彈性理論

铁摩辛柯 古地尔著

徐芝綸 吳永禎譯

人民教育出版社

彈性理論

铁摩辛柯 古地尔著

徐芝綸 吳永禎譯

人民教育出版社

本书是根据铁摩辛柯（S. Timoshenko）和古地尔（J. N. Goodier）著“彈性理論”（Theory of Elasticity）1951年第二版譯出的。

全书正文共十五章，分别讲述：緒論，平面应力和平面应变，用直角坐标和极坐标求解二維問題，光彈性法，应变能法，用曲綫坐标解二維問題，三維应力和应变的分析，一般定理，簡单三維問題，扭轉，柱形杆的弯曲，迴轉体中軸对称应力的分布，热应力和彈性固体介质中的波的傳播。书后附录叙述了差分方程在彈性理論中的应用。书中各章均附有习題，供讀者练习。

本书可作为高等学校有关专业彈性理論課程的参考书，也可供有关工程技术人員参考。

彈 性 理 論

铁摩辛柯　古地尔 著

徐芝綸　吳永禎 譯

北京市书刊出版业营业許可证出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·1127　开本 850×1168 1/32　印张 16 13/16

字数 427,000　印数 0,001—6,000 定价（8）¥2.10

1964年8月第1版　1964年8月北京第1次印刷

第二版序

在第一版之后出現的彈性理論的許多发展和澄清及其应用，在这一版大量增加和修訂的內容中已有所反映。本书的安排絕大部分保持与第一版相同。

光彈性法的处理、曲綫坐标中的二維問題及热应力都已重新編写，并分别扩大成章，其中提出了第一版中所未給出的許多方法和解答。增加了一篇关于差分法及其应用(包括松弛法)的附录。在其他各章中还加入了一些新的节和段，討論了应变从理論，重力应力，圣維南原理，轉动分量，互等定理，一般解答，平面应力解答的近似性，扭轉中心和剪切中心，內圓角处扭应力的集中，受扭及受弯的纖細截面(如实心机翼)的近似处理，以及圓軸受压力带等。

本书中还增加了为学生准备的习题，直到扭轉一章为止。

对本书讀者提出的許多有益的建議謹致謝意。

S. 铁摩辛柯

J. N. 古地尔

1951年2月。

第一版序

近年来，彈性理論已被广泛地用来解决工程問題。在許多情况下，材料力学的初等方法不能提供关于工程結构中应力分布的資料，于是必須借重更强有力的彈性理論方法。关于梁的載荷附近及支点附近的局部应力，初等理論就不能給出足够的資料；用来考察各向同阶大小的物体中的应力分布，它也是无效的。圓滚和軸承珠中的应力，只有用彈性理論的方法才能求得。梁或軸的截面如有剧烈的变化，变化处的应力也无法用初等理論来研究。大家知道，在內凹角处有高度的应力集中，因而裂痕就会从这种凹角处开始；結构受有反复应力时更是如此。机件在使用时的断裂，大都起因于这种裂痕。

近年来，对于解决这种实用上极为重要的問題，已經大有进展。在某些情况下，虽然还不能得出严格的解答，但已发展了一些近似方法。在另一些情况下，解答可用实驗方法得到。作为这方面的例子，可以提一提解决彈性理論二維問題的光彈性法。在一些大学里和許多工业研究試驗室里，現在都已經有了光彈性实驗設备。已經証明，对于截面尺寸的剧烈变化处以及凹角的尖銳內圓角处，用光彈性实驗的結果来研究应力集中，是特別有效的。毫无疑問，这些結果已經大大地影响了近代的机件設計，并在許多情况下帮助改进了制造方法，以消除可能发生裂痕的弱点。

用实驗方法解决彈性理論問題而得到成功的另一个例子，是用皂膜法确定柱形杆在扭轉或弯曲时的应力。这样，在指定边界条件下求解偏微分方程的难题，就成为量測一个适当受拉并受載荷的皂膜的撓度及斜率。实驗証明，这样不但可以得到应力分布的可見的形象，而且可以得到关于应力数值的必需資料，并且这些資料对于实际应用也足

够精确。

此外，电比拟可以用来研究变直徑圓軸中靠近內圓角或直槽处的扭应力。板的弯曲問題与彈性理論二維問題之間的相互比拟，也被成功地用来解答一些重要工程問題。

編著本书的目的，在于把彈性理論中的必需的基本知識以簡单的形式提供給工程师們，还在于搜集一些实用上很重要的特殊問題的解答，并叙述一些求解彈性理論問題的近似方法和实驗方法。

为了注意彈性理論的实际应用，有些理論价値較大而目前工程上尙无直接应用的材料都被略去，以便多討論一些特殊問題。只有仔細地研究这些問題，并把精确的結果与材料力学初等教程中通常給出的近似解答对比，設計者才能对工程結构中的应力分布有透徹的了解，并学会应用这些严格的应力分析方法。

在討論特殊問題时，大都采用直接确定应力的方法而应用表以应力分量的相容方程。这一方法，对于通常对应力数値感兴趣的工程师們說来，是比較熟悉的。如果适当地引用应力函数，这一方法也常比应用表以位移的平衡方程来得簡单。

在許多情况下，也用了解答彈性理論問題的能量法。这样，研究某些积分的极小条件，就代替了求解偏微分方程。应用里次法，这一变分問題又簡化为求某一函数的极小値的簡单問題。这样就可以得到許多重要实用問題的有用的近似解答。

为了便于陈述，本书从二維問題的討論开始，然后，在讀者对于求解彈性理論問題的各种方法已經熟习之后，再討論三維問題。书中某些部分，虽然在实用上具有重要性，但在第一次閱讀时可以省略的，都用小字排印。讀者可在讀完本书中最重要部分以后再研究这类問題。

数学推导都用了淺近的形式，一般并不需要比工业学校中所讲授的数学知識更多。对于某些比較复杂的問題，还給出了所有必需的解釋和中間的演算，以使讀者易于領会全部推导。只有在极少数的情况

下只給出最后結果而沒有全部推导，但也指出了可以找到这些推导的必需参考文献。

关于彈性理論的参考論文和书籍，凡是可能在实用上具有重要性的，都用脚注給出。这些参考資料，对于打算更仔細地研究某些特殊問題的工程师們，可能是有用的。同时，这些参考資料也給出了彈性理論的近代发展的輪廓，对于打算在这方面工作的研究生們也可能有些用处。

編著本书时，曾由同一学科的一本早期书籍（С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, Пгр. ч. I, 1914）引用了大量的內容，这本书是俄国某些工业学校中的彈性理論教材。

S. 铁摩辛柯

1933 年 12 月。

記　号

x, y, z　直角坐标。

r, θ　极坐标。

ξ, η　正交曲綫坐标;有时是直角坐标。

R, ψ, θ　球坐标。

N　物体边界的向外法綫。

l, m, n　向外法綫的方向余弦。

A　截面积。

I_x, I_y　截面对于 x 軸及 y 軸的慣矩。

I_p　截面的极慣矩。

g　重力加速度。

ρ　密度。

q　連續分布載荷的集度。

p　压力。

X, Y, Z　每单位体积的体力分量。

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$　每单位面积的面力分量。

M　弯矩。

M_t　扭矩。

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$　平行于 x, y, z 軸的正应力分量。

σ_n　平行于 n 的正应力分量。

σ_r, σ_θ　极坐标中的徑向及切向正应力。

σ_ξ, σ_η　曲綫坐标中的正应力分量。

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$　柱面坐标中的正应力分量。

$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$。

τ　剪应力。

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	直角坐标中的剪应力分量。
$\tau_{r\theta}$	极坐标中的剪应力。
$\tau_{\xi\eta}$	曲綫坐标中的剪应力。
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$	柱面坐标中的剪应力分量。
S	平面上的总应力。
u, v, w	位移分量。
ϵ	单位伸长。
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	x, y, z 方向的单位伸长。
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	极坐标中的徑向及切向单位伸长。
$e=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z$	体积膨脹。
γ	单位剪切(剪应变)。
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	直角坐标中的剪应变分量。
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$	柱面坐标中的剪应变分量。
E	抗拉及抗压的彈性模数。
G	抗剪彈性模数，剛性模数。
ν	泊松比。
$\mu=G,\ \lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	拉密常数。
ϕ	应力函数。
$\psi(z), \chi(z)$	复势；复变数 $z=x+iy$ 的函数。
$\bar{z}$	共軛复变数 $x-iy$。
C	扭轉剛度。
θ	每单位长度的扭角。
$F=2G\theta$	用于扭轉問題。
V	应变能。
V_0	每单位体积的应变能。
t	时間。
T	一段时間。溫度。

目　录

第一章 緒論

§1. 彈性

所有結构材料都具有一定程度的彈性，就是，如果引起結构产生形变的外力不超过一定极限，那末，当外力移去时，形变也就消失。本书中将假定受外力作用的物体是完全彈性的，就是，外力移去后，物体能完全恢复它原来的形状。

本书中对彈性体的分子結构将不予考虑，而假定彈性体的质料是均匀的，并且在全体积內連續分布，因而由物体中割取的微小单元具有与該物体相同的物理特性。为了簡化討論，还假定物体是各向同性的，就是，沿着所有各个方向，彈性相同。

結构材料通常并不滿足上述的假定。例如，把鋼这样重要的材料用显微鏡来观察，就可看出它是由各种晶体按不同的排列方式組成的。这材料远不是均匀的，但經驗证明，根据均匀性和各向同性的假定而得到的彈性理論解答，可以应用于鋼結构而极为精确。对于这一点的解釋是：晶体非常微小，通常每立方吋鋼料內有几百万个。虽然每个晶体在不同的方向可能有不同的彈性，但这些晶体通常是随机排列的，而大块鋼料的彈性代表这些晶体的平均性质。只要物体的几何尺寸远大于单个晶体的尺寸，关于均匀性的假定就可应用而极为精确，而且，如果这些晶体是随机排列的，这材料就可当作是各向同性的。

如果由于滾輾之类的某种工艺处理，使金屬內晶体的某一排列方式占了优势，这时，金屬在不同方向的彈性将成为不相同，就必須考虑各向异性的情况。例如，冷輾銅的情形就是这样。

§2. 应力

令图1代表一平衡物体。在外力 P_1、…、P_7 的作用下，該物体各部分之間將发生內力。为了研究任一点 O 处的內力大小，可假想用經过該点的截面 mm 將物体分为 A 和 B 两部分。試考察两部分之一，如 A，可以說它是在外力 P_5、…、P_7 和分布在截面 mm 上的內力作用下維持平衡，而这些內力代表 B 部分材料对于 A 部分材料的作用。假定这些內力連續分布在面积 mm 上，就像靜水压力或風压力連續分布在它們的作用面上一样。通常用集度表明这种力的大小，就是，作用面每单位面积上所受的力的数量。在討論內力时，这集度就称为应力。

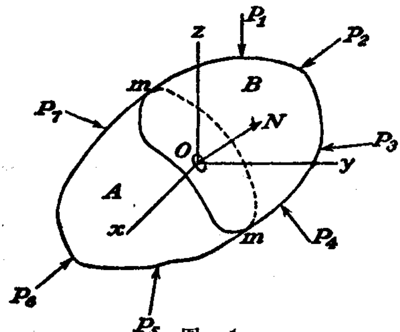

图 1

在柱形杆因两端有均匀分布力而受拉的最簡单情况下(图2)，任一截面 mm 上的內力也是均匀分布的。因此，內力的集度，也就是应力，可由总拉力 P 除以截面积 A 而求得。

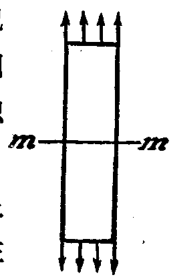

图 2

在剛才所考虑的情况下，应力是均匀分布在截面上的。在如图1所示的一般情况下，应力并非均匀分布在 mm 上的。为了求得从截面 mm 上任一点 O 处割出的微小面积 δA 上的应力大小，我們假定作用在这单元面积上的力(由于 B 部分材料对于 A 部分材料的作用)可以簡化为合力 δP。如果將单元面积 δA 无限縮小，那末，比率 $\frac{\delta P}{\delta A}$ 的极限值就是在 O 点处作用在截面 mm 上的应力的大小。合力 δP 的极限方向就是应力的方向。在一般情况下，应力的方向傾斜于作用面 δA，我們通常將它分解成为两个分量: