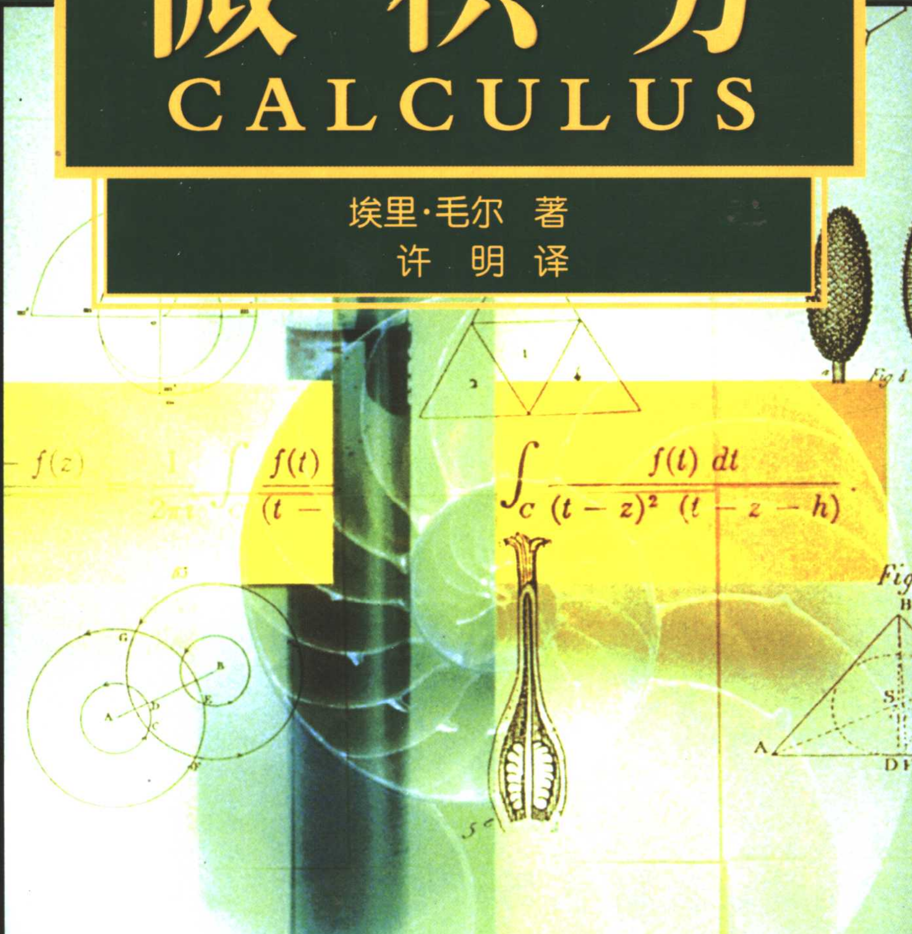
FACTS ON FILE SCIENCE LIBRARY

科学分类手册
FACTS ON FILE SCIENCE LIBRARY

微积分
CALCULUS

埃里·毛尔 著
许 明 译



光明日报出版社

微积分

CALCULUS

科学分类手册

微积分

（美）埃里·毛尔 著
许明 译

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

科学分类手册·微积分 /(美) 毛尔著;许明译.
北京:光明日报出版社,2004

ISBN 7-80145-793-5

Ⅰ. 科…　Ⅱ. ①毛…②许…　Ⅲ. ①自然科学-词典-英、汉
②微积分-词典-英、汉　Ⅳ.N61

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 119526 号

图字:01-2003-7730 号

微积分

光明日报出版社	(北京永安路 106 号)
全国新华书店经销	合肥锐达印务有限责任公司制版、印刷
开本 880×1230　1/32　印张 147.5	字数 2800 千字
2004 年 第 1 版	2004 年 第 1 次印刷
ISBN 7-80145-793-5/G	定价:234.00 元(全 10 册)

科学分类手册

FACTS ON FILE SCIENCE LIBRARY

化学 物理 几何 微积分
代数 生物 天气与气候
地球科学 海洋科学
空间与天文学

丛书策划：李树喜 周立文 何松苗 岳 洋
出版统筹：何松苗
责任编辑：温 梦 田 军
整体设计：马 铁
整体监制：马 铁
营销统筹：何松苗 马 铁

光明日报出版社

原书导言

微积分(Calculus)是**微分学**和**积分学**的缩写,它也被叫做**“无穷小计算”**。它的第一部分,即微分学,处理的是一个函数的变化和变化率。从几何的观点看,这等于是研究代表函数的图像的**局部**性质,即那些从一点到另一点有变化的性质。例如,函数的**变化率**即用几何的术语所说的、图像切线的斜率,它是一个当我们沿此图像移动时随点到点变化的量。微积分的第二部分,即积分学,处理的是这个图像的**整体**特性,也就是为整个图像界定的那些性质,比如图像下方的面积或者图像绕一固定直线旋转得到的立体的体积。猛一想,微积分的这两个方面似乎没有关联,但是正如牛顿和莱布尼茨在1670年左右所发现的那样,它们实际上彼此为逆,就像是乘法和除法互为逆一样。

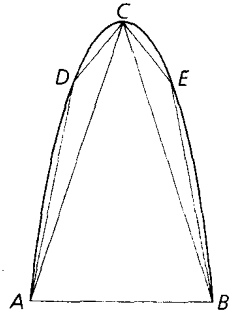
人们常说,在1665–1675年间,英格兰的**伊萨克·牛顿**(1642–1727)和德国的**魏尔海姆·莱布尼茨**(1646–1716)各自独立地发明了微积分,但这并不完全正确。隐藏在微积分学后面的中心思想是运用极限过程来得到有关曲线、曲面和立体的结果,这个中心思想可以追溯到古希腊时代。其起源被归因于**尼多斯的欧多克索斯**(大约在公元前370年),他正式叙述了被称做**穷竭法**的原理。欧多克索斯的叙述是:

> 如果从任意一个量中减去一个不小于其一半的部分,再从余下的部分减去一个不小于其一半的另一部分,等等一直下去,则最终将剩下一个比任意事先给定的一个同类量为小的量。

欧多克索斯在这里所说的“量”指的是一个几何构造,像是给定了长度的线段。他说,从原来的量中重复减去越来越小的部分,我们可以使剩余量按我们希望的那样小,即**任意小**。虽然欧多克索斯是以文字表达了他的原理而没有使用数学符号,但是它却握住了我们现代极限概念的“$\varepsilon-\delta$”定义的源头。

第一个将欧多克索斯的原理付诸实用的是**叙拉古的阿基米德**(约公元前287–212),这位传奇的科学家用他的天才的军事发明打败了围困他的城市的罗马舰队

(据说当他正在对他画在沙地上的一个几何定理沉思冥想时被一个罗马士兵杀死)。阿基米德利用穷竭法发现了一个抛物线的一个扇形的面积。他把扇形分成一系列不断变小的三角形，而这些三角形的面积按几何级数下降。将此过程不断重复，他便可以使这些三角形按他所想要那样靠近地装到抛物线内，即像所说的那样"穷竭"它。然后他运用几何级数的和公式把所有这些面积加起来。依这种方式他发现这些三角形的总面积趋近于三角形 ABC 面积的 4/3。用现代的语言表示，即：(如果取三角形 ABC 的面积为 1) 当三角形的数目无限增大时，三角形的组合面积趋向于极限 4/3。此结果是个伟大的智慧成就，它把阿基米德带到离我们现代积分学只有毫发之距。



一个抛物线截段的面积

那么，为什么阿基米德或任何一个同时代的希腊人竟然没有发现微积分呢？理由是希腊人还不具有可行的代数知识。

要处理无限的过程，人们就必须处理变量因而处理代数，但这对希腊人是陌生的。他们的数学世界只局限于几何和一些数论。他们以几何的词汇想到数和数的运算：一个数被解释为线段的长度，两个数的和是两个线段沿直线首尾相连的组合长度，而它们的乘积则是以这些线段为边的矩形的面积。在这样一个静态的世界里，不需要变量因而也不需要代数。微积分的发明不得不等到代数发展到我们今天所知道的样子，大概要到 1600 年左右。

在牛顿和莱布尼茨之前的半个世纪里，重新出现了对古代穷竭法的兴趣。但不同于希腊人那样非常留意于把他们的数学论点包裹在长长的用文字表达的形式叙述里，新一代的科学家们对实际的结果更有兴趣。他们使用一个没有严格定义的称为"不可分量"的概念，它是一个无穷小的量，当把它无限次相加时能得到预期希望的结果。例如，为了求平面形状的面积，他们把它想成是由无限多个"条形"构成，每个条形都无限窄；把这些条形的面积加起来，人们便可以求得所要的面积，至少原则上是这样的。尽管它的基础不稳固，这个方法让数学家们能着手解决许多到那时尚未解决的问题。例如，约翰内斯·开普勒，即那位因发现行星运动规律而著名的天文学家，便利用不可分量求得了各种旋转体的体积(据说，因为对酒商估算桶中酒的体积的方法不满才导致了他的这项工作)。他把每个立体想成是由无穷多个薄片集合而成的，然后他把它们总和起来，得出了总的容积。

那时的许多数学家都使用了相似的技巧，有时，这些方法行得通，有时却不行，

但它们总是很麻烦，而且对每个问题需要采用不同的方法，所需要的是一个统一的原理，它能够容易且有效地应用到任何类型的问题。这项任务落在了牛顿和莱布尼茨的身上。

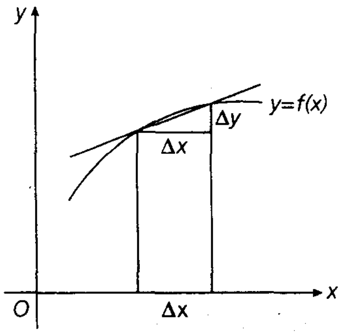
作为既是物理学家又是数学家的牛顿，把一个函数想成为一个随时间连续变化的量，即他称为的“流变”；一条曲线则是由一个沿着它移动的点 P(x,y)生成的，而坐标 x 和 y 随时间连续变化。然后他计算 x 和 y 相对于时间的**变化率**，亦即通过求 x 和 y 在两个“邻接”的瞬时之间的差或变化除以消逝的时间区间来表示。最后的步骤是让消逝的时间变得无穷小，或者更准确地说，使得它如此之小，以至于比起 x 和 y 它们自身来说都可以忽略不计。按此方式他把每个**变化率**表达为一个时间的函数。他把它称为相应的流变对于时间的“流数”；今天我们称之为**导数**。

一旦他找到了 x 和 y 对于时间的变化率，他便能求出 y **对于** x **的**变化率。这个量有重要的几何意义：它度量了曲线在点 P(x,y)处的陡斜程度，或者换句话说，即曲线在 P 的切线的斜率。故而牛顿的“流数法”等价于我们现代的微分——求函数 y=f(x)对于 x 的导数的过程。之后牛顿列出了一组求各种函数的导数的规则，这些便是我们熟悉的**微分规则**，它构成了现代微积分教程的脊梁。例如，两个函数和的导数为它们导数的和［用现代记号为$(f+g)'=f'+g'$］，常数的导数为 0，两个函数乘积的导数按乘积规则$(fg)'=f'g+fg'$求出。一旦列出了这些规则，他便将它们应用于大量的曲线，并且一个接一个地计算它们的斜率，它们最高和最低点(它们的极大和极小值)，以及一大堆的其他性质，而这些性质用其他方法还没有被发现过。

然而这些还只不过是牛顿成就的一半。下一步他考虑了**逆**问题：给出了流数求流变，或者用现代语言说：给出了一个函数，求它的**反导数**。他给出了求各种函数和函数组合的反导数的规则，这些即今天的**积分规则**。然后，牛顿转向了求一条已知曲线下方面积的问题。他发现这个问题与切线问题（求曲线的斜率）互为**逆**问题：为了求函数 f 的图像下的面积，人们必须首先找出 f 的一个反导数。这个逆关系被称之为**微积分的基本定理**，它把微积分的两个分支：微分学和积分学统一起来了。

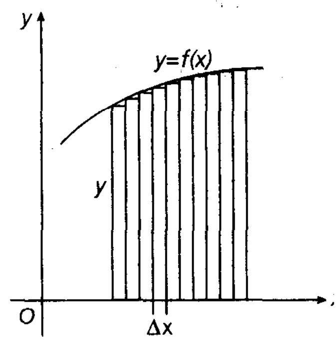
在英吉利海峡的那边，莱布尼茨正致力于同一个思想。虽然，牛顿和莱布尼茨保持着诚挚的关系，他们却各自独立地在工作并持有十分不同的观点。在牛顿的思想植根于物理的同时，作为本质上是个哲学家的莱布尼茨遵从了一种更加抽象的处理方式。他想像出一个“无穷小三角形”，它由 f 的图像的一小段，x 的一个增量 Δx，和 y 的一个相应增量 Δy 构成。比率 $\Delta y/\Delta x$ 是图像在点 P(x,y)的切线斜率的一个近似值。莱布尼茨把 Δx 和 Δy 考虑成无穷小量；而今天我们说的切线斜率是 Δx 趋于 0 时（$\Delta x\to 0$）$\Delta y/\Delta x$ 的**极限**。相似地，莱布尼茨把 f 的图像下的面积想成是无穷多个宽为 Δx，高为 y=f(x)的窄条面积之和，而今天我们用极限概念来阐述

这个思想。最后，莱布尼茨发现了切线和面积问题间的逆关系。



对一条切线的近似

因此，除了他们不同的处理方式和记号以外，牛顿和莱布尼茨达到了同样的结论。一场激烈的优先权的争端在诚挚关系的表象后面长期蕴酿，逐渐升温，终于突然公开爆发，昔日的同僚变成了势不两立的敌人。更加糟糕的是，关于谁应该获得发明微积分荣誉的争端，竟毒化欧洲的学术氛围长达百年以上。今天牛顿和莱布尼茨被赋予了发明微积分的同等荣誉，而微积分则是自公元前 300 年欧几里德写就他的《原本》以来数学中最伟大的发展。

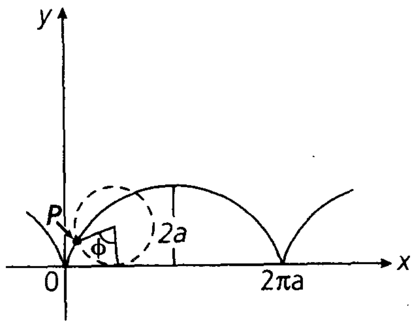


函数下方的面积

微积分的知识在全世界很快传开，并立即被用于解决一大堆老的和新的问题。在第一类问题中，首先被着手解决的是两个著名的未解决的问题：一个具有均匀厚度的链在重力作用下自由悬垂，求它的形状；还有求这样一条曲线，沿着它，一个质点在重力作用下能以最短的时间滑下。第一个问题同时被莱布尼茨、瑞士的雅各布·伯努利和荷兰科学家克利斯狄安·惠更斯在 1691 年所解决，他们每个人使用了不同的方法；此链的形状原来是曲线 y=cosh x（x 的双曲余弦），以悬链线而知名(英文为 catenary，来自拉丁字 catena，链的意思)。第二个问题称为最速降问题(来自希腊字"最短时间")，它在 1691 年由牛顿、莱布尼茨、伯努利两兄弟——约翰和雅各布以及法国人纪尧姆·弗朗索瓦·安东尼·洛必达(他在 1696 年出版了第一本微积分的教科书)，所求的曲线被证明为一条**旋轮线**，即一个沿直线转动的轮子边缘上一点所描出的曲线。这些问题的解属于新发明的微积分的首批成果。

微积分于 18 世纪在新的研究领域里进行了大规模的拓展。列昂哈德·欧拉

(1707–1783) 在任何时代都可算得上是一位成果最丰富的数学家，他也被视为现代**分析**的奠基人，而所谓现代分析从大的方面说就是研究无限过程和极限。欧拉发现了大量的无穷级数和无穷乘积，其中被认为是数学中最漂亮的公式之一的是 $\pi^2/6=1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$。他还把微积分的方法推广到复变量（即形如 x+iy 的变量，其中 x,y 是实数，$i=\sqrt{-1}$），从而铺就了一条通向**复变函数论**的道路，而这个理论是 19 世纪数学的伟大创造之一。在此期间得到重视的分析分支是微分方程(今天仍受重视)，这是些包含了未知函数和它的导数的方程。一个简单的例子是方程 $y'=ky$，其中 $y=f(x)$ 为未知函数，k 为常数。这个方程描述了放射性衰减，声波穿过大气的减弱和物体因环绕环境导致的冷却这一类的现象；方程的解为 $y=y_0e^{kx}$，其中 y_0 为 y 的初值(即当 x=0 时的值)，e 为自然对数的底数（约等于 2.7182818）。解这类方程的技术在包括从物理、天文直到生物学和社会科学的每个分支都得到了大量的应用。



旋轮线

微积分在 19 世纪中拓展到了三维空间，那里的立体或曲面替代了熟悉的二维空间中的图形；这个**多元**微积分及其在向量的推广成了物理和工程学中不可或缺的工具。19 世纪初期的另一个主要进展是由让·巴布蒂斯·约瑟夫·傅立叶发现的，即当把任一个"行为合理"的函数看做是长度为 T 的区间上的一个周期函数时，它可以表示为周期为 T 的整数因子的正弦和余弦函数项的无穷和（参看术语：傅立叶级数）。这些傅立叶级数在振动和波的研究中处于中心地位，它们也在 20 世纪初的量子力学发展中起了关键作用。

但是，正当这些发展极大地扩大了微积分能够应用范围的时候，许多 19 世纪的数学家们仍然感到需要把微积分置于一个坚实的、符合逻辑的基础之上，并从任何物理或几何直观中解脱出来。在他们中最前沿的一位是奥古斯汀·路易·柯西（1789–1857），他第一个给出了极限概念的准确和严格的定义。这种对严谨性的重视一直顺利地延续到了 20 世纪，并且在第二次世界大战前的那些年代里达到了它的顶点（在 1934 年爱德蒙德·兰道出版了一本著名的微积分教科书，其中没有一幅插图）。然而，战后以来，摆钟已经摆回到了一个更加平衡的状态，对"纯粹"和"应用"数学间旧有的区别已在很大程度上消失了。

今天，微积分不仅在自然科学中是不可或缺的工具，而且在心理学和社会学、商业和经济甚至在人文学科中也是如此。只给出一个例子：一个业主可能要找出他或她应该生产和出售的产品的数目，以便获得最大的商业利润，为此，他或她必须知道生产成本 C 以及收入 R 是如何依赖于生产和销售的产品数 x，也就是函数 C（x）和 R(x)（前者通常由两部分组成：**固定成本**，它与生产的产品数无关，可能包括保险费和财产税，维修费和雇员的工资，另一个是**可变成本**，它直接依赖于 x）。利润 P 是这两个函数间的差，它本身也是 x 的函数，P(x)=R(x)−C(x)。然后，我们便能用微积分中的标准方法求出使 P 产生最大值的 x 的值；这是业主们应该追求的**最佳生产水平**。

由美国 Facts On File 出版社出版的《科学分类手册》系列涵盖了如下学科：微积分、几何、代数、化学、物理、生物、海洋科学、地球科学、空间与天文学、气象与气候学。《科学分类手册·微积分》把大量的信息压缩成精致的内容、简洁、全面又易于理解。本书包括 4 个主要部分：术语、人物介绍、大事记、图和表，最后附有便捷的索引，方便学生和教师快速查证。

■术语：涵盖了 500 多个词条，许多条目还附有简图，以帮助澄清术语的含义。主题包括：绝对值、二项式定理、指数式增长、最大整数函数、积分、余弦定律、线性函数、抛物线、多项式函数和二阶导数等。

■人物介绍：描述了从古代至现代的 100 多位科学家和数学家，他们的发现促进了人类对物理学的认识与理解。这些科学家包括：雅各布·伯努利、勒内·笛卡尔、欧多克索斯、让-巴布替斯-约瑟夫·傅立叶、依萨克·牛顿勋爵、布莱斯·帕斯卡和毕达哥拉斯等。

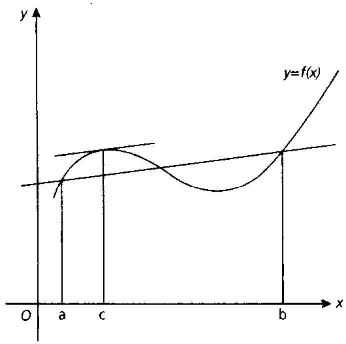
■大事记：跨越了从古希腊到现在 4000 多年的微积分学的发展历史，包含了有关微积分学的重大发现和重要事件：毕达哥拉斯对毕达哥拉斯定理的证明（公元前 540 年）；印度人对以 10 为底的计数系统的发明（后来被称之为印度-阿拉伯数系，公元 600 年）；法国数学家纪尧姆·洛必达出版了《无穷小分析》一书，这是第一本关于微积分的教科书（1696 年）；英国数学家查理·巴贝奇的“差分机”的建造，被认为是第一部机械计算机（1822 年）；德国物理学家爱因斯坦发表了他的著名的相对论（1916 年）等。

■图和表：查找任何一个专业的基础信息相对比较困难，将有关图表和常用信息汇集起来，为学生和教师提供了重要的资料。在这里，我们列出了最常用到的三角恒等式，微分和积分的公式以及对无穷级数的各种收敛、判别法和总览。

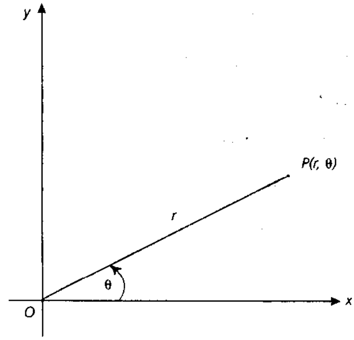
本书把微积分学置于科学的大背景之下，突出所有学科间的紧密联系，更可比较、融会各学科领域中的信息。

目　　录

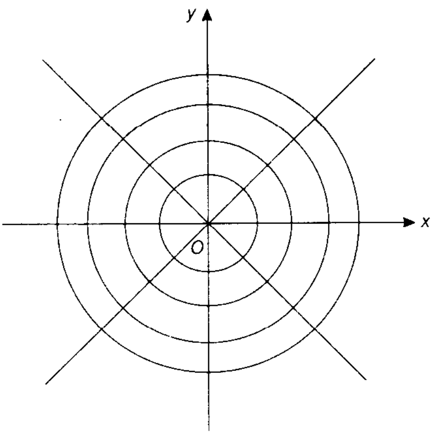
第一章
术　语



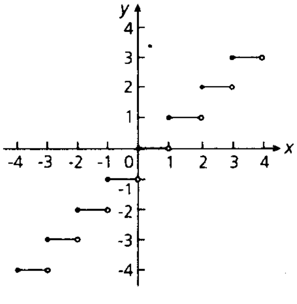
中值定理



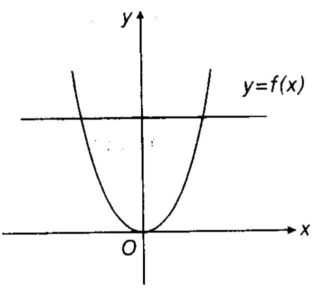
极坐标



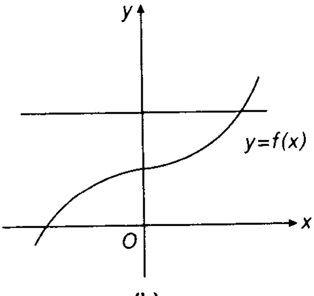
正交轨线



最大整数函数



(a)



(b)

水平线判别法:(a)没有逆的函数;(b)有逆的函数。

横坐标　有序数偶(x,y)的第一个数;也称之为 x- 坐标。

绝对收敛　参看收敛:绝对的。

绝对误差　参看误差:绝对的。

绝对极大值　参看极大值:绝对的。

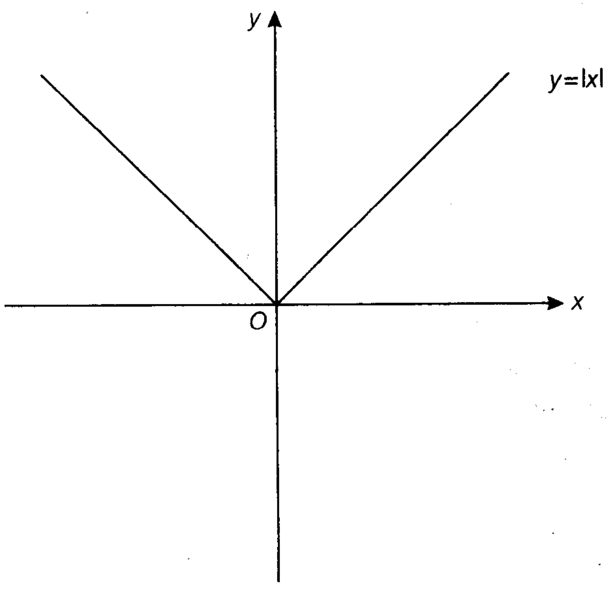
绝对极小值　参看极小值:绝对的。

绝对值　一个实数 x 的绝对值是“缺少其符号”的数,记为$|x|$。更准确地说,如果 $x\geqslant 0$ 则 $|x|=x$,如果 $x<0$ 则 $|x|=-x$。因此 $|5|=5$,$|-5|=-(-5)=5$。用几何观点看,$|x|$ 是在数轴上从原点 O 到点 x 的距离。

也可参看三角不等式。

绝对值函数　函数 $f(x)=|x|$,其定义域为整个实数,值域为所有非负数。

加速度　速度对时间的变化率。如果一个物体沿 x 轴运动，它的位置是时间的函数,$x=x(t)$。则它的速度为 $v=dx/dt$,而它的加速度 $a=dv/dt=d(dx/dt)dt=d^2x/dt^2$,其中 d/dt 表示对时间的微分。



绝对值函数

函数的加法 两个函数 f 与 g 的和，记作 f+g。那就是说，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$。例如，如果 $f(x)=2x+1$，$g(x)=3x-2$，则 $(f+g)(x)=(2x+1)+(3x-2)=5x-1$。对 f 和 g 的差有相似的定义，记为 f−g。

积分的可加性

1. $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ 缩写形式为 $\int_a^c+\int_c^b=\int_a^b$

注：通常 c 是区间[a,b]中的一个点，即 $a\leqslant c\leqslant b$，但是，这个规则对任何使积分存在的点 c 均成立而不管它相对于 a 与 b 的关系如何。

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$，以及对差 $f(x)-g(x)$ 的相应关系。同样的规则也可用于不定积分（反导数）。

代数函数 通过对变量 x 运用有限次加、减、乘、除和开根的代数运算得到的函数类。它包含了所有的多项式和有理函数（多项式的比）以及它们的有限次开根；例如，$\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$。

代数数 具整数系数的多项式函数 $f(x)$ 的一个零点（即方程式 $f(x)=0$ 的一个解）。所有有理数都是代数数，这是因为如果 $x=a/b$，其中为两个整数且 $b\neq 0$，则 x 是线性方程 $bx-a=0$ 的解。$\sqrt{2}$ 是另一个例子（它是二次方程 $x^2-2=0$ 的正解），还有 $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$（是 6 次多项式方程式 $x^6-2x^3-1=0$ 的一个解）。虚数 $i=\sqrt{-1}$ 也是代数的，因为它是方程式 $x^2+1=0$ 的解（注意：在所有给出的例子中，每个系数都是整数）。

也可参看：超越数。

交错 p 一级数 见：p—级数：交错的。

交错级数 见级数：交错的。

振幅 正弦或余弦曲线宽度的二分之一。如果曲线具方程式 $y=a\sin(bx+c)$，则振幅为 $|a|$，对 $y=a\cos(bx+c)$ 也一样。

分析（学） 处理连续性和极限的数学分支。除了微积分以外，分析还包括了微分

方程、单复变函数、运筹学和现代数学的更多的领域。

参看离散数学。

解析几何 对曲线的代数研究，这种研究所依据的事实是，平面中任意点均可由一个有序的数偶（坐标）给定，记作（x,y）。它也被称作坐标几何，由皮埃尔·费马和勒内·笛卡尔在17世纪上半叶所发明。也能把它拓广到三维空间，其中一个点P由三个坐标x,y和z给定，记作（x,y,z）。

角 对从一条直线到同一平面中另一直线的旋转量的一种量度。

直线之间的：如果这两条直线由方程式 $y=m_1x+b_1$ 和 $y=m_2x+b_2$ 给出，假定它们中没有一条是竖直的，则它们之间的角由公式 $\phi=\tan^{-1}(m_2-m_1)/(1+m_1m_2)$ 给出。例如，直线 $y=2x+1$ 和 $y=3x+2$ 间的角是 $\phi=\tan^{-1}(3-2)/(1+3\cdot2)=\tan^{-1}1/7\approx8.13$ 度。

两条曲线间的：在它们交点处的切线间的夹角。

一条直线向x轴倾斜的：角 $\phi=\tan^{-1}m$，其中m为直线的斜率。由于正切函数是周期的，我们限制 ϕ 的范围为 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$。

参看斜率。

角速度 设一条通过原点的直线相对于x轴旋转了角 θ，它按反时针方向以弧度度量。设想旋转角 θ 随时间连续变化（就像钟的指针），但不一定为常数。因此 θ 是时间的函数，$\theta=f(t)$。以希腊字母 ω 表示的角速度是这个函数的导数：$\omega=d\theta/dt=f'(t)$。ω 的单位是弧度每秒（或弧度每分）。

年金 一系列按固定时间间隔的等量支付款：它是一个人或者向一家银行偿还的一笔贷款或者从银行收到的一笔前期存入的本金。

反导数 一个函数 $f(x)$ 的反导数是一个函数 $F(x)$，使得它的导数为 $f(x)$；即 $F'(x)=f(x)$。例如，$5x^2$ 的一个反导数是 $5x^3/3$，这是因为 $(5x^3/3)'=5x^2$。$5x^2$ 的另一个反导数是 $5x^3/3+7$，事实上是 $5x^3/3+C$，其中 C 是个任意常数。