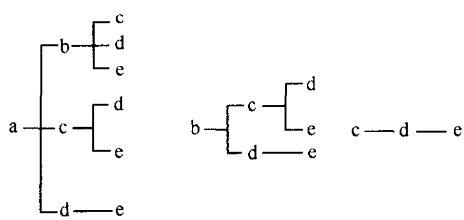

图 1.1.7 例 1.1.8 示意图

由此得出 $$A_5^3 = 60, C_5^3 = 10$$

即 $$C_5^3 = \frac{1}{6} A_5^3 \text{ 或 } A_5^3 = C_5^3 \times 3!$$

可见,组合总数只相当于排列总数的 1/6。因为排列有一个顺序问题,a,b,c 的全排列种数为 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$(种),而 a,b,c 的组合则没有顺序问题,任意怎么排列,只能算一种组合。

通过上例可得组合计算公式

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} \tag{1.1.6}$$

式(1.1.6) 的证明:从 m 个不同元素中取 n 个不同元素做排列,可以分两步走,第一步先从 m 个元素中取 n 个元素组合,组合种数为 C_m^n,第二步把 n 个元素做全排列,其种数为 $n!$。根据乘法原理可知

$$A_m^n = C_m^n \cdot n!$$

因此 $$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$$

按照公式(1.1.3),公式(1.1.6) 可写成

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\cdots \times 3 \times 2 \times 1}{n!(m-n)(m-n-1) \times \cdots 3 \times 2 \times 1} \end{aligned}$$