

彈 性 理 論

铁摩辛柯 古地尔 著

徐芝綸 吳永祺 譯

人 民 教 育 出 版 社

彈 性 理 論

铁摩辛柯 古地尔 著

徐芝綸 吳永禎 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据铁摩辛柯 (S. Timoshenko) 和古地尔 (J. N. Goodier) 著“弹性理论”(Theory of Elasticity) 1951 年第二版译出的。

全书正文共十五章, 分别讲述: 绪论, 平面应力和平面应变, 用直角坐标和极坐标求解二维问题, 光弹性法, 应变能法, 用曲线坐标解二维问题, 三维应力和应变的分析, 一般定理, 简单三维问题, 扭转, 柱形杆的弯曲, 迴轉体中轴对称应力的分布, 热应力和弹性固体介质中的波的传播。书后附录叙述了差分方程在弹性理论中的应用。书中各章均附有习题, 供读者练习。

本书可作为高等学校有关专业弹性理论课程的参考书, 也可供有关工程技术人员参考。

弹 性 理 论

铁摩辛柯 古地尔 著

徐芝纶 吴永祺 译

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 K13010·1127 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 16 $\frac{13}{16}$

字数 427,000 印数 0,001—6,000 定价(8) ¥2.10

1964 年 8 月第 1 版 1964 年 8 月北京第 1 次印刷

第二版序

在第一版之后出現的彈性理論的許多发展和澄清及其应用，在这一版大量增加和修訂的內容中已有所反映。本书的安排絕大部分保持与第一版相同。

光彈性法的处理、曲綫坐标中的二維問題及热应力都已重新編写，并分別扩大成章，其中提出了第一版中所未給出的許多方法和解答。增加了一篇关于差分法及其应用(包括松弛法)的附录。在其他各章中还加入了一些新的节和段，討論了应变丛理論，重力应力，圣維南原理，轉动分量，互等定理，一般解答，平面应力解答的近似性，扭轉中心和剪切中心，內圓角处扭应力的集中，受扭及受弯的纖細截面(如实心机翼)的近似处理，以及圓軸受压力帶等。

本书中还增加了为学生准备的习题，直到扭轉一章为止。

对本书讀者提出的許多有益的建議謹致謝意。

S. 铁摩辛柯

J. N. 古地尔

1951年2月。

第一版序

近年来,彈性理論已被广泛地用来解决工程問題。在許多情况下,材料力学的初等方法不能提供关于工程結構中应力分布的資料,于是必須借重更强有力的彈性理論方法。关于梁的載荷附近及支点附近的局部应力,初等理論就不能給出足够的資料;用来考察各向同阶大小的物体中的应力分布,它也是无效的。圓滾和軸承珠中的应力,只有用彈性理論的方法才能求得。梁或軸的截面如有剧烈的变化,变化处的应力也无法用初等理論来研究。大家知道,在內凹角处有高度的应力集中,因而裂痕就会从这种凹角处开始;結構受有反复应力时更是如此。机件在使用时的断裂,大都起因于这种裂痕。

近年来,对于解决这种实用上极为重要的問題,已經大有进展。在某些情况下,虽然还不能得出严格的解答,但已发展了一些近似方法。在另一些情况下,解答可用实验方法得到。作为这方面的例子,可以提一提解决彈性理論二維問題的光彈性法。在一些大学里和許多工业研究試驗室里,現在都已經有了光彈性实验設備。已經证明,对于截面尺寸的剧烈变化处以及凹角的尖銳內圓角处,用光彈性实验的結果来研究应力集中,是特別有效的。毫无疑问,这些結果已經大大地影响了近代的机件設計,并在許多情况下帮助改进了制造方法,以消除可能发生裂痕的弱点。

用实验方法解决彈性理論問題而得到成功的另一个例子,是用皂膜法确定柱形杆在扭轉或弯曲时的应力。这样,在指定边界条件下求解偏微分方程的难题,就成为量測一个适当受拉并受載荷的皂膜的挠度及斜率。实验证明,这样不但可以得到应力分布的可見的形象,而且可以得到关于应力数值的必需資料,并且这些資料对于实际应用也足

够精确。

此外，电比拟可以用来研究变直径圆轴中靠近内圆角或直槽处的扭应力。板的弯曲问题与弹性理论二维问题之间的相互比拟，也被成功地用来解答一些重要工程问题。

编著本书的目的，在于把弹性理论中的必需的基本知识以简单的形式提供给工程师们，还在于搜集一些实用上很重要的特殊问题的解答，并叙述一些求解弹性理论问题的近似方法和实验方法。

为了注意弹性理论的实际应用，有些理论价值较大而目前工程上尚无直接应用的材料都被略去，以便多讨论一些特殊问题。只有仔细地研究这些问题，并把精确的结果与材料力学初等教程中通常给出的近似解答对比，设计者才能对工程结构中的应力分布有透彻的了解，并学会应用这些严格的应力分析方法。

在讨论特殊问题时，大都采用直接确定应力的方法而应用表以应力分量的相容方程。这一方法，对于通常对应力数值感兴趣的工程师们说来，是比较熟悉的。如果适当地引用应力函数，这一方法也常比应用表以位移的平衡方程来得简单。

在许多情况下，也用了解答弹性理论问题的能量法。这样，研究某些积分的极小条件，就代替了求解偏微分方程。应用里次法，这一变分问题又简化为求某一函数的极小值的简单问题。这样就可以得到许多重要实用问题的有用的近似解答。

为了便于陈述，本书从二维问题的讨论开始，然后，在读者对于求解弹性理论问题的各种方法已经熟悉之后，再讨论三维问题。书中某些部分，虽然在实用上具有重要性，但在第一次阅读时可以省略的，都用小字排印。读者可在读完本书中最重要的部分以后再研究这类问题。

数学推导都用了浅近的形式，一般并不需要比工业学校中所讲授的数学知识更多。对于某些比较复杂的问题，还给出了所有必需的解释和中间的演算，以使读者易于领会全部推导。只有在极少数数的情况

下只給出最后結果而沒有全部推导，但也指出了可以找到这些推导的必需参考文献。

关于彈性理論的参考論文和書籍，凡是可能在实用上具有重要性的，都用脚注給出。这些参考資料，对于打算更仔細地研究某些特殊問題的工程师們，可能是有用的。同时，这些参考資料也給出了彈性理論的近代发展的輪廓，对于打算在这方面工作的研究生們也可能有些用处。

編著本书时，曾由同一学科的一本早期书籍 (С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, Изд. ч. I, 1914) 引用了大量的內容，这本书是俄国某些工业学校中的彈性理論教材。

S. 铁摩辛柯

1933 年 12 月。

記 号

- x, y, z 直角坐标。
 r, θ 极坐标。
 ξ, η 正交曲线坐标; 有时是直角坐标。
 R, ψ, θ 球坐标。
 N 物体边界的向外法线。
 l, m, n 向外法线的方向余弦。
 A 截面积。
 I_x, I_y 截面对 x 轴及 y 轴的惯性矩。
 I_p 截面的极惯性矩。
 g 重力加速度。
 ρ 密度。
 q 连续分布载荷的集度。
 p 压力。
 X, Y, Z 每单位体积的体力分量。
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 每单位面积的面力分量。
 M 弯矩。
 M_t 扭矩。
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 平行于 x, y, z 轴的正应力分量。
 σ_n 平行于 n 的正应力分量。
 σ_r, σ_θ 极坐标中的径向及切向正应力。
 σ_ξ, σ_η 曲线坐标中的正应力分量。
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ 柱面坐标中的正应力分量。
 $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$
 τ 剪应力。

- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 直角坐标中的剪应力分量。
 $\tau_{r\theta}$ 极坐标中的剪应力。
 $\tau_{\xi\eta}$ 曲线坐标中的剪应力。
 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ 柱面坐标中的剪应力分量。
 S 平面上的总应力。
 u, v, w 位移分量。
 ϵ 单位伸长。
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ x, y, z 方向的单位伸长。
 $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ 极坐标中的径向及切向单位伸长。
 $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ 体积膨胀。
 γ 单位剪切(剪应变)。
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 直角坐标中的剪应变分量。
 $\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$ 柱面坐标中的剪应变分量。
 E 抗拉及抗压的弹性模数。
 G 抗剪弹性模数, 刚性模数。
 ν 泊松比。
 $\mu = G, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ 拉密常数。
 ϕ 应力函数。
 $\psi(z), \chi(z)$ 复势; 复变数 $z = x + iy$ 的函数。
 $\bar{z}$ 共轭复变数 $x - iy$ 。
 C 扭转刚度。
 θ 每单位长度的扭角。
 $F = 2G\theta$ 用于扭转问题。
 V 应变能。
 V_0 每单位体积的应变能。
 t 时间。
 T 一段时间。温度。

目 录

第二版序	ix
第一版序	x
記号	xiii
第一章 緒論	1
§1. 彈性	1
§2. 应力	2
§3. 力和应力的記号	3
§4. 应力分量	4
§5. 应变分量	5
§6. 虎克定律	6
习题	10
第二章 平面应力和平面应变	11
§7. 平面应力	11
§8. 平面应变	12
§9. 在一点的应力	13
§10. 在一点的应变	17
§11. 表面应变的量測	19
§12. 应变丛的莫尔应变圓的作法	21
§13. 平衡微分方程	21
§14. 边界条件	23
§15. 相容方程	24
§16. 应力函数	26
习题	28
第三章 用直角坐标解二維問題	30
§17. 用多項式求解	30
§18. 圣維南原理	34
§19. 位移的确定	35
§20. 端点受載荷的悬臂梁的弯曲	36
§21. 受均匀載荷的梁的弯曲	41
§22. 受連續載荷的梁的其他情形	45
§23. 傅立叶級数形式的二維問題解答	48

§ 24. 傅立叶级数的另一些应用。重力载荷	55
习题	56
第四章 用极坐标解二維問題	58
§ 25. 极坐标中的一般方程	58
§ 26. 軸对称应力分布	61
§ 27. 曲杆的純弯曲	64
§ 28. 极坐标中的应变分量	68
§ 29. 应力对称分布时的位移	70
§ 30. 轉动的圆盘	73
§ 31. 曲杆在一端受力时的弯曲	77
§ 32. 圆孔对板中应力分布的影响	82
§ 33. 集中力在直边界上的一点	89
§ 34. 直边界上的任意鉛直载荷	96
§ 35. 作用于楔端的力	101
§ 36. 作用在梁上的集中力	103
§ 37. 圆盘中的应力	112
§ 38. 作用在无限大板内的一点的力	117
§ 39. 二維問題的极坐标通解	122
§ 40. 极坐标通解的应用	127
§ 41. 表面受载荷的楔	129
习题	131
第五章 光彈性法	137
§ 42. 光彈性应力量測	137
§ 43. 圓偏振仪	142
§ 44. 光彈性应力量測举例	144
§ 45. 主应力的确定	148
§ 46. 三維光彈性理論	149
第六章 应变能法	152
§ 47. 应变能	152
§ 48. 虛功原理	157
§ 49. 卡斯提安諾定理	169
§ 50. 最小功原理	173
§ 51. 最小功原理的应用——矩形板	174
§ 52. 寬梁翼的有效寬度	179
§ 53. 剪力滞后	184
习题	185

第七章 用曲线坐标解二维问题	187
§ 54. 复变函数	187
§ 55. 解析函数与拉普拉斯方程	189
习题	191
§ 56. 用势函数和复变函数表示的应力函数	191
§ 57. 对应于已知应力函数的位移	194
§ 58. 用复势表示应力和位移	196
§ 59. 曲线上应力的合力。边界条件	199
§ 60. 曲线坐标	201
§ 61. 曲线坐标中的应力分量	205
习题	207
§ 62. 用椭圆坐标求解。受均匀应力的板内的椭圆孔	207
§ 63. 受简单拉伸的板内的椭圆孔	211
§ 64. 双曲线边界。凹口	215
§ 65. 双极坐标	217
§ 66. 双极坐标解答	219
第八章 三维应力和应变的分析	225
§ 67. 在一点的应力的描述	225
§ 68. 主应力	226
§ 69. 应力椭球面和应力准面	227
§ 70. 主应力的确定	229
§ 71. 极大剪应力的确定	230
§ 72. 均匀形变	232
§ 73. 在一点的应变	233
§ 74. 应变主轴	236
§ 75. 转动	237
习题	240
第九章 一般定理	241
§ 76. 平衡微分方程	241
§ 77. 相容条件	242
§ 78. 位移的确定	245
§ 79. 用位移表示的平衡方程	246
§ 80. 位移的通解	248
§ 81. 叠加原理	249
§ 82. 解答的唯一性	250
§ 83. 互等定理	252

§ 84. 平面应力解答的近似性	255
习题	258
第十章 简单的三維問題	259
§ 85. 均匀应力	259
§ 86. 柱形杆受自重拉伸	260
§ 87. 常截面圓軸的扭轉	263
§ 88. 柱形杆的純弯曲	264
§ 89. 板的純弯曲	269
第十一章 扭轉	272
§ 90. 柱形杆的扭轉	272
§ 91. 橢圓截面杆	277
§ 92. 另几个简单解答	279
§ 93. 薄膜比拟	282
§ 94. 狭矩形截面杆的扭轉	286
§ 95. 矩形杆的扭轉	289
§ 96. 附加結果	293
§ 97. 用能量法解扭轉問題	296
§ 98. 轧制杆的扭轉	302
§ 99. 用皂膜解扭轉問題	306
§ 100. 流体动力学比拟	308
§ 101. 空心軸的扭轉	310
§ 102. 薄管的扭轉	314
§ 103. 杆的某一截面保持为平面时的扭轉	318
§ 104. 变直径圓軸的扭轉	321
习题	329
第十二章 柱形杆的弯曲	333
§ 105. 悬臂梁的弯曲	333
§ 106. 应力函数	334
§ 107. 圓截面	336
§ 108. 橢圓截面	338
§ 109. 矩形截面	340
§ 110. 附加結果	346
§ 111. 非对称截面	348
§ 112. 剪力中心	350
§ 113. 用皂膜法解弯曲問題	354
§ 114. 位移	357

§ 115. 弯曲的进一步研究	358
第十三章 迴轉体中的軸对称应力分布	360
§ 116. 一般方程	360
§ 117. 用多项式求解	364
§ 118. 圆板的弯曲	364
§ 119. 轉动的圆盘作为三維問題	370
§ 120. 作用于无限大物体內一点的力	372
§ 121. 受均匀內压力或外压力的球形容器	375
§ 122. 球形洞周围的局部应力	378
§ 123. 作用于半无限大物体边界上的力	381
§ 124. 载荷分布在半无限大物体的一部分边界上	385
§ 125. 两接触球体之間的压力	392
§ 126. 两接触体之間的压力。一般情形	397
§ 127. 球体的碰撞	403
§ 128. 圆柱体的軸对称形变	405
§ 129. 圆柱体受压力带	409
§ 130. 圆环段的扭轉	412
§ 131. 圆环段的純弯曲	417
第十四章 热应力	422
§ 132. 热应力分布的最簡單情形	422
§ 133. 平面热应力的若干問題	427
§ 134. 溫度对称于圆心的薄圆盘	429
§ 135. 长圆柱	432
§ 136. 球体	441
§ 137. 一般方程	446
§ 138. 初应力	450
§ 139. 有关常热流的二維問題	453
§ 140. 一般方程的解	459
第十五章 彈性固体介质中的波的傳播	465
§ 141.	465
§ 142. 柱形杆中的纵波	465
§ 143. 杆的纵向碰撞	471
§ 144. 各向同性彈性介质中的膨胀波和畸变波	479
§ 145. 平面波	481
§ 146. 沿彈性实体表面的波的傳播	484
附录 差分方程在彈性理論中的应用	488

1. 差分方程的推导.....	488
2. 逐步求近法.....	492
3. 松弛法.....	495
4. 三角形网格和六边形网格.....	500
5. 整块松弛和成群松弛.....	505
6. 具有多连截面的杆的扭转.....	506
7. 邻近边界的点.....	508
8. 双谐方程.....	510
9. 变直径圆轴的扭转.....	518
人名对照表	522

第一章 緒論

§ 1. 彈性

所有結構材料都具有一定程度的彈性，就是，如果引起結構產生形變的外力不超過一定極限，那末，當外力移去時，形變也就消失。本書中將假定受外力作用的物體是完全彈性的，就是，外力移去後，物體能完全恢復它原來的形狀。

本書中對彈性體的分子結構將不予考慮，而假定彈性體的質料是均勻的，並且在全體積內連續分布，因而由物體中割取的微小單元具有與該物體相同的物理特性。為了簡化討論，還假定物體是各向同性的，就是，沿着所有各個方向，彈性相同。

結構材料通常並不滿足上述的假定。例如，把鋼這樣重要的材料用顯微鏡來觀察，就可看出它是由各種晶體按不同的排列方式組成的。這材料遠不是均勻的，但經驗證明，根據均勻性和各向同性的假定而得到的彈性理論解答，可以應用於鋼結構而極為精確。對於這一點的解釋是：晶體非常微小，通常每立方吋鋼料內有幾百萬個。雖然每個晶體在不同的方向可能有不同的彈性，但這些晶體通常是隨機排列的，而大塊鋼料的彈性代表這些晶體的平均性質。只要物體的幾何尺寸遠大於單個晶體的尺寸，關於均勻性的假定就可應用而極為精確，而且，如果這些晶體是隨機排列的，這材料就可當作是各向同性的。

如果由於滾軋之類的某種工藝處理，使金屬內晶體的某一排列方式占了優勢，這時，金屬在不同方向的彈性將成為不相同，就必須考慮各向異性的情況。例如，冷軋銅的情形就是這樣。

§ 2. 应力

令图 1 代表一平衡物体。在外力 $P_1, \dots, P_7$ 的作用下, 該物体各部分之間將发生內力。为了研究任一点 O 处的內力大小, 可假想用經過該点的截面 mm 將物体分为 A 和 B 两部分。試考察两部分之一, 如 A , 可以說它是在外力 $P_5, \dots, P_7$ 和分布在截面 mm 上的內力作用下維持平衡, 而這些內力代表 B 部分材料对于 A 部分材料的作用。假定這些

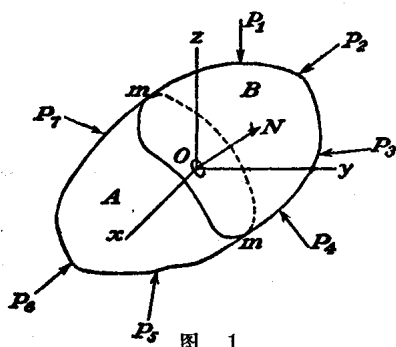


图 1

內力連續分布在面积 mm 上, 就像靜水压力或風压力連續分布在它們的作用面上一样。通常用集度表明这种力的大小, 就是, 作用面每单位面积上所受的力的数量。在討論內力时, 这集度就称为应力。

在柱形杆因两端有均匀分布力而受拉的最简单情况下 (图 2), 任一截面 mm 上的內力也是均匀分布的。因此, 內力的集度, 也就是应力, 可由总拉力 P 除以截面积 A 而求得。

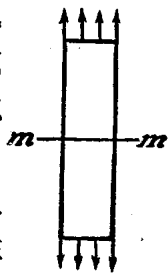


图 2

在剛才所考虑的情况下, 应力是均匀分布在截面上的。在如图 1 所示的一般情况下, 应力并非均匀分布在 mm 上的。为了求得从截面 mm 上任一点 O 处割出的微小面积 δA 上的应力大小, 我們假定作用在这单元面积上的力 (由于 B 部分材料对于 A 部分材料的作用) 可以簡化为合力 δP 。如果将单元面积 δA 无限縮小, 那末, 比率 $\frac{\delta P}{\delta A}$ 的极限值就是在 O 点处作用在截面 mm 上的应力的方向。合力 δP 的极限方向就是应力的方向。在一般情况下, 应力的方向傾斜于作用面 δA , 我們通常将它分解成为两个分量: