三角入門

仲光然編

三角入門

仲光然編

開明書店

三　角　入　門

每册售價人民幣6,500元　　丙(角6037)

編　者	仲　光　然
出版者	開　明　書　店 (北京西總布胡同甲50號)
印刷者	華　文　印　刷　局 (上海濟寧路143弄4號)
發行者	三聯・中華・商務・開明・聯營 聯合組織 中國圖書發行公司 (北京絨線胡同66號)
各地分店	三聯書店　中華書局　商務印書館 開明書店　聯營書店

1934年6月初版　　81 P　32 K
1944年1月八版
1951年8月十四版(18001—21000)

目　　錄

第一編　銳角的三角函數

第一章　三角函數的定義 ……………………………1

角的單位(1)　六十分法(1)　度,分,秒(1)　正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割的定義(2)　三角函數(5)　函數(5)　平面三角法的目的(5)　測量樹的高(6)　求三角形的面積(7)　正多角形的邊同他的面積(7)

第二章　特別角的三角函數 ……………………………11

45°的三角函數(11)　30°及60°的三角函數(12)　0°及90°的三角函數(13)　各特別角重要函數表(14)

第三章　三角函數的真數表及對數表 …………16

三角函數的眞數表(16)　表差(17)　比例差的原理(17)　三角函數的對數表(19)

第四章　直角三角形解法……………………………22

三角形解法(22)　直角三角形邊同角的關係(22)

解直角三角形的四種情形(23) 第一種情形的解法(23) 第二,三,四種情形的解法(23)

第五章 高及距離的測量……………………………26

測量上術語及器械(26) 鉛直線(26) 水平面(26) 水平線(26) 水平角(26) 直立面(26) 仰角(26) 高度(26) 俯角(26) 測鎖(26) 卷尺(26) 經緯儀(26) 六分儀(26) 在水平面上方可以接近的直立物體高的測量法(27) 同物體不能接近的距離的測量法(29) 方位(30)

第六章 同一角三角函數相互間的關係………34

倒數關係(34) 相除關係(34) 第一平方關係(34) 第二平方關係(35) 知三角函數之一,而求其他的方法(36) 三角恆等式(37) 充分條件(39)

第二編 一般角的三角函數

第七章 三角函數的定義和他相互間的關係 42

線段的正負(42) 點的坐標(43) 橫坐標(43) 縱坐標(43) 坐標軸(43) 橫軸(43) 縱軸(43) 原點(43) 角的正負(44) 正角(44) 負角(44) 主線(44) 動徑(44) 象限(44) 角的大小(44) 任

意角的三角函數(46) 各象限內三角函數的符號表(47) 任意角的三角函數相互間的關係(49) 拿線段的長短來表示三角函數(50) 單位圓(50) 三角函數的變化(51) 正弦的變化(51) 餘弦的變化(52) 正切的變化(52) 正弦,餘弦,正切函數變化表(53) 負角的三角函數(54) 餘角及補角(55) 餘角的三角函數(55) 補角的三角函數(56)

第八章 三角和及差的三角函數……………………65

兩角和的正弦及餘弦(60) 兩角差的正弦及餘弦(61) 正切的加法定理(63) 正切加法定理的幾何學的證明(64) 二倍角的三角函數(64) 二倍角三角函數的幾何學的證明(65) 半角的三角函數(66) 三倍角的三角函數(67) 正弦餘弦的乘積(71) 二角正弦或餘弦的和及差(72)

第三編 斜角三角形

第九章 三角形角與邊的關係……………………75

角的關係(75) 正弦定律(77) 第一餘弦定律(78) 第二餘弦定律(79) 二邊的和或差與第三邊的比(80) 正切定律(81) 半角的正弦餘弦及正切(81) 三角形的面積(38) 三角形內切圓,傍切圓的半徑(84)

第十章　斜角三角形解法……………………………88

解斜角三角形的四種情形(88)　第一種情形解法(88)　第二種情形解法(89)　第三種情形解法(91)　第四種情形解法(93)

第十一章　測量上應用問題……………………………95

求不能接近的兩點間的距離(95)　求山高(96)

附　錄

附錄第一　弧度法　反三角函數　三角方程式……………………………100

弧度法(100)　Radian(100)　半徑爲 r 的圓內，立在圓弧 a 上的中心角的弧度(102)　反三角函數(102)　某角的正弦爲 k，求某角的方法(104)　某角的餘弦爲 k，求某角的方法(105)　某角的正切爲 k，求某角的方法(106)　三角方程式(108)　三角方程式解法(108)　方程式的分外根(110)

附錄第二　對數……………………………113

對數的定義(113)　對數的基本定理(114)　常用對數(115)　對數的指標及假數(116)　指標的法

則 (117)　對數表及其用法 (119)　比例部分的法則 (120)　對數計算 (122)

附錄第三　公式 11 的完全證明……………………123

附錄第四　雜題……………………………………127

第一編的雜題 (127)　第二編的雜題 (130)　第三編的雜題 (134)　附錄一的雜題 (137)

附錄第五　主要術語的英譯………………………144

附錄第六　公式一覽表……………………………146

三 角 入 門

第 一 編

銳 角 的 三 角 函 數

第 一 章

三 角 函 數 的 定 義

1. 角的單位. 欲測量角的大小,本來用隨便哪一角當作單位都可,但實用上則用'六十分法',就是拿直角的九十等分之一作爲單位,叫做一度.

本書所用來表角的文字,他的大小都拿度,分,秒來計算.

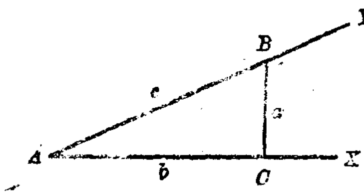
例如 $A=60^\circ, B=32^\circ\,43'\,18''$ 等.

〔問 1〕 試不用度作單位而用直角作單位,表出 $42^\circ\,25'\,40''$.

〔問 2〕 三角形的二角爲 $55^\circ\,33'\,44''$ 及 $42^\circ\,56'\,18''$,試計算他的第三角.

2. 定義. 取一銳角 XAY,從他的一條邊 AY 上隨便什麼地方取一點 B,引他邊 AX 的垂線 BC,那就產生了一個直角三角形 ABC.我們假設 A 角,B 角,C 角所對的邊拿 $a,b,$

來表*，那麼 a,b,c 的相互間發生了六個比，命名如次：



I. A 角對邊 a 對於斜邊 c 的比，叫做這個角的'正弦'(*sine*)，記作 $\sin A$.

因此 $$\sin A=\frac{a}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

II. A 角鄰邊 b 對於斜邊 c 的比，叫做這個角的'餘弦'(*cosine*)，記作 $\cos A$.

因此 $$\cos A=\frac{b}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

III. A 角對邊 a 對於鄰邊 b 的比，叫做這個角的'正切'(*tangent*)，記作 $\tan A$.

因此 $$\tan A=\frac{a}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

IV. A 角正切，餘弦，正弦的倒數，各叫做 A 角的'餘切'(*cotangent*)，'正割'(*secant*)，'餘割'(*cosecant*)，各記爲 $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$.

---

*本書全部都用這個規則.

因此
$$\cot A=\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$
$$\sec A=\frac{c}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

注意一：正弦，餘弦，正切等都是不名數.

注意二：有記 $\tan A$ 作 $\operatorname{tg} A$ 者.

〔問 1〕 $a=3, b=4, c=5$；求 $\angle A$ 的正弦，餘弦，正切等. 又 $a:b:c=5:12:13$，那麼怎樣？

〔問 2〕 試用 a, b, c 表出 $\angle B$ 的正弦，餘弦，正切等.

3. 定理. 角的正弦，餘弦都較 1 小. 正切，餘切的值爲任何都可. 正割，餘割都較 1 大.

從前節的定義，學者試自己證明.

4. 定理. 同一角或相等角的正弦，餘弦等各是一個一定不變的數值.

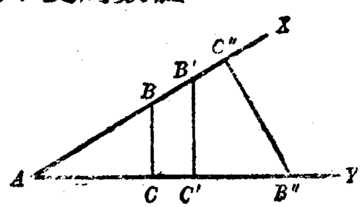


圖 從 A 角邊上隨便取幾點引他邊的垂線 $BC, B'C'$, $B''C''$ 等. 那麼 $\frac{BC}{AB}$, $\frac{B'C'}{AB'}$, $\frac{B''C''}{AB''}$ 等都是 A 角的正弦. 但是

$\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$, $\triangle AB''C''$ 等都是相似的.

所以　　$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

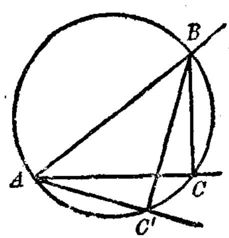
所以 $\sin A$ 的值,是一個一定不變的數值.

其他的比亦同這個一樣的.

又相等角的時候亦可以同樣證明的.

〔問〕　如 $\sin A=\frac{2}{3}$ 及 $\tan A=\frac{5}{4}$ 等的 A 角,試作圖來表示.

5.　定理.　角倘然增大,那麼他的正弦,正切,正割,隨他一同增大;餘弦,餘切,餘割卻反而減小.



證　設 $\angle BAC<\angle BAC'$,在公共邊 AB 上取中心,過公共頂點 A,任意畫一圓周,使交他邊於 C,C'.

那麼　　$\because$　$\angle BAC<\angle BAC'$,

所以　　劣弧 $BC<$劣弧 BC',

$\therefore$　弦 $BC<$弦 BC'.

$$\therefore\ \frac{BC}{AB}<\frac{BC'}{AB}.$$

就是　　　$\sin BAC < \sin BAC'$.

所以角倘然增大，那麼他的正弦跟隨他一同增大.

又　　　弦 $AC >$ 弦 AC'　　　是很明白的，

$$\therefore \quad \cos BAC > \cos BAC'.$$

所以角倘然增大，那麼餘弦倒反而減小.

又　　$$\frac{BC}{AC} < \frac{BC'}{AC'},$$

$$\therefore \quad \tan BAC < \tan BAC'.$$

所以角倘然增大，那麼正切跟隨他一同增大.

餘割，正割，餘切各是正弦，餘弦，正切的倒數，所以隨角的增大而餘割，餘切反而減小，正割增大.

6. 定義. 某角的正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割總名叫某角的'三角函數'.

注意一：　通常某數倘然變化，他數跟隨他而變化，那麼這個他數叫做某數的'函數'.

例如 $2x^2+3x-5$ 的數值是 x 的函數. 圓周，圓面積都是他半徑的函數.

又 A 倘然變化，那麼 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 等跟隨他而變化，所以都叫 A 的函數.

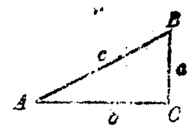
注意二：　三角函數的別名，為'圓函數'或'三角比'.

7. 平面三角法的目的. '平面三角法'的目的：(1)是研究三角函數的性質. (2)從(1)的結

果求三角形邊同角的數量的關係,研究他的算出方法. (3) 更應用 (2) 的結果,研究高度及距離的測量方法.

學過三角法後的便利,從下面的問題及應用例就可明白.

〔問〕* **直角三角形 ABC, 邊同角的相互間有下面的關係.**



$$a=c\sin A=b\tan A,$$

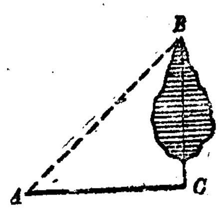
$$b=c\cos A=a\cot A,$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\cos A}.$$

今假設 $c=30$, $\sin A=\frac{3}{5}$, 試求 a 的數值.

又 $b=100$步, $\tan A=0.866$, 那麼怎樣?

〔應用例 1〕 測量樹的高.



BC 是要測的樹的高. A 是測點. 從 A 望樹頂 B 的視線 AB 同水平線 AC 所成的角,倘恰巧是 $45°$. 那麼 AC 的測度**, 就等於 BC 的測度. 但是倘這個角不是 $45°$ 而是 $47°20'$, 那麼要算出 BC 的測度很不容易. 倘能知道 $\tan 47°20'$ 的值, 那麼只要拿這個數值乘 AC 的測度, 就可以得 BC 的測度了.

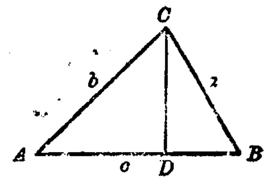
*用黑體字的問題是重要問題.

**就是測量後所得的數值.

今設 $AC=200$ 步，$\tan 47°20'=1.085$，試計算 BC 的長.

〔應用例 2〕　求三角形的面積.

從 $\triangle ABC$ 的一頂點 C，引對邊 AB 的垂線 CD，那麼從直角三角形 ACD，得 $CD=b\sin A$.



拿這個 CD 的數代進，

$$三角形的面積=\frac{1}{2}CD\times AB$$

的裏邊，就得公式：

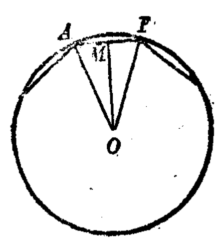
$$三角形的面積=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

即　　$$面積=\frac{1}{2}(二邊的積)\times(夾角的正弦).$$

這個公式很是重要，應用極廣. 從這個公式容易推知 (i) 一角相等的兩三角形面積的比等於他夾角邊的矩形比. (ii) 二邊一定，三角形的面積比例於夾角的正弦. (iii) 夾角是直角的時候，面積是最大.

〔應用例 3〕　正多角形的邊同他的面積.

AB 是正多角形的一邊，外接圓中心為 O，半徑為 R.



那麼　　$AB=2AM$

$$=2AO\sin AOM$$

$$=2R\sin AOM.$$

所以

正八角形的一邊為 $2R\sin 22°30'$，

正十角形的一邊為 $2R\sin 18°$ 等.

一般正多角形一邊的公式爲 $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$，但是 n 爲邊數.

從上面看來，幾何學裏不能得到統一的公式，三角法倒可以統一.而且在幾何學裏不能够計算正多角形的邊，而三角法能够計算.

又計算 OM 的長，就可求得他的面積.學者試拿 R 或 AB 作一求面積的公式.

8. 定理. 某角的餘弦，餘切，餘割，各等於他的餘角的正弦，正切，正割.

在第二節的圖中，比較 A, B 二角（互爲餘角）的三角函數，學者試自己證明之.

注意：一角拿 α* 來代表，那麼他的餘角爲 $90^\circ-\alpha$.

所以
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\sin(90^\circ-\alpha)\\ \cot\alpha&=\tan(90^\circ-\alpha)\\ \operatorname{cosec}\alpha&=\sec(90^\circ-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

〔系〕
$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\cos(90^\circ-\alpha)\\ \tan\alpha&=\cot(90^\circ-\alpha)\\ \sec\alpha&=\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例如　$\tan 30^\circ=\cot 60^\circ$,

$\sin 35^\circ 20'=\cos 54^\circ 40'$ 等.

〔問〕 要 x 適合在下面各個式中，那麼 x 應當怎樣？

* α 爲希臘字，常常用來表角的大小.

$$\sin x=\cos 60°,\qquad \sin 45°=\cos x,$$

$$\tan x=\cot 30°,\qquad \tan 15°=\cot x,$$

$$\sin 5x=\cos 7x,\qquad \cot\frac{x}{2}=\tan 5x.$$

習　題　一

1. 直角三角形 ABC 裏邊，$C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，求 $\angle A$ 的三角函數.

2. 同上，$C=90°$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，求 A,B 二角的三角函數.

又 $\tan A=\frac{3}{2}$，$AC=\frac{5}{3}$，求 BC 的長.

3. 試用作圖法求下面的 A 角：

$$\sin A=\frac{1}{2},\ 7\cos A=5,\ \tan A=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

4. 正方形 $ABCD$ 一邊 CD 的中點是 E，問 $\angle EBC$ 的正弦，餘弦及正切各是多少？

5. 半徑 r 的圓，正對圓心角 A 的弦，他的長是 $2r\sin\frac{A}{2}$，試證明他！

6. 直角三角形三邊的比是 $2:\sqrt{3}:1$，求出大銳角的正弦是多少？

7. 從 $\angle AOB$ 裏邊一直線 OP 上隨便一點 P，引 OA,OB 的垂線 PM,PN. 求證