◎北京金星创新教育研究中心成果◎

教材全解丛书

高考总复习全解

GAOKAOZONGFUXI
QUANJIE

总主编 薛金星

数学

第四次修订

陕西人民教育出版社

北京金星创新教育研究中心成果

《中学教材全解》

高考总复习全解

数学

（第四次修订）

总 主 编　薛金星
本册主编　丁国文
张希孝
副 主 编　刘好中

陕西人民教育出版社

(陕)新登字 004 号

中学教材全解
高考总复习全解·数学
陕西人民教育出版社出版发行
(西安市长安南路 181 号)
各地书店经销　　北京市昌平兴华印刷厂印刷
787×1092 毫米　16 开本　25 印张　600 千字
2004 年 5 月第 5 版　2004 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7—5419—7879—5/G·6798
全套定价:188.00 元(本册定价:26.80 元)

敬告读者

《中学教材全解》系列丛书由薛金星先生策划并领衔撰写，为北京金星创新教育研究中心的研究成果。这套丛书在整体策划上全面体现创新教育思想，从创意与策划、读者亲身试验、教学成果的整理编写，到最后出版，一直秉承"教学研究来自于教学、服务于读者"的优良品质。作者值此再版之际向全国千百万读者深表谢意！

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心本着为读者服务和负责的精神，及时帮您排忧解难，与您共同切磋，共同研究。

作者声明：《中学教材全解》系列丛书为北京金星创新教育研究中心的专项研究成果，有关图书封面设计的各种标识均已注册，请认准注册商标，谨防假冒。

作者声明：保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版本书的个人和单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。**来信请寄北京市天通苑邮局6503号信箱薛金星收。**邮编：102218。联系电话：(010) 61743009。

题记

逐字逐词，逐句逐段，逐节逐课，全面透彻，精细创新。全析全解各科教材，名师解读，全心全意，伴您成功！

《中学教材全解》编委会

再版前言

《中学教材全解》系列丛书为北京金星创新教育研究中心的专项研究成果。我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸，逐次深入。其三是题型（材料）新。书中选用题型（材料）都是按中考、高考要求精心设计挑选，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，巧设问题，精讲精练，使学生举一反三，触类旁通。其次是练习配置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识"点"与"面"的联系，"教"与"学"的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，学习内容全有"的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学生多学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版，精心设计、细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大

目录

教材全解

第一章

集合与简易逻辑

第一讲 集 合

基础知识精要与点拨

1. 集合的有关概念

(1)某些指定的对象集在一起就成为一个集合

集合是数学中不加定义的基本概念.

集合概念着眼的是某些元素构成的整体.

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外,还可以是其他任何对象.

(2)集合里元素的特性

1°确定性 集合的元素,必须是确定的.任何一个对象都能明确判断出它是或者不是某个集合的元素.

2°互异性 集合中任意两个元素都是不相同的,也就是同一个元素在集合中不能重复出现.

3°无序性 集合与组成它的元素顺序无关.如集合$\{a,b,c\}$与$\{c,a,b\}$是同一集合.

(3)元素与集合的关系

如果a是集合A的元素,就说a属于集合A,记作$a\in A$;如果a不是集合A的元素,就说a不属于集合A,记作$a\notin A$(或$a\overline{\in}A$).

(4)集合的分类

集合的种类通常可分为有限集、无限集、空集(用记号$\varnothing$表示).

(5)集合的表示

1°集合的表示方法:列举法;描述法;图示法(即韦恩图法).

2°特定集合的表示

为了书写和应用的方便,规定常见的数集用特定的字母表示,即

非负整数集(也称自然数集),记作$\mathbf{N}$.

正整数集表示成$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$).

整数集记作$\mathbf{Z}$.

有理数集记作$\mathbf{Q}$.

实数集记作$\mathbf{R}$.

2. 集合与集合之间的关系

(1)子集

对于两个集合A与B,如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素,那么集合A叫做集合B的子集,记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$).显然有$A\subseteq A$.

对于任一集合A,规定$\varnothing\subseteq A$.

真子集

如果A是B的子集,并且B中至少有一个元素不属于A,那么集合A叫做集合B的真子集,记作$A\subsetneqq B$.

(2)集合的相等

集合A,B,如果$A\subseteq B$,同时$B\subseteq A$,则称$A=B$.

(3)严格区分并正确使用"$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$"

集合中表示关系的概念分两类,一类表示元素和集合之间的关系,有属于($\in$)和不属于($\notin$)两个.另一类表示集合和集合之间的关系,有真包含、包含、相等三个.集合A真包含于集合B中(或B真包含A)记作$A\subsetneqq B$,这时称A是B的真子集.A包含于B中(或B包含A)记作$A\subseteq B$,这时称A是B的子集.A和B相等记作$A=B$.还规定空集是任何集合A的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

3. 集合的运算

(1)交集

由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合,叫做A,B的交集,记作$A\cap B$,即$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$.

(2)并集

由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合,叫做A与B的并集,记作$A\cup B=\{x\mid x\in A,或\ x\in B\}$.

(3)补集

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作 $\complement_I A$. 即 $\complement_I A=\{x|x\in I,且\ x\notin A\}$.

(4)集合运算的性质

1°交换律 $A\cap B=B\cap A$；$A\cup B=B\cup A$.

2°结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

3°分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

典型例题解析与规律、方法、技巧总结

在中学教学中，集合知识主要有两方面的应用：

一是把集合作为一种数学语言，以表达一定范围或具有某些特性的元素. 例如，方程(或方程组)的解集，不等式(或不等式组)的解集，具有某种性质或满足某些条件的数集、点集、向量集等，因集合元素的任意性，使得集合语言有着广泛的应用性.

二是使用集合间的运算法则或运算思想，解决某些逻辑关系较复杂的问题. 例如，运用集合法判断真假复合命题和充要条件，运用集合的思想，尤其是补集思想解题等.

集合是中学数学重要基础知识，用处广泛，是年年高考必考内容. 在高考复习中必须认真学习好，应加大复习力度.

1. 熟练掌握集合的基本问题

例 1 设集合 $A=\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+\}$，试用列举法表示集合 A.

分析：因为 $x,y\in\mathbf{N}_+$，所以可在满足条件 $x+y=5$ 的数对中找到分别使 x,y 为正整数的 (x,y).

解：在 $x+y=5$ 中分别令 $x=1,2,3,4$ 得 $y=4,3,2,1$，

因此 $A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

小结：描述法和列举法是表示集合的两种基本方法，要认真掌握好.

例 2 用图示法表示下列各集合之间的关系：

(1)$\mathbf{R},\mathbf{Q}^+,\mathbf{Z},\mathbf{N}_+,\{0\}$；

(2)$A=\{四边形\}$，$B=\{平行四边形\}$，$C=\{菱形\}$，$D=\{矩形\}$，$E=\{正方形\}$，$F=\{梯形\}$.

解：

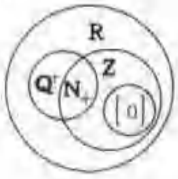

图 1-1-1

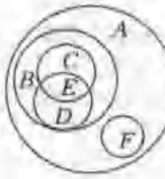

图 1-1-2

小结：(1)图示法非常清楚地表示有关概念的相互关系. 这里要注意：

$\{平行四边形\}\cap\{梯形\}=\varnothing$，在图中要有正确表示.

(2)借助图示法的直观性，它可以帮助我们深刻地理解某些概念和关系，利于记忆、思考解答问题.

(3)在解答集合有关问题时，根据问题实际，要注意使用图示法辅助解题.

例 3 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{0,2,4,8\}$，集合 $A\subseteq M$ 且 $A\subseteq N$，则 A 的个数是(　　).

A. 4 个　　B. 6 个　　C. 8 个　　D. 10 个

分析：因为 $A\subseteq M$ 且 $A\subseteq N$，可知集合 A 应是集合 M 与 N 的交集的子集，即 $A\subseteq(M\cap N)$. 因此，先确定 $M\cap N$，由 $M\cap N=\{0,2,4\}$，再确定 $\{0,2,4\}$ 的子集.

解法 1：$\because A\subseteq M$，且 $A\subseteq N$，

$\therefore A\subseteq(M\cap N)$.

$\because M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{0,2,4,8\}$

$\therefore M\cap N=\{0,2,4\}$.

其子集为：$\varnothing,\{0\},\{2\},\{4\},\{0,2\},\{0,4\},\{2,4\},\{0,2,4\}$.

$\therefore$ 满足条件的 A 应有 8 个.

$\therefore$ 应选 C.

解法 2：$\because A\subseteq(M\cap N)=\{0,2,4\}$，

$\therefore$ 满足问题条件的 A 共有 $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3$ 个.

$\therefore$ 应选 C.

小结：子集是高考中考查次数较多的概念之一，除了要能熟练确定一个有限集的子集的数目之外，还要注意以下两点：(1)空集是任何集合的子集；

(2)任何一个集合是它本身的子集.

例 4 如果集合 $P=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{N}_+\}$，$Q=\{y|y=2^x,x\in\mathbf{N}_+\}$，则(　　).

A. $P\cap Q=\{2,4\}$　　B. $P\cap Q=\{4,16\}$

C. $P=Q$　　D. 以上均错

解：集合 P 与 Q 分别是函数 $y=x^2(x\in\mathbf{N}_+)$ 与函数 $y=2^x(x\in\mathbf{N}_+)$ 的值域，即

$P=\{1,4,9,16,25,36,49,64,\cdots\}$，$Q=\{2,4,8,16,32,64,\cdots\}$.

比较集合 P、Q 的元素，可知 A、B、C 都是错误的.

$\therefore$ 应选 D.

例 5 数集 $X=\{x|x=(2n+1)\pi,n\ 是整数\}$ 与数集 $Y=\{x|x=(4k\pm1)\pi,k\ 是整数\}$ 之间的关系是(　　).

A. $X\subsetneqq Y$　B. $X\supsetneqq Y$　C. $X=Y$　D. $X\neq Y$

分析：根据题意应从集合的包含、相等、不等的概念出发，考查集合与集合之间其元素的所属关系.

解：$\because \{2n+1,n\in\mathbf{Z}\}=\{奇数\}$，而 $4k\pm1$ $(k\in\mathbf{Z})$ 必为奇数，

$\therefore X\supseteq Y$.

反之，当 $x\in X$ 时，$x=(2n+1)\pi$，

若 n 为奇数，即 $n=2k-1(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=(4k-1)\pi$，$x\in Y$；

若 n 为偶数，即 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=(4k+1)\pi$，$x\in Y$.

$\therefore X \subseteq Y$.

由 $X \supseteq Y$，且 $X \subseteq Y$ 可得 $X=Y$.

小结：判定集合与集合之间的关系，基本方法是归结为判定元素与集合的关系.

例 6 已知 $M=\{x \mid x^2-2x-3<0\}$，$N=\{x \mid \lg(x+1)<1\}$，$I=\mathbf{R}$，求 $(\complement_I M)\cap N$.

分析：本题考查集合的运算，其中涉及求补集与求交集的运算，所给的集合是两个不等式的解集，应先解不等式，之后按照 $\complement_I M \cap N$ 所给出的运算顺序，逐步运算，即先求补，再求交.

解：$\because M=\{x \mid x^2-2x-3<0\}=\{x \mid -1<x<3\}$，

$\therefore \complement_I M=\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 3\}$.

又 $N=\{x \mid \lg(x+1)<1\}=\{x \mid -1<x<9\}$，

$\therefore (\complement_I M)\cap N=\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 3\}\cap\{x \mid -1<x<9\}=\{x \mid 3\leqslant x<9\}$.

例 7 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，求 $A\cup B$.

分析：两个集合的并集，就是把两个集合中的元素"放在一起"，去掉重复元素，所组成的集合. 因此，求并集关键是看所给的集合中是否有重复元素，当集合中的元素含有字母参数时，要注意讨论，以保证集合中元素的互异性.

解：由集合元素的互异性，知

在 A 中，$a\neq 1$ 且 $a\neq 3$，

在 B 中，$a^2-a+1\neq 1$，即 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

(1)如果 $a^2-a+1=3$，

即 $a=-1$ 或 $a=2$.

则 $a=-1$ 时，$A\cup B=\{1,3,-1\}$；

$a=2$ 时，$A\cup B=\{1,3,2\}$.

(2)如果 $a^2-a+1=a$，即 $a=1$，

则 不符合元素互异性，舍去.

(3)如果 $a\neq -1$ 且 $a\neq 2$ 且 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 且 $a\neq 3$，

则 $A\cup B=\{1,3,a,a^2-a+1\}$.

小结：解答本题须进行分类讨论，分类讨论时一定要做到分类合理，并且不重、不漏.

例 8 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x \mid x-a<0\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(2)若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

解：$\because A=\{x \mid -2<x<4\}$，$B=\{x \mid x<a\}$.

在数轴上把集合 A 表示出来如图 1-1-3. 由图可知，

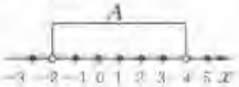

图 1-1-3

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a\leqslant -2$.

(2)若 $A\subsetneqq B$，则 $a\geqslant 4$.

小结：在研究集合之间关系时，要注意利用图形的直观性. 本题是利用数轴图来帮助我们思考的.

例 9 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人，问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

解：赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，

赞成 B 的人数为 $30+3=33$.

如图 1-1-4，记 50 名学生组成的集合为 U，赞成事件 A 的学生全体为集合 A，赞成事件 B 的学生全体为集合 B，设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x，则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

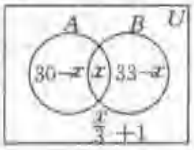

图 1-1-4

由已知 $(33-x)+(30-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$，$\therefore x=21$.

则对 A、B 都赞成的同学有 21 人，都不赞成的有 8 人.

小结：对于交集非空的若干集合元素个数的计算，韦恩图是最好的方法，它能直观地把集合间的交、并、补的关系转换成各部分元素之间的数量关系.

2. 应用集合知识解题时，须注意的几个问题

(1)注意集合中元素的准确识别

例 10 若 $P=\{y \mid y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y) \mid y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$，则(　　).

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\subset Q$

C. $P=Q$　　D. $P\supset Q$

分析：有的同学一接触此题马上得到结论 $P=Q$，这是由于他们仅仅看到两集合中的 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 相同，而没有注意到构成两个集合的元素是不同的，P 集合是函数值域集合，Q 集合是 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 上的点的集合，代表元素根本不是同一类事物.

正确解法应为：

P 表示函数 $y=x^2$ 的值域，Q 表示抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的点集，因此，

$P\cap Q=\varnothing$.

$\therefore$ 应选 A.

例 11 已知集合 $P=\{y=x^2+1\}$，$Q=\{y \mid y=x^2+1\}$，$R=\{x \mid y=x^2+1\}$，$M=\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$，$N=\{x \mid x\geqslant 1\}$ 则(　　).

A. $P=M$　B. $Q=\mathbf{R}$　C. $\mathbf{R}=M$　D. $Q=N$

解：集合 P 是用列举法表示，只含有一个元素，即函数 $y=x^2+1$. 集合 Q、R、N 中的元素全是数，即这三个集合都是数集. 集合 Q 是函数 $y=x^2+1$ 的值域 $[1,+\infty)$；集合 N 是不等式的解集 $[1,+\infty)$；而集合 M 的元素是平面上的点，此集合是函数 $y=x^2+1$ 图象上所有点组成的集合.

$\therefore$ 应选 D.

小结：解集合问题时，对集合元素的准确识别十分重要，不允许有半点差错，否则将导致解题的失败。

例12 若 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3, x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}$，若 $C\subseteq B$，试求 a 的值。

解：根据题设，有 $-2\leqslant x\leqslant a$，

$\therefore -1\leqslant y=2x+3\leqslant 2a+3$.

(1)当 $a\geqslant 2$ 时，$a^2\geqslant 4$，$\therefore 0\leqslant z\leqslant a^2$，而$C\subseteq B$，

$\therefore a^2\leqslant 2a+3$，

即有 $-1\leqslant a\leqslant 3$，$\therefore 2\leqslant a\leqslant 3$.

(2)当 $0\leqslant a<2$ 时，$a^2<4$，

$\therefore 0\leqslant z\leqslant 4$. $\because C\subseteq B$，$\therefore 4\leqslant 2a+3$.

$\therefore a\geqslant \frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<2$.

(3)当 $-2\leqslant a<0$ 时，$a^2\leqslant 4$，

$\therefore a^2\leqslant 8\leqslant 4$，$\because C\subseteq B$.

$\therefore 4\leqslant 2a+3$，$\therefore a\geqslant \frac{1}{2}$（舍去）。由(1)、(2)、(3)可得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

小结：解答集合问题时，要重视集合语言，要看懂集合语言，理解集合语言，能够看清集合元素的实质，谁忽视这一点，谁就会犯错误。

例13 若 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{1,a+1,a^2-2a+2,-\frac{1}{2}(a^2-3a-8),a^3+a^2+3a+7\}$ 且 $A\cap B=\{2,5\}$，试求实数 a 的值。

解：$\because A\cap B=\{2,5\}$，

$\therefore a^3-2a^2-a+7=5$，

由此求得 $a=2$ 或 $a=\pm 1$.

到此，一些同学认为问题已经解完。

事实上，上面的所答，只能保证 $A=\{2,4,5\}$，至于集合 B 中的元素是什么，它是否满足元素的互异性，还必须进一步考查。

当 $a=1$ 时，$a^2-2a+2=1$，与元素的互异性相矛盾，故应舍去 $a=1$.

当 $a=-1$ 时，$B=\{1,0,5,2,4\}$，与 $A\cap B=\{2,5\}$ 相矛盾，故又舍去 $a=-1$.

当 $a=2$ 时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,3,2,5,25\}$，此时，$A\cap B=\{2,5\}$，满足题设。

故 $a=2$ 为所求。

小结：集合元素的互异性是集合的重要属性，可是在解题过程中集合元素的互异性常常被一些同学所忽视，从而导致解题的失败。

(2)要注意空集的作用

例14 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax-2=0\}$ 且 $A\cup B=A$，求实数 a 组成的集合 C.

解：由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 2.

当 $x=1$ 时，$a=2$；

当 $x=2$ 时，$a=1$.

这个结果是不完整的，上述解答只注意了 B 为非空集合。

实际上，$B=\varnothing$ 时，仍满足 $A\cup B=A$.

当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，符合题设。

故正确答案为 $C=\{0,1,2\}$.

小结：空集$\varnothing$是任何非空集合的子集，且 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$. 忽略了这一点，会造成解题结果不全面，应予以重视。

例15 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0, x\in \mathbf{R}\}$，$\mathbf{R}^+$ 为正实数集合，若 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，求 a 的取值范围。

分析：由 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 知 A 中的元素为非正数，即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有正数解。

$\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0,\\ a+2\geqslant 0.\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 0$.

上面这个结果是不完整的，上述的解答只注意到 A 为非空集合的情形，当 A 为空集时仍满足 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，此时 $\Delta=(a+2)^2-4<0$，解得 $-4<a<0$.

综合以上两种情况可得：$a>-4$.

小结：空集是一个特殊的重要集合，它不含任何元素，是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。显然，空集与任何集合的交集为空集，与任何集合的并集仍等于这个集合。当题设隐含有空集参与的集合关系时，其特殊性是很容易被忽视的。

(3)要注意集合语言与其他数学语言的互译

例16 给出两个命题：

命题甲：关于 x 的不等式 $x^2+(a-1)x+a^2>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$.

命题乙：函数 $f(x)=\log_{(2a^2-a)}x$ 是增函数.

(1)若甲、乙至少有一个真命题，则 a 的取值范围是________.

(2)若甲、乙都是真命题，则 a 的取值范围是________.

(3)若甲、乙至少有一个假命题，则 a 的取值范围是________.

(4)若甲、乙有且只有一个真命题，则 a 的取值范围是________.

解：由命题甲为真命题，可得 a 的取值范围为集合

$A=\left\{a\mid a>\frac{1}{3}\text{ 或 }a<-1\right\}$.

由命题乙为真命题，可得 a 的取值范围为集合

$B=\left\{a\mid a>1\text{ 或 }a<-\frac{1}{2}\right\}$.

问题(1)的实质是求 $A\cup B$，易求得 $a>\frac{1}{3}$ 或 $a<-\frac{1}{2}$；

问题(2)的实质是求 $A\cap B$，易得 $|a|>1$；

问题(3)的实质是求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$，即 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$，易得 $-1\leqslant a\leqslant 1$；

问题(4)的实质是求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$ 或 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$，易得 $-1\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}<a\leqslant 1$.

小结：事实上，各种数学语言形态间的互译，可帮助我们在更广阔的思维领域里寻找问题的解决途径，因而这种互译是我们在解题过程中常常必须做的事情。

本题将普通数学语言转化为集合语言之后，对问题的解答带来了方便。

例 17　已知集合 $A=\left\{a\left|\frac{x+a}{x^2-2}=1\right.\right\}$ 有唯一元素，用列举法表示集合 A.

解：集合 A 表示方程 $\frac{x+a}{x^2-2}=1$，　①

即方程　$x^2-x-a-2=0$，　②

有等根时 a 的取值集合.

方程②有等根的条件是 $\Delta=(-1)^2-4(-a-2)=0$，

解得　$a=-\frac{9}{4}$. 因此　$A=\left\{-\frac{9}{4}\right\}$.

以上解法对吗？不难看出，将 A 译为方程②有等根时 a 的取值集合是不准确的. 转译时忽视了 $x^2-2\neq0$，即 $|x|\neq\sqrt{2}$ 这一隐含条件. 可见，与方程①等价的应是混合组

$$(\text{I})\begin{cases}x^2-x-a-2=0, & ②\\ x^2-2\neq0. & ③\end{cases}$$

因此，在讨论方程②有唯一实根时，须照顾到③：$|x|\neq\sqrt{2}$. 由于方程①为分式方程，可能有增根，当方程②的二实根中有一个是方程①的增根 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$ 时，方程①也只有一个实根. 正确解法是：

方程①等价于混合组（Ⅰ）.

(1) 当②有等根时，同上解得 $a=-\frac{9}{4}$，此时 $x=\frac{1}{2}$，适合③；

(2) 当 $x=-\sqrt{2}$ 为①的增根时，

由②得 $a=\sqrt{2}$，此时由①得 $x=1+\sqrt{2}$，适合题意.

当 $x=\sqrt{2}$ 为①的增根时，

由②得 $a=-\sqrt{2}$，此时由①得 $x=1-\sqrt{2}$，适合题意.

由(1)、(2)得 $A=\left\{-\frac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

小结：(1) 集合语言转译成其他语言，转译的准确与否直接关系到解题的成功与失败.

(2) 集合语言与其他语言转译过程中根据问题的需要也可能转译成图形语言，利用数形结合解题. 根据解题的需要有时也可能将其他语言转译为集合语言.

例 18　设 $a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3(m^2+5),m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$ 是平面 xOy 内的点集，问是否存在实数 a 和 b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$ 同时成立？

分析：解决此题的关键是集合语言向非集合数学语言的转化.

解：$A\cap B\neq\varnothing$

$$\xRightarrow{\text{转译}}\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15\end{cases}\text{成立}.$$

即　$na+b=3n^2+15$.　①

又 $(a,b)\in C\xRightarrow{\text{转译}}a^2+b^2\leqslant144$. ②

若满足①和②的 a，b 存在，则关于 a，b 的方程组

$$\begin{cases}na+b=3(n^2+15),\\ a^2+b^2\leqslant144.\end{cases}\text{有解.}$$

从而在直角坐标系 $aO'b$ 中，直线 l：$na+b-3(n^2+15)=0$ 与 $a^2+b^2\leqslant144$ 表示的区域应有公共点.

于是圆心 $O'(0,0)$ 到直线 l 的距离不大于半径 12，即

$$\frac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant12\Rightarrow(n^2-3)^2\leqslant0.$$

即　$n^2=3$ 而 $n\in\mathbf{Z}$，这是不可能的.

故满足①，②的 a，b 不存在.

小结：(1) 对于用集合语言叙述的问题，求解时往往需要转译成代数语言或几何语言.

(2) 进行各种语言形态之间的互译，不仅有利于对数学知识的理解和运用，还可以有利于利用数学知识解答问题.

例 19　已知三个集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$ 间同时满足 $B\subsetneqq A$，$A\cup C=A$ 的实数 a，b 是否存在？若存在，求出 a，b；若不存在，请说明理由.

分析：一元二次方程实根情况有三种：①有两个相等的实根；②有两个不相等的实数根；③没有实数根. 根据条件"$B\subsetneqq A$，$A\cup C=A$"确定集合 B、C 中的元素，因为 $\varnothing$ 是任一非空集合的真子集，所以 B、C 都有可能为 $\varnothing$，但 B 中必有元素 1，则 $B\neq\varnothing$.

解：$\because A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{2,1\}$，

$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}=\{x\mid(x-1)[x-(a-1)]=0\}$.

$\because B\subsetneqq A$，$\therefore a-1=1$，$\therefore a=2$.

$\because A\cup C=A$，$\therefore C\subseteq A$，则 C 中元素有以下三种情况：

i) 若 $C=\varnothing$ 时，即方程 $x^2-bx+2=0$ 无实根.

$\therefore \Delta=b^2-8<0$，$\therefore -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

ii) 若 $C=\{1\}$ 或 $\{2\}$ 时，即方程 $x^2-bx+2=0$ 有两个相等的实根，

$\therefore \Delta=b^2-8=0$. $\therefore b=\pm2\sqrt{2}$.

此时 $C=\{\sqrt{2}\}$ 或 $\{-\sqrt{2}\}$ 不符合题意，舍去.

iii) 若 $C=\{1,2\}$ 时，则 $b=1+2=3$，而两根之积恰好为 2.

综上所述 $a=2$、$b=3$ 或 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

小结：这类题要利用分类讨论的思想，但这题特别容易疏忽的是 $C=\varnothing$ 这一情况，这也是考察集合问题的重点之一，$\varnothing$ 有许多特殊的性质，在解题时要多留心，如：$\varnothing\cup A=A$，$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing=A\cap(\complement_U A)$，$\varnothing=\complement_U U$，$\complement_U\varnothing=U$ 等，同时在解题过程中考虑问题要全面，在本题中既要考虑集合的性质又要考虑一元二次方程根的性质。

(4)注意数形结合解集合问题

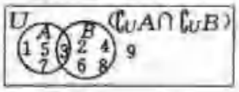

图 1-1-5

例 20 设全集 $U=\{x\mid 0<x<10, x\in\mathbf{N}_+\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，$A\cap\complement_U B=\{1,5,7\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{9\}$，求 A，B。

分析：本题用推理的方法求解不如先画出韦恩图，用填图的方法来得简捷。由图 1-1-5 不难看出

$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,4,6,8\}$。

小结：集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助韦恩图、数轴或直角坐标系等工具将抽象问题直观化、形象化，然后利用数形结合的思想方法使问题灵活直观地获解。

例 21 设 $A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$。

已知 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，试求 a，b 的值。

分析：可利用数轴分析解答。

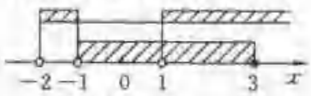

图 1-1-6

解：如图 1-1-6。

设想集合 B 所表示的范围在数轴上移动，显然当且仅当 B 覆盖住集合 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$。

根据一元二次不等式与一元二次方程的关系，可知 -1 与 3 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根。

$\therefore a=-(-1+3)=-2$，

$b=(-1)\times 3=-3$。

小结：类似本题多个集合问题，借助于数轴上的区间图形表示进行处理，采用数形结合的方法，会得到直观、明了的解题效果。

(5)注意用集合的思想解题

例 22 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4mx+2m+6=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围。

分析：集合 A 是方程 $x^2-4mx+2m+6=0$① 的实数解组成的非空集合，$A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 意味着方程①的根有：(1)两负根，(2)一负根一零根，(3)一负根一正根三种情况，分别求解较麻烦。上述三种情况显可概括为方程①的较小根

$$\frac{4m-\sqrt{(-4m)^2-4(2m+6)}}{2}<0,$$

但在目前的知识范围内求解存在困难。如果考虑题设 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 的反面：$A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，则可先求方程①的两根 x_1、x_2 均非负时 m 的取值范围，用补集思想求解尤为简便。

解：设全集 $U=\{m\mid\Delta=(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant 0\}$

$=\left\{m\,\middle|\, m\leqslant -1\text{ 或 }m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$。

若方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的二根 x_1、x_2 均非负，

则 $\begin{cases}m\in U,\\ x_1+x_2=4m\geqslant 0\\ x_1x_2=2m+6\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow m\geqslant\frac{3}{2}$。

因此，$\left\{m\,\middle|\, m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$ 关于 U 的补集 $\{m\mid m\leqslant -1\}$ 即为所求。

小结：(1)采用"正难则反"的解题策略。具体地说，就是将所研究对象的全体视为全集，求出使问题反面成立的集合 A，则 $\complement_U A$ 便为所求。

(2)对于一些比较复杂、比较抽象，条件和结论之间关系不明朗，难于从正面入手的数学问题，在解题时，可调整思路，从问题的反面入手，探求已知未知的关系，这样能起到反难为易，化隐为显，从而使问题得以解决，这就是"正难则反"的解题策略，是补集思想的具体应用。

(3)有的问题，根据问题的具体特点，也可采用交集的思想或并集的思想去处理，请同学们解题注意运用，在此不赘述。

历届高考试题解析与应注意的问题

例 1 (1993·全国高考试题)集合 $\{1,2,3\}$ 的子集共有( )。

A. 7 个 B. 8 个 C. 6 个 D. 5 个

解法 1：集合 $\{1,2,3\}$ 的子集为

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$ 共计 8 个子集。

∴ 应选 B。

解法 2：非空集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集。

∵ $n=3$，

∴ 有 $2^3=8$ 个子集。

∴ 应选 B。

小结：(1)在利用解法 1 的方法写出集合的子集时，要按照一定的排列顺序来写，以防遗漏和重复。

(2)解法 2 给出了这类问题的计算公式，利用公式计算得解的。

例 2 (2000·全国高考试题)设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$，且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数是( )。

A. 11 B. 10 C. 16 D. 15

解：∵ $A=\{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$，

$B=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$